S. 1802. C.56.

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE
TOMVS IX.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCXCI.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCXCV.

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS PETROPOLITANAE
TOMUS IX.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARUM MDCCXCI.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCXCI.

Avec VII Planches.

HISTOIRE. Pag.

Prix propoſé par l'Académie. - - - - - 3.

Epargne d'un fond perpétuel pour payer des penſions aux perſonnes, qui ou par vieilleſſe, ou par maladie ne ſont plus en état de ſervir l'Académie. 6.

Acquiſition d'une collection de minéraux. - - - 9.

Leçons publiques. - - - - - - - - - - ibid.

Ouvrages publiés par l'Académie. - - - - - - ibid.

Augmentations & Gratifications. - - - - - 10.

Morts. - - - - - - - - - - - 11.

Receptions. - - - - - - - - - - 12.

Ouvrages, machines & inventions, productions de la nature & de l'art, antiquités & curioſités, préſentés ou communiqués à l'Académie. - - 14.

Extrait d'une lettre de S. E. Monſieur le Prince Demetrius de Golitzin, *datée de la Haye le 15 Février.* - - - - - - - - - - - 31.

Rapport de M. Lowitz, *rélativement à la métalliſation des terres, préſenté à l'Académie le 6 Juin.* 32.

Pag.

Extrait d'une lettre de M. de Boghdanof, *Commendant de la fortereſſe de Biysk', dans le Gouvernement de Kolyvan, datée du 12 Novembre 1790.* - - - - - - - - 34.

Rapport de M. Lowitz, *rélativement à la terre nitreuſe des environs de Biysk', préſenté à l'Académie le 28 Avril.* - - - - - - 35.

Varietas acipenſeris ſtellati oppido rara deſcripta, ab J. Lepechin. Tab. A. - - - - - - ibid.

SVPPLEMENT. *Mémoires préſentés à l'Académie Impériale des Sciences par des Savans étrangers & approuvés dans ſes Aſſemblées.* - - 39.

Détermination de la démi-circonférence d'un cercle, dont le diamètre eſt = 1, exprimée en 140 figures décimales. Par M. Géorge Vega. - 41.

Traité d'une méthode nouvelle & infaillible d'eſſaïer l'or & l'argent. Par M. le Baron de Meidinger. Tab. B & C. - - - - - - 45.

Recherches ſur les équations aux différences partielles du premier ordre à trois variables, lorsque ces différences ne ſont que linéaires. Par M. Jean Trembley. - - - - - - - 88.

Deſcriptio caenopteridis. Auctore Carolo Petro Thunberg. Tab. D. E. F. G. - - - - - - 157.

EXTRAIT *des mémoires contenus dans ce volume.*

Claſſe Mathématique & Phyſico-Mathématique. 165.

Claſſe de Phyſique. - - - - - - - - - 186.

Claſſe Aſtronomique & Météorologique. - - - 192.

NOVA

V.

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS. TOMVS IX.

Cum VI. Tabulis aeri incisis.

MATHEMATICA ET PHYSICO-MATHEMATICA.

LEONH. EVLER. *De singulari genere quaestionum Diophantearum & methodo maxime recondita eas resoluendi.* - - - - - - - - - Pag. 3.

—— —— *De radicibus aquationis infinitae* $o = 1 - \frac{x^2}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{x^6}{n \ldots (n+5)} + \text{etc.}$ 19.

—— —— *Exercitatio analytica, vbi imprimis seriei maxime generalis summatio traditur.* Tab. I. fig. 1. - - - - - - - - - - - - 41.

—— —— *Dilucidationes super formulis, quibus sinus & cosinus angulorum multiplorum exprimi solent, vbi simul ingentes difficultates diluuntur.* 54.

—— —— *De insignibus proprietatibus formularum integralium praeter binas variabiles etiam earum differentialia cuiuscunque ordinis involventium.* - - - - - - - - - 81.

—— —— *Specimen integrationis abstrusissimae hac formula* $\int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2xx-1)}}$ *contentae.* - - 98.

—— —— *Integratio formulae differentialis maxime irrationalis, quam tamen per logarithmos & arcus circulares expedire licet.* - - - 118.

—— —— *Evolutio formulae integralis* $\int \frac{\partial z(3+zz)}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}$ *per logarithmos & arcus circulares.* - - - - 127.

Pag.

LEONH. EVLER. *Problema geometricum, quo inter omnes ellipſes, quae per data quatuor puncta traduci poſſunt, ea quaeritur, quae habet aream minimam.* Tab. I. fig. 2. 3. 4. 5. Tab. II. fig. 1. 2. - - - - - - - - - 132.

—— —— *Solutio problematis maxime curioſi, quo inter omnes ellipſes, quae circa datum triangulum circumſcribi poſſunt, ea quaeritur, cuius area ſit omnium minima.* Tab. II. fig. 3. 4. 5. 6. - - - - - - 146.

— —— *De centro ſimilitudinis.* Tab. III et IV. 154.

F. T. SCHVBERT. *Problemata e methodo tangentium inuerſa.* Tab. V. - - - - - - 166.

—— —— *Solutio dubii circa rectificationem curuarum.* Tab. VI. fig. 1. 2. 3. 4 - - - 190.

NICOL. FVSS. *Obſeruationes circa ſeries quibus ſinus et coſinus angulorum multiplorum exprimi ſolent.* - - - - - - - - 205.

W. L. KRAFFT. *De tempore oſcillationis pendulorum, dum arcus datae amplitudinis cuiuscunque deſcribunt.* Tab. VI. fig. 5. 6. - - 225.

NICOL. FVSS. *Solutio quaeſtionis, quot modis polygonum* n *laterum in polygona* m *laterum, per diagonales reſolui quaeat.* - - - - - 243.

—— —— *De la déſcente d'un corps ſur un plan incliné, dont une extrémité eſt appuyée ſur un fond élaſtique.* Tab. VI. fig. 7. 8. 9. - 252.

PHYSICA.

C. F. WOLFF. *De ordine fibrarum muſcularium cordis, Diſſertatio X. De ſtrato ſecundo fibrarum ventriculi ſiniſtri. Pars III.* Huc pertinent Tabulae

Pag.

bulae decem de ordine fibrarum cordis, praecedentibus voluminibus Actorum inſertae. - 271.

TOB. LOWITZ. *Tentamina de nitri crudi per carbones depuratione.* - - - - - - 290.

BASIL. SEWERGIN. *Lapidis cornei lamelloſi, noua ſpecies.* - - - - - - - - - 307.

TOB. LOWITZ. *Experimenta noua cryſtalliſationem alcalium cauſticorum ſpectantia.* - - - 311.

I. T. KOELREVTER. *Deſcriptio pleuronectoris fleſi et paſſeris Linnaei, hiſtorico-anatomica.* - - 327.

ASTRONOMICA ET METEOROLOGICA.

W. L. KRAFFT. *Eſſai de perfectionner une méthode de trouver ſur mer la latitude géographique du vaiſſeau.* - - - - - - - - 353.

Le COMTE DE BRÜHL. *Mémoire ſur la différence en longitude des obſervatoires de Paris & de Greenwich, avec les obſervations d'où elle a été déduite, & une critique raiſonnée de celle que M. le Général-Major Roy a conclue de ſes opérations géodéſiques.* - - - - - - - 363.

J. ALB. EULER. *Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en 1791 d'après le nouveau ſtile.* - - - - - - - 372.

—— —— *Réſumé des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg depuis 1772 jusqu'à 1792, comprennant un intervalle de vingt ans.* 393.

ER-

ERRATA.

Pag. 116. lin. antepen. loco $a + b^n$ lege $a + b\,x$,
—— 122. lin. 3. in denom: loco β lege 6.

Avis au Rélieur.

Les ſept planches marquées par les lettres A. B. C. D. E. F. G, appartiennent à la partie hiſtorique & doivent être placées après la page 198. ou à la fin de la feuille *c c.*

Les ſix autres planches Tab. I. II. III. IV. V. VI. feront miſes à la fin de tout l'ouvrage: pag. 447.

Bericht an den Buchbinder.

Die ſieben mit den Buchſtaben A. B. C. D. E. F und G bezeichnete Kupfer-Tafeln gehören zu dem hiſtoriſchen Theil, und werden zu Ende deſſelben, Seite 198, eingebunden, oder gleich nach dem Blatte c c.

Die ſechs andere mit Tab. I. II. III. IV. V und VI. bezeichnete Kupfer-Tafeln aber zu Ende des ganzen Werks, Seite 447.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
ANNÉE MDCCXCI.

L'Académie ayant propoſé dans ſon aſſemblée publique du 4 Décembre 1788, pour ſujet du prix de cent ducats d'Hollande, la queſtion de la nature de la ſubſtance colorante (*), elle n'a reçu qu'un petit nombre de pieces ſur ce ſujet, déſignées comme il ſuit

No. 1. Abhandlung über den Grundſtoff der färbenden Subſtanzen; avec la déviſe; *Analyſis chemica notionem corporis diſtinctam, ſyntheſis clariſſimam reddit:* reçu le 19 Août, 1789.

No. 2. Verſuch einer Beantwortung der Preisfrage der Kayſerlichen Akademie der Wiſſenſchaften in St. Petersburg für das Jahr 1790: Von der färbenden Subſtanz: avec la déviſe: *Die Wahrheit iſt mein Ziel*: reçu le 4 Février, 1790.

(*) Nova Acta Acad. Sc. Imp. Tom. VI. *Hiſtoire* pag. 28.

No. 3. Ueber den Urſprung der Farben, das eigene Weſen und die Beſtandtheile derſelben: avec la déviſe: *Ex duobus fit tertium & omnia:* reçu le 6 Mars, 1790.

No. 4. Un mémoire allemand, reçu le 19 Avril 1790, qui n'a pas pu être admis au concours, l'auteur s'étant nommé, en ſignant ſon mémoire: *Ambroſius Zickler, der praktiſchen Färbekunſt Meiſter.*

No. 5. Mémoire allemand reçu le 25 Novembre 1790, avec la déviſe: *Scire decet nec ſcire ſatis, tentare neceſſum corpora naturae cauſſas librare latentes.*

Le terme du concours ayant été échu le 1 Décembre 1791, ces mémoires ont été ſoigneuſement examines, ſuivant l'uſage, par des membres de la Claſſe de Phyſique nommés pour commiſſaires à cet effet, qui là deſſus dans une ſéance tenue le 10 Février ont déclaré d'un conſentement unanime, que le prix ne pouvoit pas être adjugé, mais qu'il falloit renvoyer la queſtion aux années ſuivantes. En effet, quoiqu'il y ait quelques bons mémoires parmi les ſusmentionnés, il n'y en a aucun qui ſatisfaſſe pleinement aux déſirs de l'Académie. Celui que l'Académie a jugé le plus digne d'attention eſt le No. 1. On y trouve de belles expériences analytiques, mais desquelles on ne ſauroit encore tirer des concluſions certaines ſur la nature de la ſubſtance colorante. L'Académie a pareillement fort approuvé diverſes propoſitions contenues dans la piece No. 2. mais elle ne les a trouvé appuyées ſur aucune expérience ſpécifique & certaine; car celles qu'on y cite comme pouvant tenir lieu de démonſtration, ſe rapportent plus aux pro-

procédés de l'art de la teinture, qu'à l'explication de la nature des couleurs chymiques.

Par ces raiſons, l'Académie a jugé à propos de publier encore la même queſtion, ſous les conditions ordinaires, mais pour en faciliter la ſolution, elle en a changé l'expoſé de la maniere ſuivante.

Jusqu'à préſent les chymiſtes n'ont pu déterminer exactement à quelle claſſe des corps naturels on doit rapporter la matière colorante, ou en général la ſubſtance qu'on rencontre plus ou moins dans toutes les couleurs chymiques, déſignées par le nom de *Pigmenta*, & dans presque tous les corps des trois regnes de la nature, en plus grande ou en moindre quantité, & qui eſt pourtant une ſubſtance qui, par ſa nature, diffère entièrement du corps qui en eſt imbibé: car elle peut en être ſéparée & extraite en diverſes manieres, & préſentée dans ſa pureté originaire, comme une ſubſtance à part tout-à-fait ſinguliere, qui ainſi extraite peut être employée à teindre d'autres corps, principalement dans la prâtique de l'art de la teinture.

L'Académie donc, pour bien déterminer la claſſe, à laquelle toutes les matières propres à teindre appartiennent, pour ſuffiſamment établir & définir avec préciſion les genres, s'il en exiſte, de toutes les couleurs chymiques ou pigmens, propoſe les queſtions ſuivantes.

I. Démontrer par des raiſons ſolides & par des argumens inconteſtables, quelles ſont, entre les couleurs chymiques, les plus ſimples, ou les primitives, & quelles ſont

les couleurs ſécondaires, produites par des diverſes combinaiſons des couleurs primitives?

II. Déterminer par des expériences analytiques, & s'il ſe peut, par des expériences ſynthétiques, claires & non compliquées, quels ſont, en général, les principes conſtitutifs des couleurs chymiques, ſimples ou primitives, & quelles ſont les principales différences eſſentielles qui ſe trouvent entr'elles?

III. Examiner par rapport au regne de la nature, d'où ſont priſes les couleurs chymiques, en quoi elles diffèrent des couleurs ſemblables priſes d'un autre regne, ſi c'eſt dans tout le genre, ou ſi c'eſt dans la ſeule eſpèce? Au dernier cas l'Académie ſouhaite que toutes les couleurs connues, tirées des trois regnes de la nature, ſoient réduites dans un ordre ſyſtématique, en rapportant chacune à des genres certains, & en ayant égard à leur mélange chymique?

L'Académie attendra la ſolution de ce problême juſqu'à la fin de l'année, & prononcera ſon jugement en 1795. Il n'eſt pas beſoin de répéter ici les conditions ordinaires requiſes dans l'envoi des pieces, on les trouve détaillées dans tous les programmes que l'Académie publie annuellement, & dont pluſieurs ont déja été inſérés dans les volumes précédens de ſes Actes.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw ayant par ſon économie épargné une ſomme très conſidérable, elle ſupplia S. M. l'Impératrice de vouloir bien lui accorder la permiſſion d'en placer au Lombard un fond perpétuel de trente mille roubles, dont elle propoſe d'employer les intérêts en faveur

faveur des Serviteurs les plus affidûs de l'Académie, en leur donnant des penſions, quand, ou par vieilleſſe ou par des maladies, ils ne ſeront plus en état de ſervir: Que ces penſions ne ſoyent accordées qu'aux perſonnes qui ont joui de 400 roubles de gage ou moins, & qui ont ſervi l'Académie 30 ans ou plus: enfin que la ſomme totale des intérêts du fond perpétuel ſoit diſtribuée entre 22 tels penſionnaires, dont deux recevront 150 roubles, deux autres 120, deûx 90, quatre 70, quatre 50, quatre 40 & encore quatre 35 roubles chacun par an.

S. M. l'Impératrice en approuvant gracieuſement ce plan, y fit la réponſe ſuivante:

Княгиня Катерина Романовна. Изъ представленнаго отъ васъ доклада объ Экономической суммѣ по *Имлераторской* Академіи Наукъ, видимъ Мы съ удовольствіемъ, что стараніемъ и попеченіемъ вашимъ умножена оная до такого количества, что достаточно не только на обыкновенные расходы, но и къ составленію капитала, отъ коего прибыль можетъ назначена быть на пенсіи людямъ. которые продолжая при Академіи долговремянную безпорочную службу, по старости и болѣзнямъ принуждены будутъ оставить оную. Въ слѣдствіе чего отдавая справедливость ревностнымъ трудамъ вашимъ и доброму по части вамъ ввѣренной хозяйству, повелѣваемъ вамъ, *первое*: изъ на-

Princeſſe Cathérine Romanovna. Par le rapport que vous NOUS avez préſenté ſur la ſomme économique de l'Académie Impériale des Sciences, NOUS voyons avec plaiſir, que par votre zèle & vos ſoins, elle eſt accrue à une telle quantité, qu'elle eſt ſuffiſante non ſeulement pour les dépenſes ordinaires, mais encore pour en former un fond, dont les intérêts peuvent être employés à des penſions aux perſonnes qui, après avoir ſervi long-temps & affidument l'Académie, ſeront obligées à la quitter ou par vieilleſſe ou par des maladies. En vertu de

личныхъ Экономическихъ денегъ, отдать въ вѣчной капиталъ въ ломбардъ тритцать тысячь рублей, съ полученіемъ установленныхъ пяти процентовъ; *второе*, сихъ процентныхъ денегъ не употреблять ни на что иное, какъ единственно на пенсіоны; *третіе*, пенсіонную сумму, составляющую тысячу пять сотъ рублей раздѣлить на дватцать на два человѣка, а имянно: двумъ по сту по пятидесяти рублей, двумъ по сту по дватцати рублей, двумъ по девяносту рублей, четыремъ по семидесяти рублей, четыремъ по пятидесяти рублей, четыремъ по сороку рублей, и четыремъ по тритцати по пяти рублей; *четвертое*, къ полученію пенсіона изъ сей суммы не могутъ полагаться тѣ, которые съ выше четырехъ сотъ рублей жалованье имѣютъ; поступающіе же на пенсіонъ должны выслужить при Академіи тритцать лѣтъ. Пребываемъ въ прочемъ вамъ благосклонны.

Напоплинномъ подписано собственною ЕЯ ИМПЕРАТОРСКАГО ВЕЛИЧЕСТВА рукою такo:

ЕКАТЕРИНА.

de quoi, en rendant juſtice à vos peines ſoigneuſes & à la bonne économie dans l'adminiſtration qu'on vous a confiée, NOUS ordonnons 1.) Qu'on dépoſe au Lombard en fond perpétuel les trente mille roubles de la ſomme économique exiſtente, pour en retirer les intérêts de 5 p. C. fixés. 2.) Qu'on n'employe ces intérêts à autre choſe que pour des penſions. 3.) Que la ſomme de ces penſions, qui eſt de 1500 Roubles, ſoit diſtribuée entre 22 perſonnes, dont deux en auront chacune 150 roubles, deux chacune 120 roubles, deux chacune 90 roubles, quatre chacune 70 roubles, quatre chacune 50 roubles, quatre chacune 40 roubles & encore quatre chacune 35 roubles. 4.) Que ceux qui reçoivent plus de 400 roubles d'appointemens ne peuvent point aſpirer à ces penſions, & que tous ces penſionnaires doivent avoir ſervi l'Académie trente ans.

L'original eſt ſigné

CATHÉRINE.

à St. Pétersbourg, le 21 Mars, 1791.

Le

Le cabinet minéralogique de l'Académie a été conſidérablement augmenté cette année-ci par l'emplette que Madame la Princeſſe de Daſchkaw a faite d'une collection choiſie de minéraux que M. le Conſeiller de Cour Baſile Ghwoſtof avoit apportée de Sibérie. Mrs. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski, le Surintendant des mines de Renovance & l'Académicien Sewergyne ayant été chargés de recevoir cette collection, d'après un catalogue, & de la faire transporter au Muſée, ils rapportèrent à la ſéance académique du 19 Septembre, qu'elle contenoit 130 minérais d'or, 350 d'argent, 534 de cuivre, 302 de plomb, & en outre un grand nombre de doublettes en cinq caiſſes, dont le catalogue n'a pas encore été fait.

Les autres acquiſitions moins conſidérables que l'Académie a faites dans le cours de cette année ſe trouvent indiquées ci-après dans l'extrait de ſes régiſtres.

Mrs. les Académiciens & Conſeillers de Cour Kotelnikof, Ozeretskovski & Sokolof ont continué de donner, pendant les mois d'été, des cours publics en langue ruſſe. Le premier, M. Kotelnikof, a enſeigné les mathématiques, le ſecond, M. Ozeretskovski l'hiſtoire naturelle, & le troiſieme, M. Socolof, la chymie expérimentale.

L'Académie à publié dans le courant de cette année les ouvrages ſuivans:

Mémoire ſur la nature des fonctions arbitraires. Par M. Arbogaſt, qui a remporté le Prix propoſé par l'Académie en 1787.

De functionibus arbitrariis Calculi integralis. Diſſertatio quae Acad. Imp. Sc. Judicio ſubmiſſa proximos praemio honores tulit. Auct. Antonio de Lorgna.

Relation des voyages de M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski aux environs des lacs de Ladoga & d'Onega: Путешествїе г. Академика Озерецковскаго по озерамъ Ладожскому и Онежскому.

Le ſeptieme volume de l'ancienne Bibliotheque ruſſe: Продолженїе древней Россїиской Библїоѳики.

Le ſeptieme volume des annales du R. P. Nicon: Руская Лѣтопись по Никоновскому списку.

Le ſeptieme volume de la collection des articles divers, qui ont été imprimés dans les différentes fortes d'almanachs que l'Académie publie: Собранїе сочиненїй выбранныхъ изъ Мѣсяцослововъ на разные годы.

Le ſixieme & le ſeptieme Tome de l'Hiſtoire de Ruſſie par le Prince de Stscherbatov: Исторїя россїйская отъ древнѣйшихъ временъ.

Hiſtoire de la ville d'Archangel: Краткая исторїя о городѣ Архангельскомъ.

Et pluſieurs autres ouvrages & traductions pour l'inſtruction & l'utilité de la nation.

Le 31 Madame la Princeſſe de Daſchkaw augmenta les appointemens de Mrs. les Adjoints Kononof, Sewergyne & Zacharef, de quarante roubles roubles par an à chacun.

M.

M. l'Adjoint Sewergyne ayant fait & publié une traduction ruſſe de la Minéralogie de M. Kirwan, Madame la Princeſſe de Daſchkaw lui a fait obtenir de Sa Majeſté l'Impératrice une belle tabatiere d'or avec cent ducats de recompenſe.

L'Académie perdit en cette année cinq aſſociés, que nous allons indiquer ici ſuivant l'ordre chronologique, dans lequel ils ſont morts.

M. Joſeph Gärtner Docteur en Medécine & ancien membre de l'Académie, qui l'avoit engagé en 1768 pour la partie de l'hiſtoire naturelle: il quitta l'Académie en 1773 & ſe rétira en ſa patrie, qui eſt le Duché de Würtemberg, où après avoir vecu en vrai Philoſophe il décéda à Calb le 3 de Juin dans la 59e année de ſon âge.

M. Ignace de Born, Gentil-homme du St. Empire Romain & Conſeiller actuel des mines & de monnoyes de Leurs Majeſtés Impériale & Royale à Vienne. Il fut reçu au nombre des Aſſociés externes le 29 Décembre 1776, & il mourut à Vienne le 13 Juillet, dans ſa 49e année.

S. A. Msgr. le Prince Potemkin-Tawritſcheski, Marechal-Général, Senateur, Commandeur en Chef de la Cavallerie légére, réguliere & irréguliere, de la Flotte ſur la mer noire, Préſident du Collège de Guerre, Gouverneur-Général de Cathérinoslaw, de la Tauride & de Charkow. Aide-de-camp Général de Sa Majéſte l'Impératrice, Chef du Corps des Chevaliers-Gardes & du Régiment de Curaſſiers de Cathérinoslaw, Lieutenant-Colonel du Régiment de la Garde de Preobragenski, Chambellan actuel, Inſpecteur

teur Général de l'Armée, Directeur du Gymnase pour les étrangers de la confession Grècque & de l'ancien Arsenal de Moscou. Commandeur Grand-Croix de l'orde militaire de St. Géorge & Chevalier des ordres de St. André, St. Alexandre-Nevski, St. Vladimer de la 1re Classe, de l'Aigle noir de Prusse, de l'Aigle blanc & de St. Stanislaus de Pologne, de l'ordre royal Danois de l'Élephant, de Se Anne de Holstein &c. L'Académie le reçut au nombre de ses Honoraires le 29 Décembre 1776 & il mourut le 5 Octobre en route entre Jassy & Otschakov.

M. Henri Fréderic Delius, Docteur en Médecine. Noble du St. Empire & Comte Palatin. Préfident de l'Académie Impériale des Curieux de la Nature, Conseiller Privé & Médecin de S. M. Impériale & Royale, Professeur ordinaire en Médecine à Erlangen. Il fut reçu au nombre des Externes le 3 de Mars de cette année & mourut le 11 Octobre à Erlangen dans sa 72 année.

M. Alexandre Karamyschef, Conseiller de Colléges & Directeur de la Banque d'assignations à Irkoutzk', Chevalier de l'orde de St. Vladimir de la 4e Classe. L'Académie le reçut au nombre de ses Correspondans-regnicoles en 1779 le 21 Juin. Il mourut le 22 Novembre.

Le 3 de Mars. L'Académie reçut à la propofition de S. E. Madame la Princesse Daschkaw.

Au nombre des Associés externes:

I. M. le Baron Joseph de Mohrenheim, Docteur en Médecine & Chirurgie, Conseiller de Cour, Operateur &

& Oculiſte de Sa Majéſti l'Impératrice & Médecin accoucheur de *Son Alteſſe Impériale* Madame le Grande-Ducheſſe *Marie Fedorovna.*

II. M. Henri Fréderic Delius, Docteur en médecine: mort huit mois aprés ſa réception. Voyez ci-deſſus.

Le 22 Août, l'Académie reçut conformement à la propoſition de Madame la Princeſſe de Daſchkaw au nombre de ſes Correſpondans étrangers.

III. M. Antoine Hyacinthe d'Araujo, Profeſſeur de langues à Lisbonne: Et enfin le 20 Octobre.

IV. M. Arbogaſt, Profeſſeur de Mathématiques & Principal du Collège d'Artillerie à Strasbourg: pareillement au nombre des Correſpondans étrangers.

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS, PRODUCTIONS DE LA NATURE ET DE L'ART, ANTIQUITÉS ET CURIOSITÉS,

préſentés ou communiqués à l'Académie, l'année 1791.

Le 10 Janvier. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a préſenté un exemplaire relié de начальныя основанія Естественной Исторіи, qui eſt une traduction ruſſe qu'il a faite de l'Hiſtoire naturelle de M. Leske, avec des changemens & des additions; imprimée en deux volumes in 8vo avec un volume de figures enluminées.

—— —— Le même a communiqué l'extrait d'une lettre de M. Boghdanof, Commandant de la fortereſſe de Biysk dans le Gouvernement de Kolyvan, datée du 12 Novembre 1790, qui donne une notice de la terre nitreuſe qui ſe trouve dans ces contrées & de la maniere dont ſe ſervent les Calmouques pour la raffiner & en préparer de la poudre à canon. Voyez ci-après.

Le 13 Janvier. M. l'Adjoint Lowitz a préſenté *Anzeige eines neuen Mittels Waſſer auf Seereiſen vor dem Verderben zu bewahren, und faules Waſſer wieder trinkbar zu machen*, 23 pages in 8vo, que la Société libre économique a fait imprimer, pour répandre cette connoiſſance utile & importante dans le public.

S. A.

S. A. Madame la Princeſſe de Daſchkaw, dirigeant l'Académie, ayant déſiré que Mrs. les Académiciens lui indiquaſſent le moyen de conſtruire quelque part à l'Académie un établiſſement ſtable, pour pouvoir y obſerver régulierement les variations de la déclinaiſon de l'aiguille aimantée: obſervations qu'on avoit négligé de faire déja depuis pluſieurs années, parce qu'anciennement on avoit trouvé que ces variations étoient inſenſibles ou presque nulles, Mrs. les Académiciens réſolurent de répondre à Madame la Princeſſe que le moyen le plus ſimple de parvenir à ce but ſeroit d'établir hors d'une croiſée de la maiſon académique, où le Secrétaire M. Jean Albert Euler demeure, une table de marbre, ſoutenue par des conſoles de pierre qui entrent en partie dans la muraille, & de tirer ſur cette table une ligne méridienne, pour y appliquer l'inſtrument de déclinaiſon, en faiſant attention de n'y employer point de fer & d'éloigner même tout le fer qui ſe trouve dans le voiſinage de la fenêtre, en la garniſſant des chaſſis & des véroux de cuivre, pourqu'on fut ſûr que rien d'étranger ne puiſſe influer ſur la marche de l'aiguille aimantée: que toutes ces précautions bien obſervées le Secrétaire qui également eſt chargé de faire les obſervations météorologiques, pourra faire auſſi celles de la déclinaiſon magnétique. Madame la Princeſſe de Daſchkaw ayant approuvé ce projet, elle en ordonna l'exécution.

Le 17 Janvier. M. le Prof. Géorgi a lu une lettre de M. le Prof. Tychſen à M. le Conſeiller d'Etât Baron d'Aſch datée de Göttingue le 1 Octobre 1790. M. Tychſen ayant publié *commentationes de orientalibus in Bibliotheca regia Göttingenſi adſervatis*, déſire d'obtenir auſſi de l'Aca-

l'Académie une déſcription des monnoies orientales qui ſe trouvent dans le cabinet Impérial. L'Académie en fit rapport à Madame la Princeſſe de Daſchkaw, & M. Tychſen eut pour réponſe qu'il devoit s'addreſſer directement à l'Intendant de ce cabinet.

Le 20 Janvier. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'auteur M. le Baron de Wiſe, Grand-Maître de la maiſon du feu Prince Charles de Saxe à Dresde: *Théorie de la diviſion harmonique des cordes vibrantes.* Ouvrage manuſcrit dédié au ſéreniſſime Electeur de Saxe.

Le 24 Janvier. M. l'Académicien Zouyef a donné pour le Muſée académique un échantillon de la pierre dont ſont conſtruits les catacombes à Kiew, & du Sable blanc qui s'y trouve en couches: il y a auſſi joint un plan gravé de ces catacombes, pour ſervir au journal des voyages du défunt Académicien Güldenſtädt: où il en eſt fait mention.

Le 27 Janvier. Le même a remis pour être conſervé dans l'Herbier académique, un exemplaire du *Lycopodium Alopecuroides* de Mohilev dans la Ruſſie blanche.

Le 31 Janvier. M. l'Adjoint Kononof a remis un extrait en langue ruſſe d'un imprimé anglois de M. Churchman intitulé: *An Explanation of the Magnetic Atlas or variation chart. Philadelphia 1790,* que Madame la Princeſſe avoit communiqué à Mrs. les Académiciens, pendant les dernieres vacances, pour l'examiner & en rapporter leur ſentiment. M. Churchman y donne des tables & expoſe une méthode de déterminer, pour un temps propoſé & un lieu donné quelconque, la déclinaiſon de l'aiguille magnétique.

Il

Il s'agiſſoit donc d'examiner ſi cet écrit ne ſatisfait pas à la queſtion que Madame la Princeſſe avoit choiſie pour le prix académique de 1793, & ſi par conſéquent il ne rend pas la publication de cette queſtion ſuperflue? Mrs. les Académiciens répondirent, qu'ayant trouvé que le mouvement périodique des deux poles magnétiques de la Terre, ſur lequel ſont dreſſés les tables & la carte magnétique de M. Churchman, n'eſt fondé que ſur des obſervations faites en 1657 & 1790, & que ce mouvement en a même été déterminé par un calcul fort léger & ſujet à caution, leur avis unanime étoit que la méthode de M. Churchman ne peut point obliger l'Académie à ſupprimer ſa queſtion; enſorte que rien ne doit plus empecher la publication du nouveau Programme des prix.

Le 7 Février. M. le Conſeiller de Collèges & Chevalier Pallas a rapporté qu'il a remis à M. le Conſeiller de Cour Lepechin pour le jardin botanique pluſieurs ſemences que lui avoit données M. le Conſeiller de Cour Laxmann, nouvellement arrivé d'Irkoutzk.

M. le Prof. Wolff a fait voir un monſtre humain, dont le viſage eſt imparfait, ainſi que les extrémités. M. le Conſeiller d'État Baron d'Aſch ayant reçu nouvellement ce monſtre de Toula, le lui a remis pour être conſervé au Muſée académique.

M. le Prof. Géorgi a remis pour la Bibliotheque la continuation des Annales chymiques de M. Crell: *Crells chymiſche Annalen* A. 1789, Vol. II. A. 1790. Vol. I. *Beyträge zu den Annalen, des IV Bandes 2 und 3tes Stück*, pour leſquelles l'Académie a ſouſcrit.

Le 10 Février. M. l'Adjoint Lowitz a exposé une phiole de son acide de vinaigre concentré jusqu'à la cryſtalliſation. Voyez son mémoire inséré au VII Volume des nouveaux Actes pag. 330.

M. le Prof. Géorgi a remis pour la Bibliotheque académique: *Beobachtungen über die Harzgebirge von Georg Otto Sigismund Laſius, Königl. Groſsbrittaniſchen Ingenieur-Lieutenant. II Theile in 8°*; avec une carte pétrographique des montagnes du Harz, supérieurement bien gravée.

Le Secrétaire a remis & distribué le nouveau programme des Prix proposés par l'Académie pour les années 1792 & 1793.

Le 3 Mars. M. l'Adjoint Lowitz a remis pour la Bibliotheque académique, un exemplaire de la traduction russe que la Société libre économique a publiée de sa méthode de rendre potable l'eau croupie, & de conserver celle qui ne l'est pas encore: Показаніе Новаго средства какъ воду въ время путешественная и. п.

Le Secrétaire a présenté de la part de M. l'Académicien Bode de Berlin deux exemplaires de ses éphémerides astronomiques pour l'année 179?, publiés en allemand, dont l'un a été remis à la Bibliotheque & l'autre à l'Observatoire astronomique.

Le 7 Mars. Le Secrétaire a lu une lettre de S. M. le Roi Fréderic Guillaume II. de Prusse, datée de Berlin du 23 Février, qui remercie l'Académie dans des termes très gra-

gracieux, de l'envoi quelle Lui a fait du Tome VIe des nouveaux Actes.

Le même a lu une lettre de S. E. Mr. le Prince Demetrius de Golitzin, Honoraire de l'Académie, datée de la Haye le 15 Février, qui communique les découvertes les plus nouvelles faités en Chymie, telles que la fonte de la Platina en régule, obtenue ſans addition en $\frac{1}{4}$ heure: de même que celle de la Molybdene, du Tunſtein, & de la Manganeſe, également en régule, par le charbon pur & ſans flux: enſuite la reduction de la terre peſante, du ſel d'Epſom & de la terre calcaire, en régules métalliques, operées par Mrs. Ruprecht & Tordy. Voyez ci-après. Pag. 31.

Le 10 Mars. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a remis un échantillon du nître raffiné, dont il a été fait mention ci deſſûs le 10 Janvier.

Le 14 Mars. S. A. Madame la Princeſſe Daſchkaw a envoyé par ordre de S. M. l'Impératrice une grande & précieuſe piece de bois pétrifié & agathiſé qu'on a trouvée dans le Gouvernement de Perme & dont Sa Majeſté fait préſent au cabinet académique.

Le Secrétaire a expoſé de la part de M. le Conſeiller de Cour Hermann pour être dépoſé au cabinet académique, un corail entier pétrifié dans une pierre calcaire, qu'il a trouvée dans les montagnes d'Oural à une hauteur aſſés conſidérable.

M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a préſenté de la part de M. Kreſtinin, Correſpondant penſionaire de

l'Académie à Archangel, une hiſtoire de la ville d'Archangel raccourcie d'après les remarques que lui avoient fournies Mrs. les Académiciens: Краткая исторія о городѣ Архангельскомъ, imprimée ſeparément in 8vo.

Le 28 Mars. M. L'Adjoint Lowitz a repété & fait voir à l'Académie les nouvelles expériences de M. Weſtrumb ſur l'inflammation des demi-métaux & de l'eſprit du ſel ammoniac cauſtique dans l'acide du ſel déphlogiſté. M. Lowitz employa le Régule d'Antimoine & le Cinnabre, & ces expériences réuſſirent à la ſatisfaction de tous les Académiciens.

Le 31 Mars. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a communiqué & lu une lettre de M. Boghdanof, Premier Major & Commandant de Biysk, ville dans le Gouvernement de Kolyvan, qui envoie des échantillons des trois eſpeces de ſel qu'on trouve dans ces contrées. L'étendue eſt environ de deux verſtes, dont la ſurface eſt couverte d'un ſel de Sibérie trés blanc & clair, au deſſous ſe trouve une couche de terre limoneuſe & argilleuſe épaiſſe de 4 verſchocs & ſous celle-ci une autre d'un ſel ſemblable à la glace & dont l'épaiſſeur ſurpaſſe une archine. La troiſieme eſpèce de ſel eſt moins pur.

Le 25 Avril. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a préſenté

I.) de la part de M. Fomin, Négociant & Directeur des écoles publiques à Archangel, pour être inſéré dans les Новыя ежемѣсячныя сочиненія, une deuxieme continuation de ſon hiſtoire des animaux marins de la

la mer blanche: Продолженïе опыта Историческаго о морскихъ звѣряхъ и рыбахъ. Cette continuation contient la déſcription des baleines & de leur pêche.

II.) De la part de M. Kreſtinin, pour la Bibliotheque ancienne ruſſe une copie de l'Oucaſe du Tsar Alexei Michailovitz, qui défend l'uſage du Tabac.

Le 28 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Martinovich Profeſſeur à Leopol & datée du 10 Avril. M. Martinovitſch envoie pour être inſéré dans les Actes: *Diſſertatio de nonnullis inſignioribus circuli proprietatibus*, & déſire d'être agrée par l'Académie au nombre de ſes aſſociés étrangers. Comme cette Diſſertation contient la réfutation d'une prétendue quadrature de cercle, & que d'ailleurs on n'y trouve aucune propoſition nouvelle & remarquable du cercle, comme le tître paroit le promettre, la lettre de M. Martinovitſch reſta ſans réponſe, & ſon mémoire fut mis de rebut.

Le 2 Mai. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Bode, Académicien de Berlin, datée du 29 Avril, qui contient diverſes nouveautés aſtronomiques.

Le 5 Mai. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. Comparetti, Profeſſeur à Padoue: *Obſervationes anatomicae de aure interna comparata.* 4to Patavii 1789.

M. l'Académicien Fuſs a préſenté & lu le Sommaire des obſervations météorologiques de l'année paſſée faites à Ouſtiug véliki par M. le Chirurgien Major Fries, Correſpondant de l'Académie.

M. le Conſeiller de Colleges & Chevalier Pallas a remis de la part de l'auteur, pour être dépoſé à la Bibliotheque académique: *Auctarium ad Floram Pedemontanam, Auctore Carolo Allionio.*

Le 12 Mai. M. l'Adjoint Lowitz a annonçé préalablement, qu'il a trouvé moyen de décompoſer le vinaigre concentré glacial en deux acides très différens entr'eux dans leur ſubſtance, dont l'un ſe cryſtalliſe, & l'autre, qui ne le fait pas, attire à ſoi l'humidité de l'air. Il ſe propoſe de pouſſer cette recherche plus en détail & d'en rapporter à l'Académie les réſultats. En attendant, ayant appris par les papiers publics que M. Weſtrumb ait le premier découvert une pareille décompoſition de l'acide végétal en acides phosphorique & aërien, ſans en avoir indiqué cependant la méthode de procéder, il a cru ne devoir pas différer de communiquer ſa découverte à l'Académie, pour qu'elle la faſſe enrégiſtrer dans ſon Journal.

M. le Prof. Fuſs a préſenté, pour être dépoſé à la Bibliotheque académique, ſes Leçons d'Algèbre à l'uſage du Corps Impérial des Cadets nobles, tirées des élémens d'Algèbre de feu M. Euler & imprimées au dit Corps, in 8vo.

—— —— Le même a remis de la part de M. le Chirurgien Major Fries, pour être conſervé au cabinet d'Hiſtoire naturelle une oye monſtrueuſe ayant quatre pâttes.

Le 19 Mai. M. le Prof. Krafft a préſenté de la part de M. Pasquich, Profeſſeur des Mathématiques à Peſt en Hongrie deux mémoires manuſcripts intitulés le premier: *Succincta expoſitio elementorum calculi ſublimioris* & l'autre: *Entwurff einer neuen Exponential Rechnung.*

Le

Le 26 Mai. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de l'auteur, pour être dépoſé à la Bibliotheque académique : *Diſſertation ſur le Thermomètre de Réaumur par M. Gauſſen, des Académies de Montpellier, Toulouſe, Stockholm &c.* un volume in 8vo imprimé à Béziers 1789.

Le 6 Juin. M. l'Adjoint Lowitz a rapporté qu'il a eſſayé de vérifier la découverte de quelques chymiſtes, qui prétendent avoir trouvé des vrais régules métalliques dans pluſieurs terres: qu'il a choiſi celle du ſel d'Epſom, qui ſuivant cette nouvelle découverte en dévoit contenir, mais que l'ayant ſoumis à un examen ſcrupuleux, il n'y a trouvé le moindre veſtige métallique, qu'il croit en conſéquence pouvoir ſoutenir avec vraiſemblence, que tous ces grains de régule que les nouveaux chymiſtes ont obtenus ne ſont que des particules du fer phosphorique qui avoient été intimement liées avec la matiere du creuſet & qui enſuite en ont été détâchées par la véhémence du feu. Voyez ci-après. Pag. 32.

Le 13 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de M. van Marum, datée de Harlem le 29 Mai, qui envoie un exemplaire de ſa lettre à M. Jean Ingenhouſz, Médecin du Corps de S. M. l'Empereur Romain, contenant la déſcription d'une machine électrique, d'une conſtruction toute nouvelle & fort ſimple qui réunit pluſieurs avantages ſur les machines ordinaires, avec trois planches de figures. M. van Marum emploie principalement un méchanisme nouveau & ingénieux pour faire communiquer le conducteur iſolé tantôt avec la ſurface du verre frotté ce qui donne une électricité poſitive, tantôt avec le frottoir, qui le rend negativement électrique.

Le

Le 13 Juin. Le Secrétaire a remis l'annonce d'un ouvrage de M. le Secrétaire Provincial Ahnert à Dorpat, intitulé: *Grundſätze der Macht und Glückſeligkeit der Staaten in Rückſicht auf Reichthum und Bevölkerung*, propoſé par ſouscription.

Le 4 Juillet. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Brigadier de Lorgna, datée de Verone le 24 Mai, qui s'annonce comme Auteur du mémoire ſur les fonctions arbitraires qui a obtenu les honneurs de l'acceſſit. Ce mémoire ſe trouve imprimé à la ſuite de la piece victorieuſe ſur le même ſujet envoyé par M. le Profeſſeur Arbogaſt.

Le 6 Juillet. Le Secrétaire a lu une lettre de M. de la Lande, datée de Paris le 20 Juin, qui rapporte diverſes nouveautés littéraires.

Le 11 Juillet. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Intendant des mines, Lieutenant Colonel & Chevalier de Renovanz, pour être dépoſé au cabinet académique, ſept pieces de minéraux des monts Altaï, que l'Académie ne poſſède pas encore, avec une notice de leur contenu & leur lieu natal.

M. l'Académicien Géorgi a remis pour la Bibliothèque la Continuation des annales chymiques du Conſeiller des mines Crell ſavoir: *Crells chemiſche Annalen* dernier ſemeſtre de 1790. les deux premiers mois de 1791, & la 4e partie du 4e volume des Supplemens: *Beyträge zu den Annalen.*

Le 18 Août. S. E. Mr. le Comte Jwan Czerniſchef, Amiral & Vice-Préſident du Collège de l'Amirauté, a envoyé

voyé pour le Cabinet d'Hiſtoire naturelle une variété rare de Севрюга (Sevriouga, *Accipenſer ſtellatus*), avec une petite notice que M. le Comte a reçu du Capitaine de la flotte Impériale, M. le Général Major Schiskin à Aſtrachan, où ce poiſſon a été pris. Voiez ci-après pag. 35.

M. le Prof. Géorgi a remis de la part de M. le Conſeiller d'Etat & Chevalier Kelchen, Chirurgien du Corps de S. M. l'Impératrice, quelques ornemens antiques en cuivre jaune, trouvés ſous terre, à Droſtenhof, en Livonie, dans le cercle de Venden, avec le ſquelette d'un homme extraordinairement grand. L'Académie a reçu ce préſent avec remercimens & l'a fait dépoſer dans ſon cabinet de curioſités.

Le 22 Août. M. le Conſeiller de Cour Inohodzof a préſenté la continuation de ſa déſcription des villes & du Gouvernement de Wologhda: Продолженїе описанїя городовъ Вологодскаго Намѣстничества, qui a été inſérée dans le Calendrier hiſtorique de 1792.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Prof. Wilke, datée de Stockholm le 17 Juin, qui envoie de la part de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm, dont il eſt le Secrétaire, les mémoires de cette Académie depuis 1788 jusqu'au premier trimeſtre de 1791 incluſivement: *Kongl. Vetenskap Academiens nya Handlingar. Tom. IX. X. XI.* Ce préſent a été reçu avec reconnoiſſance & dépoſé à la Bibliotheque académique.

Le 25 Août. La Chancellerie a envoyé pour la Bibliothéque académique, de la part de l'Univerſité Impériale de Moscou, les discours qui y ont été prononcés à l'occa-

ſion de l'anniverſaire de Sa Majeſté Impériale au throne le 22 Juin. Le premier de ces discours a pour tître: Слово о началѣ и успѣхахъ Наукъ, и въ особенности Естественной Исторіи c. à d. Discours ſur l'origine & les progrès des Sciences & de l'hiſtoire naturelle en particulier; par M. Antonski, Prof. d'Hiſtoire naturelle. Le ſecond: *De Electricitatis in Medicina dignitate*; par M. Pfaehler, Docteur en Medécine.

Le 1 Septembre. M. le Conſeiller de Cour Socolof a remis pour être inſéré au Calendrier hiſtorique de 1792. Описанїе горы Чеконды на Китайской границѣ: c. à d. Deſcription du mont Tſchekon ſur la frontiere de la Chine.

M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a remis pour le Cabinet des Curioſités quelques feuilles d'un papier à écrire, fait d'une eſpèce de conferve ou byſſe, qui ſurnage en grande quantité à la ſurface des eaux, & qu'un habitant de Tobolsk a employée avec ſucces pour en fabriquer du papier, eſpérant de pouvoir en faire encore qui ſoit d'une meilleure qualite.

Le 5 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part du Collège Illuſtre à Anſpach quatre discours qui y ont été prononcés à des occaſions ſolemnelles en 1789 & 1790. I. *Ueber einige Vorzüge der öffentlichen und beſonders wiſſenſchaftlichen vor der blos häuslichen Erziehung, von Hrn Martini.* II. *Obſervationes miscellae in Herodotum. Auct. Degen.* III. *Ueber die Conſtructions-Lehre im Allgemeinen, von Hrn. Glandorff.* IV. *Ueber den Karakter des jüngern Plinius, von Hrn. Schäfer.* Ces discours ont été dépoſés à la Bibliothéque du Gymnaſe académique.

Le

Le 5 Septembre. Le même a remis le Programme des prix propoſés par la Société Hollandoiſe des ſciences, établie à Harlem, pour l'année 1791, qui lui avoit été adreſſé par M. van der Aa, Secrétaire de cette Société.

Le 12 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'auteur, M. Jean-Jerome Schroeter, Grand Baillif de Lilienthal près de Bremen: *Selenotopographiſche Fragmente zur genauen Kenntniſs der Mondfläche*, in 4to, avec 43 planches ſupérieurement bien gravées. Cet ouvrage a été accueilli avec remercimens & dépoſé à la Bibliothéque académique.

M. le Conſeiller de Collèges Roumovski a lu une lettre de M. Piazzi, Aſtronome à Palermo en Sicile, datée du 20 Juin, qui entame un commerce littéraire, qu'il s'offre d'entretenir avec l'Académie, en lui communiquant une notice de ſon obſervatoire aſtronomique & des inſtrumens qui y ſont, ainſi que des dernieres obſervations qu'il y a faites.

Le 19 Septembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé avec le catalogue, une collection de 22 diverſes pieces venues du Japon, qui avoient été préſentées à l'Impératrice & dont Sa Majeſté a très-gracieuſement fait préſent au Cabinet de curioſités de l'Académie. Cette collection conſiſte en dix livres manuſcrits, en deux écritoires, une ſonnette, un évantail, un gobelet, une eſpèce de roſaire, une aſſignation, & cinq diverſes ſortes de monnoyes d'or, d'argent & de cuivre.

Le Secrétaire a remis une continuation du Journal allemand publié à Berlin par le libraire M. Nicolaï. *All-*

gemeine deutſche Bibliothek 94 bis 100 Band incl. *Anhang zu dem 53 bis 86 Band 4te Abtheilung*, en tout 15 volumes.

Le 29 Septembre. Le Secrétaire a préſenté & diſtribué de la part de S. E. Mr. le Prince Demetrius de Golitzin, réſident à la Haye, pluſieurs exemplaires de ſes lettres ſur quelques objets de Minéralogie, addreſſées à Mrs. les Profeſſeurs Pierre Camper & George Forſter, pour ſervir de ſeconde partie à celle dont il a été fait mention ci-deſſus le 7 Mars.

Le 6 Octobre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé par ordre de Sa Majeſté l'Impératrice, pour être dépoſé à la Bibliotheque de l'Académie, les deux ouvrages proprement réliés ſuivans. I. *Adami Franc. Kollarii ad Petri Lambecii Commentariorum de Auguſta Bibliotheca Caeſ. Vindobonenſis libros VIII, Supplementorum liber primus poſthumus. Vindobonae 1790*, in folio. II. *Vera felicitas, ſive fundamentum omnis religionis. Graece & latine. Authore Athanaſio Petri de Pſalida Joanninenſi ex Epiro. Tom. I. Viennae 1791.* in 8vo.

Le 10 Octobre. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a communiqué une lettre fort intereſſante, que lui venoit d'adreſſer M. Kreſtinin, citoien d'Archangel ſur les anciens contracts de ventes & de propriétés de Terre du XIV ſiecle, dont il lui envoie ſept en original. Cette lettre a été inſérée dans le Journal académique ruſſe: Новыя Ежемѣсячныя сочиненїи, & les contracts originaux ont enſuite été dépoſés à la Bibliothèque de l'Académie.

M. le Sous-Intendant du Muſée académique Buſſe a envoyé un catalogue de pluſieurs objets d'hiſtoire naturelle &

& d'autres curiosités, venues de Portugal, que Sa Majesté a ordonné de faire transporter à l'Académie pour y être déposées.

Le 20 Octobre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour la Bibliothèque académique un volume rélié in 4to & intitulé *Analysis aequationum; Auctore Guill. Hales, D. D. Coll. A. Trinitatis Dublin. Socio.*

Le 24 Octobre. Madame la Princesse de Daschkaw a fait exposer une plante aquatique qui croit aux environs de St. Pétersbourg, & que plusieurs Physiciens ont crû n'être pas indigène. C'est *Uva pruniformis Lin.* dont M. le Prof. Géorgi fait mention dans sa déscription de St. Pétersbourg & de ses environs, au Tome II. pag. 523, de la 1ere édition en allemand.

M. le Conseiller de Cour Kotelnikof a fait voir un embryon d'un élephant conservé dans de l'esprit de vin, que Madame la Princesse de Daschkav venoit d'acheter pour le Cabinet de l'Académie.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. Jules de Bojamonti à Spalatro en Dalmatie, qui envoie l'éloge du célébre Abbé Boscowich, associé externe mort en 1787.

Le 7 Novembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour la Bibliotheque académique le 1. Tome de la traduction russe de l'ami des enfans par M. Weisse: Дѣтской Собесѣдникъ.

M. l'Adjoint Sewergyne a présenté, pour être déposé à la Bibliotheque académique, sa traduction russe de la mi-

néralogie de Kirwan en deux volumes in 8. pour laquelle Madame la Princeſſe de Daſchkav lui a fait obtenir de Sa Majeſté l'Impératrice une boëte d'or avec cent Ducats.

Le 17 Novembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de S. E. Mr. le Comte Anhalt, Chef du Corps Impérial des nobles Cadets de Terre, un livre en Seize rélié & intitulé: *La Salle de recréation, ou Tableau de ce qui ſe trouve dans la Salle de recréation du quatrieme & cinquieme âge du Corps Impérial des Cadets Gentilhommes.*

Le 1 Décembre. Le Secrétaire a remis une feuille imprimée, contenant les *Obſervations météorologiques faites à l'Obſervatoire royal de Paris en Janvier 1791 par M. Fontenai.*

Le 5 Décembre. M. le Profeſſeur Géorgi a remis une ſeconde continuation des Annales chymiques de M. Crell, ſavoir: *Crells chemiſche Annalen vom Jahr 1791. 3 bis 8 Stück,* & *Beyträge zu den Annalen. V. Bandes 1. Stück.* Voyez ci-deſſus au 11 Juillet.

Le 8 Décembre. M. le Profeſſeur Krafft a fait voir deux microscopes de l'invention de M. le Conſeiller d'Etat actuel & Chevalier Aepinus, dont il demontra toutes les parties. L'un a été fabriqué à Londres & l'autre à St. Pétersbourg ſous la direction de l'Inventeur.

Le 15 Décembre. M. le Profeſſeur Zouyef a remis, pour être imprimé à l'Académie, une traduction ruſſe de la déſcription de Groenlande par le Miſſionaire Egedé: Описанїе Гренландїи сочинен. г. Еггедомъ, Миссїонеромъ и Епископомъ Гренландїи.

Le

Le 19 Décembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. d'Italinski Conſeiller d'Ambaſſade de Sa Majeſté l'Impératrice à Naples, qui envoie, de la part de l'Auteur M. de Gioeni, Chevalier de Malthe, un volume in 8vo rélié & intitulé: *Saggio di Litologia Veſuviana, dedicato à S. M. la Regina delle due Sicilie. Napoli 1790.* Ce préſent a été reçu avec remercimens & enrégiſtré pour être dépoſé à la Bibliothèque académique.

Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Auteur M. Fontenaï: Obſervations météorologiques faites à l'Obſervatoire royal de Paris en Juillet 1791.

L'Académie a reçu dans le courant de cette année les obſervations météorologiques faites à Moscou, que M. le Conſeiller de Cour & Chevalier Stritter lui envoie régulierement chaque mois, ainſi que celles que M. le Conſeiller de Cour Hermann a faites à Pyſchminsk dans le Gouvernement de Perme, & M. le Chirurgien Major Fries à Ouſtiug-véliki dans le Gouvernement de Vologhda.

Extrait d'une lettre de S. E. Monſieur le Prince Demetrius de Golitzin, datée de la Haye le 15 Février.

Voici, M. des evénemens qui vont peut-être changer toutes nos idées ſur la Chymie, la Minéralogie &c. Le Comte de Sickingen, que vous devez connoître par ſes belles recherches ſur la Platine, me mande, & M. G. Forſter me le confirme, qu'on a fondu 1°. la Platine en régule en $\frac{1}{4}$ d'heure, ſans addition, 2°. de même la Molybdene, le Tunſtein & la Manganeſe, également en régule, par le charbon pur

pur ſans flux. Et 3°. on a reduit en régule bien évidemment métallique, la terre péſante, la terre du ſel d'Epſom, & la terre à chaux ou calcaire. Tout ceci s'eſt paſſé à Vienne & à Chemnitz en Hongrie, où Mrs. de Ruprecht & Tondy ont opéré ces miracles. Il y a eu des disputes au ſujet des régules tirés des terres élémentaires. M. Savareſi, penſionnaire du Roi de Naples à Chemnitz prétendoit même qu'on pouvoit en tirer également du charbon de bois, ſans addition quelconque: il aſſuroit en avoir déja fait l'expérience. Auſſi M. Klaproth a tout de ſuite annoncé cette nouvelle par une lettre qu'il a fait imprimer en latin: mais on m'aſſure que M. de Ruprecht vient de vérifier, ou plûtôt de repéter ſon expérience ſur le charbon de bois en préſence de M. Savareſi, & qu'elle n'a nullement réuſſi: au lieu que celle ſur les terres calcaire, talqueuſe, magnéſiene & argileuſe pures réuſſit parfaitement, & M. Weſtrumb, Chymiſte & Apoticaire à Hameln l'a repétée publiquement.

Il n'y a donc pas de terre, & tout eſt métallique ſur notre globe. Cette découverte eſt analogue aux idées des Chymiſtes françois: M. Lavoiſier l'avoit même prédite. M. de Born l'admet comme une choſe ſûre dans le quatrieme tome de ſa nouvelle Minéralogie intitulée: Déſcription du cabinet de M. de Raab.

Rapport de M. Lowitz, rélativement à la métalliſation des terres, préſenté à l'Académie le 6 Juin.

J'ait fait le mois paſſé des expériences nombreuſes & très variées ſur la métalliſation des terres primitives, qui eſt en vogue depuis quelque temps & qui ménace la Chymie

mie & l'hiſtoire naturelle d'une revolution extraordinaire; j'ai choiſi dans cette intention principalement la terre talqueuſe, (magneſia alba) que j'ai ſousmiſe au feu le plus fort dans des creuſets bien chargés de charbon en poudre mélé avec de l'huile de chanvre, ou avec de l'huile de corne de cerf épaiſſe. Mais je n'avois pas de meilleur ſuccès que Mrs. Weſtrumb, Klaproth, Göttling & beaucoup d'autres chymiſtes célèbres l'ont eu en dernier lieu, n'y ayant trouvé le moindre indice de métalliſation operée.

Comme ces Chymiſtes ont prouvé tout nouvellement par de nombreuſes expériences, que les régules métalliques, qui ont égaré Mrs. Ruprecht & Tondi, ne pouvoient être autre choſe, que du fer phosphorique, il ne ſera pas inutile de faire mention ici d'un cas ſemblable que j'ai eu déja depuis quelques années.

Je pris un nouveau creuſet de Heſſe, je le couvris de fer battu, qui n'a pas été enduit d'étain, & qui fut un peu enrouillé, pour y réduire en charbon le reſte piceux de la deſtillation de l'huile animale de Dippel. L'opération finie pendant laquelle le feu avoit été augmenté jusqu'à la candescence du creuſet, je trouvai en retirant le charbon animal, avec le plus grand étonnement au fond du creuſet & à ſes parois, pluſieurs petits grains métalliques luiſans & attachés fortement au creuſet.

Voici donc un exemple frappant d'une métalliſation apparente produite même ſans addition de terre primitive quelconque, qu'on peut cependant expliquer très aiſément par la richeſſe de l'huile de corne de cerf en acide phosphorique & par les particules de fer qui ſe trouvent dans le creuſet.

Extrait d'une lettre de M. de Boghdanof, Commendant de la fortereſſe de Biysk' dans le Gouvernement de Kolyvan: datée du 12 Novembre 1790.

On trouve de la terre nitreuſe en pluſieurs endroits du Gouvernement de Kolyvan, & particulierement près de la rivière Katoune à 150 verſtes de Biysk' au pied des montagnes, où il y a des grandes eſpaces de terrein couvertes de terre nitreuſe. Quant au bois, il y en a beaucoup ſur ces montagnes, à la diſtance de deux verſtes de la riviere Katoune, par laquelle on peut aiſément transporter le ſalpètre préparé, dans le fleuve Obe qui n'eſt éloigné de Biysk' que de 13 verſtes: cependant comme la Katoune a des cataractes, cette transportation ne peut avoir lieu que pendant les inondations du printemps. Par terre on peut le tranſporter en tout temps jusqu'à Tobolsk, mais alors le transport d'un poude de ſalpètre couteroit un rouble.

Les Calmouques employent cette terre nitreuſe à la fabrique de leur poudre à canon: ils la cuiſent dans des chaudrons de fer de fonte, qu'ils couvrent avec de la toile, à laquelle s'attache le ſalpètre pendant la coction: après l'avoir ôté de la toile, ils le mêlent avec du ſouffre & des charbons: ils mettent enſuite ce mélange dans un ſac de cuire qu'ils placent ſur une groſſe planche en lui donnant pluſieurs coups de bâton jusqu'à ce que le mélange devienne ménû, après quoi ils le rétirent du ſac & le remettent dans un chaudron de fer, où ils le réduiſent avec de l'eau à une pâte, qu'ils broyent avec des crins de cheval dans une écuelle ou chaudron, pour la transformer en pétits grains ou globules, qu'ils ſèchent enfin au Soleil.

Rap-

Rapport de M. Lowitz rélativement à la terre nitreuſe des environs de Biysk', préſenté à l'Académie le 28 Avril.

Après un examen ſoigneux du ſalpètre envoyé du Gouvernement de Kolyvan, je trouve que 120 parties de ce ſalpètre ne contiennent de ſels hétérogènes qu'une partie compoſée de chaux uni à l'acide nitreux & marin, & d'un tant ſoit peu de matiere extractive, qui donne à ce ſalpètre la couleur jeaunatre & ſâle; laquelle cependant il perd entièrement à la premiere dépuration par la cryſtalliſation. Il ſuit de cette analyſe que ce ſalpètre eſt d'une bonté excellente, & qu'on en peut tirer un grand profit, ſurtout, ſi au commencement on agit avec toutes les précautions réquiſes dans ſon exploitation & dépuration.

Varietas acipenſeris ſtellati oppido rara deſcripta, ab I. Lepechin.

Acipenſeris ſtellati, maris Nigri et Caſpii civis, qui flumina quoque in haec maria influentia intrat, primus mentionem fecit comes Marſili (*a*), quem excripſit Kleinius (*b*); poſtea beatus Gûldenſtaedt (*c*), ſub nomine triviali rutheno Sevriugae ipſum propoſuit; celeberrimus vero Pallas ſatis accuratam et omnibus numeris abſolutam Tab. A.

(*a*) Op. Dannb. T. IV. p. 35. Tab. 2.
(*b*) Hiſtoria piſcium. Miſſ. IV. p. 13. No. 3.
(*c*) Novor. comment. Petropol. T. XVI. p. 533.

deſcriptionem dedit (*d*). Egomet ipſe deſcriptionem concinnare effigiem que ipſius fieri curaui (*e*).

Aſt anno 1791 ab excellentiſſimo viro, Dno. Schiſchkin, praefecto claſſis Aſtrachanenſis, miſſae erant exuviae acipenſeris capti in mari Caſpio ad oſtium fluminis Embae, qualem nunquam, vt exellentiſſimus vir affirmat, viſum a piſcatoribus fuiſſe. Verum habitus externus, externa que conformatio, veram, ſed valde degenerem ſpeciem acipenſeris Stellati eſſe facile perſuadent.

Nam caput ſubtetragonum, productum in roſtrum vltra ſpithamae longitudinem, vti in acipenſere ſtellato, ſed cathaphractum oſſe duro, aſperrimo, irregulariter ſulcato, tuberculato, eminentiis mucronatis armato. Latera roſtri cincta ſunt oſſibus craſſioribus, ad quorum medium vtrinque prominent apophyſes tres oſſeae, durae, planae, retro ſpectantes, margine ſcindente, apice fere omnes bidentatae, ad vnum pollicem longae, dimidium que fere pollicem latae, ſuperior vero finis terminatur, ad inſtar proceſſus mamillaris, tuberibus inaequalibus, apice denticulato-ſerratis. Inter oculorum orbitas reperitur excreſcentia oſſea, ad formam vnguis eleuata, retro hamata eiusdem formae; vtrinque ad initium opercularum branchialium extant officula eminentia bina, ſed fortiora, apice dentata, in ſincipite vero tres tales prominentiae obſervantur, ad aperturam autem branchiarum modo duae.

Branchiarum opercula tecta ſunt oſſe ſtellato, hiſpido, medio protubeuente. — Inde corpus a branchiis ſenſim ſenſim-

(*d*) Itiner. Part. I. p. 463. No. 20.
(*e*) Itinerar. Part. I. p. 255. T. X. f. 1 et 2.

ſenſimque attenuatur, et pro more ſpeciei pentaedrum. In dorſo ex regione, quae initio pinnarum pectoralium reſpondet, vsque ad radicem pinnae dorſalis reperiuntur officula, ſcutiformia, oblongo-rotundata, maiora $4\frac{1}{2}$ pollices in peripheria habentia, dorſo carinata, definentia in apophyſes oſſeas, firmas, roſtratas, valde acuminatas, quarum mediae fortiores $1\frac{1}{2}$ pollicem longae, numero 12.

Ante pinnas pectorales vtrinque ſita ſunt duo oſſa trapezoidea, medio in crenam elevata, fine ſuperiori in dentem firmum, hamatum definentia, aſpero-ſulcata.

Inde ab angulo ſuperiori aperturae branchiarum vtrinque per latera vsque ad diviſuram caudae decurrunt officula numero 40, pariter ſcutiformia, terminata proceſſibus firmis $1\frac{2}{3}$ pollicis longis, ſed gracilioribus, aduncis, quorum medii per marginum interiorem, quatuor vero priores ad apices denticulato-ferrati, reliqui magnitudine decreſcunt.

In ventre, fere a parte inferiori radicis pinnarum pectoralium vsque ad pinnas ventrales, eiusdem formae ſita ſunt officula duplici ſerie, numero vndecim, quorum primum par minimum, proceſſu ſimplici, acuto; quartum, quintum, ſextum, ſeptimum, octavum et nonum multo fortius, quorum proceſſus adunci $1\frac{1}{2}$ pollicem longi, inferiori margine denticulato-ferrati.

Longitudo piſcis ab apice roſtri ad caudae extremum, ſecundum dorſum menſurata 4 ped. et 11 poll. pedis anglicani; ſecundum vero ventrem 4 ped. et 7 poll. Cutis per totum corpus ſquammis crenatis, albidis, inordi-

nate diſperſis, hic inde aculeatis aſperrimum. Ceterum ſitus oris, et cirrorum, conformatio pinnarum caudae que, vti in acipenſere ſtellato.

Deſcriptio haec ſi conferatur cum deſcriptione Acipenſeris Stellati ſicile patebit piſcem noſtrum veram, ſed valde degenerem ſpeciem Acipenſeris Stellati conſtituere, quem et icone Tab. A. ideo exprimi caravi, ne cui in animum veniat novam exinde creandi ſpeciem, vti Kleinius fecit, qui vsque ad decem ſpecies Acipenſeris, ſed valde confuſe, recenſet, et celeberrimus Gmelinus, ſecutus beatum Güldenſtaedt, in noviſſima editione ſyſtematis Linnaeani (*a*) introducit, quamvis ipſe dubius, tanquam novam ſpeciem Schypa (rectius Schip. шипъ) cognominatam. Sed шипы reperiuntur tam in ſpecie Acipenſeris Sturionis, quam acipenſeris Huſonis, vt celeberrimus Pallas monet (*b*), et ita vocantur ob roſtrum magis productum et gracile, meramque varietatem, minime vero ſpeciem conſtituunt. Huc quoque referendae ſunt omnes illae varietatas, quae piſcatoribus ſub nomine Coſtera veniunt, et reperiuntur non modo in ſpecie Sturionis, ſed etiam inter Acipenſeres Ruthenos, ſunt que purae varietates, vti recte idem celeberrimus Pallas affirmat. Ad quas varietates et nunc deſcriptum piſcem referendum eſſe nullus affirmare rubito.

(*a*) T. I. part. 3. p. 1484.
(*b*) Itiner. T. I. pag. 131.
(*c*) Ibid. p. 132.

SVP-

SVPPLEMENT.

MÉMOIRES

préſentés à l'Académie Impériale des Sciences

par des ſavans étrangers

&

approuvés dans ſes Aſſemblées.

DÉTERMINATION DE LA DEMI-CIRCONFÉRENCE D'UN CERCLE,

DONT LE DIAMÈTRE EST = 1, EXPRIMÉE EN 140 FIGURES DÉCIMALES.

Par

M. *GÉORGE VEGA.*

Présenté à l'Académie le 20 Août, 1789.

L'Académie croit pouvoir ſe dispenſer d'inſérer ici tout le calcul long & pénible par lequel l'auteur eſt parvenu à la valeur de π, ou de la demi-circonférence d'un cercle dont le diamètre eſt = 1; il ſuffit de transcrire ici la double ſérie infinie dont il s'eſt ſervi pour cet objet, & qui eſt (*)

$$\pi =$$

(*) Ces deux ſéries ſont extrêmement convergentes, mais tant les numérateurs que les dénominateurs des fractions qui les compoſent, ſont des nombres peu commodes pour le calcul. Feu M. Euler a donné, dans un mémoire que nous inſérerons au volume X de nos Actes, une double ſérie qui, à la vérité, n'eſt pas ſi convergente que celles de M. le Major Vega, mais dont la loi de progreſſion eſt bien plus évidente & qui, étant beaucoup plus commodes, abrégeroient infiniment le travail à celui qui s'en ſerviroit pour calculer la valeur de π. Voici cette double ſérie :

$$\pi = \left\{ \begin{array}{l} \frac{28}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\left(\frac{2}{100}\right)^4 + \&c.\right] \\ + \frac{30336}{100000}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{144}{100000}\right)^3 + \&c.\right] \end{array} \right\}$$

$$\pi = 8 \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{78}{1.3} a + \frac{169}{5.7} b + \frac{265}{9.11} c + \frac{361}{13.15} d + \frac{457}{17.19} e \\ \qquad + \frac{553}{21.23} f + \frac{649}{25.27} g + \&c. \\ + \frac{26}{1.3} A + \frac{58}{5.7} B + \frac{90}{9.11} C + \frac{122}{13.15} D + \frac{154}{17.19} E \\ \qquad + \frac{186}{21.23} F + \frac{218}{25.27} G + \&c. \end{array} \right\}$$

où les lettres a, b, c, d, &c. A, B, C, D, &c. marquent les fractions ſuivantes:

$$a = \frac{1}{343} \qquad A = \frac{1}{27}$$
$$b = \frac{a}{7.343} \text{ ou } \frac{a}{74} \qquad B = \frac{A}{81}$$
$$c = \frac{b}{7.343} \qquad C = \frac{B}{81}$$
$$d = \frac{c}{7.343} \qquad D = \frac{C}{81}$$
$$\&c. \qquad \&c.$$

D'où l'auteur a calculé la valeur ſuivante pour

$$\pi = 3.14159.26535.89793.23846.26433.$$
$$83279.50288.41971.69399.37510,$$
$$58209.74944.59230.78164.06286.$$
$$20899.86280.34825.34211.70679.$$
$$82148.08651.32823.06647.09384.$$
$$44767.21386.11733.138.$$

La double ſérie, d'après laquelle cette valeur a été trouvée, eſt démontrée au ſecond volume des leçons de Mathématiques du même auteur (*), ainſi que dans ſes tables logarithmiques.

En déterminant les trois dernieres figures décimales, qui ſuivent la 140e, l'auteur n'a point eu égard au reſte qu'il

(*) G. Vega Vorleſungen über die Mathematik. Seite 203.

qu'il faudroit y additioner, s'il avoit pouſſé la préciſion encore aux ſigures 144 & ſuivantes: mais à ce defaut il y a ajouté un reſte par eſtime, de ſorte que même ces trois dernieres figures ne ſauroient différer de la vérité que de quelques unités.

En comparant cette valeur de π avec celle qu'on trouve déja en pluſieurs ouvrages exprimée jusqu'à 127 figures décimales, on obſervera, que celle de l'auteur n'en diffère qu'en deux endroits, ſavoir à la 113e & à la 127e figures. Celle là au lieu de 3 eſt ici 8, & celle-ci au lieu de 6 eſt ici 4. Mais comme l'auteur a refait ſes calculs à diverſes repriſes, il eſt très perſuadé que la figure 113me dans l'ancienne valeur ne peut être qu'une faute d'impreſſion qui s'eſt propagée d'un ouvrage à l'autre, d'autant plus que toutes les figures ſuivantes s'accordent parfaitement dans l'une & l'autre valeur. Or la 127e figure étant la derniere de l'ancienne valeur, on n'y ſauroit compter au juſte, auſſi peu que des trois dernieres figures de la préſente valeur qui va jusqu'à la 143 figure décimale, & que l'auteur a par cette raiſon transpercées.

L'Auteur finit par donner encore une nouvelle expreſſion pour la valeur de π, dont la huitieme partie eſt égale à l'agregat des trois ſéries ſuivantes :

$$5.\left(\tfrac{73}{1.3}\,\mathrm{A}+\tfrac{169}{5.7}\,\mathrm{B}+\tfrac{265}{9.11}\,\mathrm{C}+\tfrac{361}{13.15}\,\mathrm{D}+\tfrac{457}{17.19}\,\mathrm{E}+\&\mathrm{c.}\right)$$
$$+1.\left(a+\tfrac{1}{5}c+\tfrac{1}{9}e+\tfrac{1}{13}g+\tfrac{1}{17}i+\&\mathrm{c.}\right)$$
$$-1.\left(\tfrac{1}{3}b+\tfrac{1}{7}d+\tfrac{1}{11}f+\tfrac{1}{15}h+\tfrac{1}{19}k+\&\mathrm{c.}\right)$$

où les lettres A, B, C, &c. a, b, c, &c. marquent les fractions ſuivantes

$$A = \frac{1}{343}$$
$$B = \frac{A}{7.343} = \frac{A}{2401}$$
$$C = \frac{B}{2401}$$
$$D = \frac{C}{2401}$$
$$E = \frac{D}{2401}$$
&c.

$$a = \frac{3}{79}$$
$$b = \frac{9a}{6241} = \frac{9a}{79^2}$$
$$c = \frac{9b}{6241}$$
$$d = \frac{9c}{6241}$$
$$e = \frac{9d}{6241}$$
&c.

TRAI-

TRAITÉ
D'UNE MÉTHODE NOUVELLE ET INFAILLIBLE, D'ESSAÏER L'OR ET L'ARGENT,

Par
M. *Charles Baron de Meidinger.*

Préſenté à l'Académie le 23 Juin, 1794.

Obſervations préliminaires ſur l'ancienne façon d'eſſaïer.

L'ancienne méthode d'eſſaïer, outre les divers défauts dans la manipulation & le méchanisme, a encore les défauts politiques ſuivants:

A. Si pluſieurs Officiers des monnoies ou eſſaieurs ſont les eſſais d'une même fonte, ou de la même maſſe d'or ou d'argent, rarement ils ſe trouveront d'accord: l'un aura plus ou moins de fin que l'autre; par là ou l'hôtel des monnoies ſouffre, ou le public.

B. Les principes de la fabrication des monnoies ſont donc incertains & chaque état manque de ſureté dans le commerce & dans le cours du change.

C. De là nait une méfiance mutuelle entre les états commerçans & des plaintes continuelles de part & d'autre fur le peu de juſteſſe des eſpèces.

D. Les officiers des monnoies ignorans ou de mauvaiſe foi, qui ſe ſoucient peu de la juſteſſe des eſpèces dans le commerce, ſont les ſeuls, qui profitent de ces désordres au préjudice des honnêtes gens.

E. Cette incertitude de l'art d'eſſaïer fait que ceux qui livrent l'or & l'argent aux hôtels des monnoies, ſe retirent des endroits, où ils trouvent la plus grande incertitude des eſſais, & ſe tournent vers ceux, où ils trouvent le mieux leur compte & où les eſſais leur paroiſſent plus ſûrs.

F. Cette même incertitude de l'art d'eſſaïer fait qu'inſenſiblement le commerce & le change tournent au préjudice d'une nation, puiſqu'il eſt inconteſtable, que la valeur intrinſèque des monnoies, c'eſt à dire la quantité réelle d'or & d'argent qu'elles contiennent, eſt la méſure commune de la valeur de toutes les productions de la nature & de l'art: or comment s'aſſurera-t-on de cet appréciateur commun, ſi l'art d'eſſaïer eſt hors d'état de le fixer?

G. Un exemple va éclaircir ce que j'ai avancé: Suppoſons que dans un état il y a 30. millions de florins en pieces de 20 kreutſers en circulation. Les loix ordonnent, que ces piéces ſoient monnoiées à 14. florins pour un marc de poids, & que le tître en ſoit 9 lots & 6 grains. (*)

Que

(*) Le plus haut tître eſt en Allemagne de 16 lots, & le lot ſe diviſe en 18 grains.

Que trois eſſaïeurs opérent ſelon la méthode ancienne pour déterminer la valeur intrinſeque & par conſéquent le fin de ces monnoies. Jean trouvera dans ſon opération que le marc eſt de 9 lots & 4 grains; Titius trouvera 9 lots & 5 grains, & Sempronius le jugera à 9 lots & 7 grains. Tous ont travaillé de leur mieux & ſelon leur devoir.

Aprés le calcul fait du premier réſultat, ces 30 millions ne produiroient que 29 millions & 642,857$\frac{1}{2}$ florins, par conſéquent toute cette quantité d'éſpèces perdroit 357,142$\frac{6}{7}$ florins; ſelon le réſultat du ſecond les 30 millions ne vaudroient que 29 millions 821,428$\frac{4}{7}$ florins, la perte ſeroit donc de 178,571$\frac{3}{7}$ florins. L'expérience du troiſieme feroit monter le tout à 30 millions 178,571$\frac{3}{7}$ florins, il y auroit par là 178,571$\frac{3}{7}$ florins de plus ſur le total.

H. Que conclure de cette différence, qui dans une fabrication annuelle ſe monte à pluſieurs milliers de florins au désavantage de l'état, & qui rend le commerce de l'or & de l'argent ſi périlleux, même pour les livranciers? ſi non que des trois operations il n'y en a qu'une, qui ſoit juſte, & peut-être aucune. Il eſt certain, qu'elles ſont toutes trois incertaines, parcequ'elles ne ſont pas faites ſur une régle ou échelle infaillible, mais ſimplement ſelon la routine fautive, qui eſt en vogue, & qui ne produit qu'une ſureté purement idéale.

J. Par la nouvelle méthode d'eſſaïer toute incertitude ceſſe, parceque chaque eſſaïeur a pour régle une échelle de comparaiſon, avec laquelle il opère, & qui lui procure toute la certitude mathématique & phyſique, comme nous allons le faire voir.

PRÉ-

PRÉCIS
de la nouvelle méthode infaillible, d'eſſaïer l'or & l'argent par le moien d'une échelle de comparaiſon.

CHAPITRE I.

De l'argent fin ou à 16 lots (*); comment on le connoît, & qu'il ne ſouffre aucune diminution par l'action du feu.

§. 1. On ignore encore aujourd'hui dans les hôtels des monnoies :

1.) Comment on connoît l'argent pur ou de 16 lots. Les chymiſtes & métallurgiſtes trouvent une trés grande diffi-

(*) Il faut, pour bien comprendre toute la ſuite de cet ouvrage, ſe former une idée juſte de la diviſion de nos poids & de la dénomination du titre de nos eſpèces.

Les poids ſe réduiſent au marc, qui eſt de 16 lots, le lot à 4 quintel, le quintel à 4 déniers, par conſéquent le marc a 256 déniers. Le dénier eſt diviſé en 256 parties, delà la diviſion du marc eſt de 65,536 parties, qui ſuffiſent pour déterminer & péſer les moindres maſſes avec toute la préciſion imaginable, moiennant une balance juſte & ſenſible.

Pour les eſſaïeurs, ſoit des eſpèces, ſoit de l'or & de l'argent, le dénier eſt établi pour un marc en petit, qui à l'inſtar du vrai marc eſt diviſé en 16 lots; & comme le lot a 18 grains, on abandonne la diviſion ultérieure du marc pour les eſſais, & on diviſe ce lot en petit, ou des eſſaïeurs, en 18 parties, qu'on nomme grains, qui ſont les mêmes pour l'or comme pour l'argent. Parlà le dénier ou marc en petit pour les eſſaïeurs contient 16 lots, chaque lot de 18 grains, cela fait en tout 288 grains pour le

difficulté à repondre à cette queſtion, quoiqu'en elle même elle ſoit trés facile.

§. 2. Ils diſent communement, que l'argent pur ou de 16 Lots eſt celui, qui ſelon la maniere de calculer en Allemagne laiſſe ſur la coupelle 15 Lots & 16 Grains ou quelques choſe de plus; par où ils prétendent, qu'il y a 2 Grains de cuivre ou d'autre matiere impure qui reſtent, & qu'on ne peut lui oter, ou du moins que trés difficilement & à grands fraix.

§. 3. Les officiers des hôtels des monnoies, de même que les métallurgiſtes & chimiſtes ſont

2.) dans la prévention, que par l'action du feu dans les eſſais, de même que par la fonte de l'argent, il ſe volatiliſe, ou ſe conſumme une partie du métal, qui en occaſionne le déchet.

§. 4. Ils prétendent, que l'argent contient toujours une certaine humidité, & qu'il n'a ni la fixité ni la maturité de l'or. Pour prouver cette aſſertion erronée, ils alleguent, que toutes fois qu'on remet un argent déja coupellé ſur la coupelle ou ſeul ou avec le plomb, il y a toujours un déchet d'un grain & même plus, ce qui n'arri-

---

le marc en pétit. La même choſe eſt pour l'or fin, dont le marc péſant eſt evalué à 24 Carats, chaque Carat à 12 Grains, cela fait de même 288 Grains.

Le fin de l'argent eſt evalué ſelon les Lots & Grains, comme L'or ſelon les Carats & Grains. L'argent le plus fin eſt au titre de 16 Lots, au lieu qu'en France il eſt à 12 Deniers. Moiennant cette connoiſſance il ſera facile de faire tous les rapports de l'un à l'autre.

n'arrive pas avec l'or, qui ne perd rien ou presque rien par les operations repétées; il a par conſequent plus de fixité & de maturité que l'argent.

§. 5. Toutes ces opinions ſont fauſſes & fondées ſur des préventions dangereuſes, comme on le verra ci-aprés.

§. 6. Lorsque l'argent eſt au plus fin ou à 16 Lots, il ne perd plus la moindre choſe par le feu, à quel degré qu'on le pouſſe. Si l'argent au contraire eſt mêlé avec du cuivre, ou s'il eſt en minerais, il eſt hors de doute, que par le départ du cuivre ou d'autres matieres impures, qui lui ſont unies, il ſe perd une partie conſiderable d'argent, qui eſt volatiliſée par l'action du feu; mais jamais l'argent fin ne ſe conſumme au feu.

§. 7. Pour lever la premiere prevention ſur la façon de connoitre l'argent fin à 16 Lots & la faire comprendre facilement à chacun, il faut faire attention à ce qui ſuit.

§. 8. Prenez de l'argent purgé de tout cuivre, plomb ou autre matiere hétérogene, ſoit par le moien de l'eau forte ou de la coupelle. Tout le monde conſiderera cet argent pour trés fin, & on l'evaluera à 15 Lots & 16 grains & quelque choſe de plus. Paſſez un marc en petit de cet argent par la coupelle ſoit en une ſoit en deux, moitié par moitié, donnez à vos coupelles le degré de feu convenable; l'operation aïant été bien faite, vous trouverez vos deux boutons de 15 Lots & 16 grains.

§. 9. Réduiſez vos deux coupelles par la façon ordinaire de l'art, vous y trouverez préciſement les 2 grains d'ar-

d'argent fin, qui étant ajoutés au produit de l'operation précédente vous donneront exactement 16 Lots; par conſequent le marc entier d'argent fin, dont rien ne s'eſt conſummé par le feu, ni volatiliſé ſelon les préjugés.

§. 10. Si apres avoir trouvé ſur les coupelles les 15 Lots & 16 grains, la réduction donne moins que 2 grains, c'eſt une marque que l'argent qu'on jugeoit fin de 16 Lots avant cette operation, n'étoit pas tel.

§. 11. Si par les differens degrés du feu il arrive, que le marc ou les 2 demi-marcs que j'ai paſſés par la coupelle, produiſent plus ou moins de 15 Lots & 16 grains, on trouvera de même par la réduction des coupelles plus ou moins de deux grains, ce qui fait, qu'ajoutant les produits des deux operations, on aura le marc d'argent fin tel, qu'on l'avoit peſé pour le mettre ſur la coupelle.

§. 12. Tout ce que je viens de dire doit toujours ſe rencontrer exactement, ſinon, on peut conclure avec toute aſſurance, que l'argent n'eſt pas fin ou de 16 Lots, mais qu'il contient encore des matieres étrangeres & impures.

§. 13. On comprend, ſans que je le diſe, que, pour les operations il faut avoir une balance exacte, des poids bien diviſés, & preter toute l'attention en péſant. Il faut de plus avoir du plomb, qui ne contienne abſolument pas d'argent, tel que celui de Villach en Carinthie.

§. 14. Quant au 2e point ou prévention, que l'argent fin ſe volatiliſe & ſe conſumme par l'action du feu; le contraire ſe prouve par les operations & les verités, que je

viens d'alleguer, puisque dans le feu le plus actif de l'operation de coupeller l'argent fin, rien ne se perd; le déchet qu'on trouve, étant reparé par la réduction de la coupelle, qui rend exactement ce qu'elle en avoit pris.

§. 15. Il s'en suit donc, & la consequence paroit néceſſaire, que l'argent le plus fin ou de 16 Lots ne souffre aucune diminution dans le feu le plus concentré & continué.

§. 16. Je scai, que le fameux Tschirnhaus a produit des effets surprenants par le moien de ses verres caustiques, avec lesquels il a prétendu détruire les métaux les plus précieux; mais ces experiences purement chimiques n'entrent nullement dans nos arrangemens, dont le but unique tend au bien public & à une bonne manipulation dans la docimasie.

§. 17. Les experiences faites par l'académie des Sciences de Paris sur cette matiere sont trop connuës pour les rapporter ici; elles prouvent, comme il a été prouvé par d'autres, que l'argent le plus fin de 16 Lots ne perd rien de son poids dans le feu de fusion le plus concentré & continué.

§. 18. Toutes ces verités, qu'on peut à tout moment démontrer par l'experience, prouvent consequemment, que l'argent le plus fin n'a pas plus d'humidité, ni moins de maturité que l'or; donc l'un & l'autre chacun dans son éspéce, sont également mûrs & parfaits, & que les Alchimistes n'en prouveront jamais le contraire.

CHA-

CHAPITRE II.

De l'echelle de comparaiſon, dont on fait uſage dans la nouvelle méthode d'eſſaïer, & comment on la compoſe.

§. 1. On vient de voir, qu'il y a de l'argent à 16 Lots, & que par la réduction de la coupelle on eſt convaincu ſans le moindre doute, qu'il exiſte; c'eſt préciſement cet argent de 16 Lots de fin, qui doit être emploié à former l'echelle de comparaiſon, dont on fait uſage dans la nouvelle docimaſie.

§. 2. On ſe ſert donc de l'argent le plus fin pour compoſer l'echelle de comparaiſon, comme nous venons de le dire, c'eſt a dire d'un argent, qui aiant paſſé par la coupelle ſelon la méthode uſitée, donne 15 Lots & 16 grains, leſquels, avec les deux grains, qui proviennent de la réduction de la coupelle, ſont enſemble 16 Lots ou un marc d'argent le plus fin.

§. 3. Cet argent le plus fin, qui porte la dénomination de 15 Lots 16 grains, doit être mêlé ſelon l'art avec un cuivre pur & ductile, réduit en lames trés minces, bien nettoiées, ſelon le titre des différentes monnoies ordonné par la loi. On jette cette maſſe en lingots ou en grenailles, qu'on conſerve pour l'uſage futur. Par là l'echelle de comparaiſon (*) eſt faite & prete à être peſée & diviſée ſelon le poids des eſſaïeurs.

§. 4. Pour rendre la choſe plus claire, je ſuppoſe, que quelqu'un voulut faire des echelles de comparaiſon avec

(*) On pourroit auſſi nommer l'echelle de Comparaiſon un *Titrometre*, c'eſt a dire la méſure du vrai titre de l'argent & des eſpéces monnoiées.

15 lots (ou 15 demies onces) d'argent fin, pour eſſaïer nos ecus de convention, qui ſont à 13 lots 6 grains de fin, ſelon la diviſion reçue du Marc à 65, 536 parties: il pourra avec cette maſſe faire 1144 eſſais, ſans perdre la moindre choſe de ſon argent fin, qui ne ſe conſumme jamais au feu.

§. 5. Ce calcul ſe fait par la régle d'alliage & celle de trois, en ſe ſervant de la diviſion du Denier ou du Marc diviſé en 65, 536 parties, tel qu'il a été établi ici en 1767 à l'inſtar de la diviſion du poids de Cologne.

13 Lots 6 grains d'argent fin.
2 Lots 10 grains de cuivre pur.

15 Lots 16 grains de maſſe.

Je dis:

Si 15 lots 16 grains d'argent fin me donnent une maſſe de 1 marc 1 lot 3 quintel & 2 deniers de maſſe au titre de 13 lots & 6 grains, que donneront au même titre 13 lots & 6 grains? Facit 15 lots.

Si 15 lots & 16 grains donne 1 marc 1 lot 3 quintel 2 deniers, combien donneront 2 lots 10 grains? Facit 2 lots 3 quintel & 2 deniers de cuivre.

J'aurai par là une maſſe de 1 marc 1 lot 3 quintel & 2 deniers, qui ſera préciſement au titre demandé de 13 lots 6 grains, & qui ſe montrera telle ſur la coupelle; elle me donnera donc une echelle de comparaiſon très juſte pour nos Thalers.

§. 6.

§. 6. De cette facon on ſe forme des echelles de comparaiſon ou des Titrometres pour toutes les eſpéces de différens alois, & on peut faire cette operation en telle quantité, qu'on le trouve à propos, ſoit en grand ſoit en petit; puisque par la diviſion du denier on peut avoir toute la juſteſſe, que la meilleure balance peut indiquer, quand même il y auroit des fractions.

§. 7. De cette maſſe d'argent allié avec le cuivre on prend ſelon le poids d'eſſaïeurs autant demis marcs, qu'on le trouve à propos; afin de les avoir prets, & ne pas être obligé de faire cette operation à chaque eſſai, qui ſurviendroit. Ce demi-marc d'eſſaïeur ne s'enveloppe pas comme de coutume dans du papier blanc, mais on le met dans un papier rouge, bleu, ou d'une autre couleur, afin de ne pas ſe tromper, lorsqu'il s'agit de le mettre ſur la coupelle. J'ai coutume d'envelopper tous mes aſſais dans une quantité convenable de plomb laminé ou battu mince comme du papier, en y ajoutant une marque, pour deſigner, que c'eſt un echelle de comparaiſon.

C'eſt la meilleure méthode de preparer les eſſais, en donnant un ſigne diſtinctif à ceux, qui doivent ſervir d'echelle.

CHAPITRE III.

Des coupelles pour la nouvelle méthode d'eſſaïer, & comment on doit les faire.

§. 1. Les coupelles ordinaires, dont on ſe ſert communement pour eſſaïr l'or & l'argent, ne ſont pas d'uſage dans la nouvelle méthode; on en emploie d'autres, qui ſe ſont

ſont de la même matiere, mais d'une ſtructure differente, qui jusqu'à préſent n'ont pas été connuës.

§. 2. Il y a deux ſortes de ces coupelles; l'une eſt compoſée de trois petites ecuelles formées d'une ſeule piece circulaire, dont les cavités ſont pareilles à celles des coupelles ordinaires. Cette éſpéce eſt deſtinée à ceux, qui ſont peu au fait de l'art d'eſſaïer, & qui ne ſavent ni diriger le feu, ni les régles de la Docimaſie, comme nous le dirons plus bas. Voyez Tab. I. fig. *v.* Comme ces trois cavités forment par leur emplacement un Triangle, j'ai donné le même nom à cette ſorte de coupelle. J'appellerai donc dans la ſuite la maniere de ſe ſervir de ces coupelles: *eſſaïer en triangle avec l'echelle de comparaiſon.*

§. 3. Je nomme l'autre ſorte de coupelles, *longues*, parceque les trois cavités ſont placées ſur une mêmes ligne l'une à coté de l'autre, comme on peut le voir Tab. I. fig. *u.* Celles-ci conviennent aux perſonnes bien inſtruites dans l'art d'eſſaïer, & qui ſavent par conſequent diriger le feu. Lorsqu'on les mettra en oeuvre, on dira: *eſſaïer dans les coupelles longues avec l'echelle de comparaiſon.*

§. 4. Les eſſais de même que l'echelle peſés avec toute la juſteſſe requiſe ſe mettent ſelon l'art chacun ſeparément dans les cavités de ces coupelles, on les fait paſſer ſelon la maniere uſitée, en donnant froid & chaud ſelon la convenance, & ſur tout chaud à l'éclair, dont nous parlerons bientot plus au long.

§. 5. Si l'on ſe ſert des coupelles triangulaires, on doit marquer la cavité, qui doit recevoir l'echelle de comparai-

paraiſon, ſoit par une egratignure de coté ou une marque avec la mine de plomb, afin de ne pas ſe tromper ſoit en l'y plaçant ſoit en la retirant. Quant aux coupelles longues on n'a pas beſoin de cette precaution, parceque celle du milieu eſt toujours deſtinée à recevoir cette echelle de comparaiſon.

§. 6. L'une & l'autre éſpéce des coupelles mentionnées ci-deſſous ſont également bonnes, on les fait de la matière uſitée de 2 parties de cendres de bois & une partie de cendre d'os calcinés & bien purifiés par le lavage, ou d'os calcinés ſeulement & ſans claire. Il ne faut pas les frapper comme de coutume avec un maillet, qui occaſionne une difference entre les coupelles, qui tantôt ſont plus, tantot moins ſerrées; mais les mettre ſous une preſſe, qui d'un ſeul coup de main fait les trois coupelles à la fois dans une forme, dont le deſſein eſt Tab. I. fig. *r*.

§. 7. On comprendra facilement, que le ſerrement de la preſſe étant égal pour les trois coupelles qui tiennent enſemble, elles doivent être auſſi compactes les unes que les autres; d'autant plus que la partie inferieure & la ſuperieure de l'inſtrument s'uniſſent avec toute la juſteſſe poſſible, par quoi une cavité eſt auſſi ſerrée que l'autre, & par conſéquent l'une ne peut pas plus attirer d'argent que l'autre, ni plus de plomb, qu'on ſuppoſa par tout du même poids & proportionné à l'argent: quant même on ſe ſerviroit d'une coupelle triangulaire, & que le feu ſe trouveroit inégal dans le fourneau d'eſſai, & le tout ſeroit negligé, comme nous le prouverons plus bas.

Cet article du feu eſt dans l'ancienne méthode d'eſſaïer le principal, le plus difficile, & ſans échelle de com-

paraiſon, on peut dire, qu'il eſt impoſſible; puisque la moufle n'eſt pas par tout d'égal épaiſſeur que les charbons, l'air & conſequemment l'action du feu ne ſont jamais dans une parfaite égalité, on ne peut donc pas avoir une certitude mathématique des opérations.

§. 8. La preſſe a cet avantage ſur le maillet, que les coupelles en ſont plus ſerrées que celles qui avoient été frappées; & quoique les nouvelles avec le même degré de chaud que les anciennes, boivent la même quantité d'argent; il y a cependant cette différence, que dans les nouvelles qui ſont plus compactes, les boutons de fin ſe détachent mieux que dans les anciennes, & rarement il y reſte de la matière des coupelles ou de la litarge attachée: par où on fait ſouvent valoir le plomb pour de l'argent dans l'ancienne méthode.

§. 9. Une perſonne, qui n'eſt pas ſuffiſamment au fait de la direction du feu & de la façon d'eſſaïer, peut par le moien des coupelles triangulaires faire les operations avec une entière certitude; mais ceux, qui ſont au fait d'entretenir une égalité de chaleur dans le fourneau d'eſſai & dans la moufle, trouveront plus de facilité à ſe ſervir des coupelles longues.

§. 10. Ces coupelles longues étant de même matière & faciles de la même façon que les triangulaires, doivent produire les mêmes effets. On les place à l'ordinaire ſous la moufle, en obſervant le même regime du feu ſelon la convenance. On porte dans la cavité du milieu l'echelle de comparaiſon, & dans les deux autres les eſſais; on conduit le feu ſelon l'art connu pour tenir le tout dans le bain con-

convenable, & enfin on donne le chaud pour l'éclair; on détache enſuite les boutons dans le chaud, & par là toute l'operation eſt achevée & parfaite, ſi on a obſervé tout ce que j'ai dit jusqu'ici, & que je détaillerai encore dans la ſuite.

§. 11. Comme par tout, ou l'on fait des eſſais, on eſt convaincu, que par le plus ou le moins de chaud les coupelles boivent plus ou moins d'argent (Voyez Chap. I. §. ».) & que ſelon ce que nous avons demontré, l'argent fin ne ſe conſumme ni ſe diminuë dans le feu, il ne ſeroit pas à propos d'introduire dans un hôtel des monnoies, à l'excluſion des autres, des coupelles, qui ne boiroient point du tout d'argent, parceque dans ce cas tout eſſaïeur, qui examineroit les éſpéces d'un tel hôtel ſelon la methode uſitée, & qui n'emploieroit pas d'echelle de comparaiſon, les jugeroit certainement d'un mauvais aloi à proportion, que ſa coupelle boiroit du fin. Il étoit par conſequent indiſpenſable dans cette nouvelle méthode, d'emploier la même matière pour la conſtruction des coupelles; c'eſt à-dire des cendres de bois & des os bien calcinés & purifiés par le lavage, & de faire uſage d'un plomb pûr ou du moins exactement eſſaié, comme on fait par tout.

CHAPITRE IV.

Des fourneaux d'eſſai, des moufles & de l'appareil.

§. 1. Quoiqu'on puiſſe ſe ſervir des fourneaux & des moufles ordinaires pour faire les eſſais avec l'echelle de comparaiſon, ſoit qu'on emploie les coupelles en triangles, ou les longues; j'en ai cependant imaginé d'autres, qui ſont repréſentés Tab. II. fig *b. c. d.* Comme ces nouvelles ſortes de fourneaux & de moufles dépenſent moins de charbon,

& donnent plus d'agrément & de facilité dans les operations, ils pourroient avec un grand avantage pour les hôtels des monnoies être ſubſtitués à ceux qui ſont en vogue, puiſqu'ils ne coutent pas plus que les ordinaires tant pour les fabriquerque pour les entretenir.

§. 2. Ces fourneaux & moufles s'écartent conſidérablement de la ſtructure ordinaire, comme on peut le voir par les deſſeins Tab. II. Ils ſont tant exterieurement qu'interieurement d'une figure ronde, qui convient mieux à la direction du feu de charbon. Le fourneau a les mêmes proportions, que celui de Mr. Cramer, mais il eſt en ceci plus commode, qu'il eſt briſé doublement par deux charnières *c. d.* dont l'une ſert pour y placer la moufle, & l'autre pour y mettre le charbon; on place ſur le haut un tuyau *e*, qui augmente conſiderablement le degré de chaud. Je nomme mes fourneaux des *fourneaux ronds* & les moufles des *moufles pointuës* pour les diſtinguer de ceux qui jusqu'à preſent ont été en vogue.

§. 3. La baſe des moufles doit être auſſi unie, que ſont les coupelles longues, afin que l'air ne puiſſe paſſer par deſſous, par où il ſe trouveroit une inégalité de chaud, qui occaſionneroit une précipitation ou rétard dans l'un ou l'autre eſſai. Pour prévenir tout inconvenient, je fais faire cette baſe ſéparément de la moufle, & lui donne plus d'epaiſſeur, afinque par le moien d'une lime ou pierre de grais je puiſſe enlever toutes les inégalités, & la placer horiſontalement: par cet expédient les coupelles longues ſe placent ſur le fond de la moufle ſans laiſſer aucun interſtice, & les inconveniens ſusmentionnés ſont levés.

§. 4.

§. 4. L'art de la nouvelle méthode d'eſſaïer, lorsqu'on emploie ces coupelles en triangle, conſiſte en ceci, que lorsque les eſſais & l'echelle de comparaiſon ſont placés dans les cavités, la coupelle ne reſte pas en repos ſous la mouſle, comme il ſe pratique aujourd'hui, & qu'on n'eſt pas obligé de la pouſſer plus avant ou la retirer, pour moderer le chaud ou le froid; celle-ci au contraire tourne continuellement ſur ſon centre fixe, par où les eſſais ont tous les degrés de chaud & de froid requis à la perfection de l'operation.

§. 5. Pour produire ce mouvement, lorsqu'on veut opérer avec toute la commodité, on ſe ſert d'une machine trés ſimple, telle par exemple qu'un tourne broche, qu'on applique ſous l'âtre du fourneau d'eſſai. Voyez Tab. II. fig. *y*.

§. 6. Une barre de fer, qui descend perpendiculairement de la coupelle triangulaire au travers de la mouſle, du fond du fourneau & de l'âtre, eſt miſe en mouvement par la machine ſusmentionnée; cette barre paſſe dans un tuyau de tole affermi au fond du fourneau, & garni d'argile extérieurement pour le concerver contre l'action du feu. Quand la machine eſt montée, cette barre tourne au grés de l'operateur ou plus vite ou plus lentement, ſelon qu'il lache la detente.

§. 7. Comme cette barre doit tourner ſans aucune ſecouſſe, qui dérangeroit infailliblement l'operation, on conçoit, que ce mouvement ne doit pas être communiqué à la barre par des rouages, mais par une *vis* ſans fin, ou par quelque reſſort ou enfin par des cordons.

§. 8. Le haut de la barre qui paſſe le fond de la mouſle, eſt fait en quarré, ſur lequel s'adapte une plaque ronde de terre cuite avec un rébord Tab. II. fig. *k.* par le moien d'un trou quarré, qui convient à la barre. Sur cette plaque on poſe la coupelle triangulaire avec les eſſais, & on fait tourner le tout ſans aucune ſecouſſe très lentement. Par ce moien les eſſais reçoivent une égalité de chaud & de froid; ils doivent par conſequent produire les mêmes boutons reſpectivement au fin de l'argent, qu'on eſſaie, quand même l'operation finiroit plutôt avec l'un qu'avec l'autre.

§. 9. Je donne le nom de *ſupport* à cette plaque, dont on trouvera la figure & l'uſage expliqué à la ſuite de cet ouvrage.

§. 10. Quiconque n'aimeroit pas avoir cette machine ſous l'âtre du fourneau à eſſaïer, peut operer avec toute la juſteſſe poſſible en faiſant tourner à la main la coupelle triangulaire, ſoit en donnant au ſupport un axe rond, qui traverſe ſimplement le fond de la mouſle, ſoit en affermiſſant à la barre ſous le fourneau une roue de fer ou de laiton, par le moien de laquelle on puiſſe faire tourner le ſupport. Voyez Tab. I. fig. *w.* Mais dans l'un & l'autre cas on eſt obligé de prêter attention à faire ce qu'une ſimple machine executeroit, comme il arrive dans les cuiſines avec le tourne-broche.

§. 11. Il convient de rèpeter ici ce que j'ai déja dit plus haut, que cette façon d'eſſaïer avec le triangle n'eſt que pour les perſonnes, qui ne ſavent, ou qui ne veulent pas ſe donner la peine de diriger le feu. Ceux au contrai-

re,

re, qui ſont au fait des eſſais ordinaires, & qui connoiſſent la direction du feu ſelon les régles d'une bonne docimaſie, trouveront les coupelles longues plus commodes, & régarderont les triangulaires avec les façons de les faire tourner, comme des choſes ſuperfluës.

CHAPITRE V.

Des choſes qu'il faut obſerver dans l'operation des eſſais.

§. 1. Lorsqu'on veut eſſaïer, on commence par mettre le feu au fourneau ſelon la maniere accoutumée, aprés avoir placé les coupelles ſoit les triangulaires ſur leur ſupport, ſoit les longues ſons la moufle; & pour mettre le tout au degré de chaud requis, on place un gros charbon à l'embouchure du fourneau; lorsque le fourneau & la moufle ont acquis le degré, qu'on ſouhaite, on tire la coupelle triangulaire jusqu'à l'embouchure du fourneau, on y place les eſſais & l'echelle de comparaiſon, & on la remet ſur le ſupport, aprés quoi on le fait tourner lentement, ſoit par la machine expliquée, ſoit à la main, comme il a été dit plus haut. Chap. IV. §. 10.

§. 2. Quant aux coupelles longues, lorsqu'on y a mis les eſſais avec l'echelle de comparaiſon, elles reſtent immobiles ſous la moufle ſelon l'ancienne méthode; l'eſſaieur les traite comme il feroit avec une ſimple, ſelon que l'art & les circonſtances l'exigent.

§. 3. Lorsque les eſſais ſont bien fondus & circulent, c'eſt alors que l'eſſaieur doit obſerver; s'ils ont trop chaud ou trop froid, ſi l'operation ſe fait dans les coupelles longues; quant

quant aux triangulaires, on les fait tourner régulierement 2. 3. ou 4 fois dans une minute.

§. 4. Si les essais ont trop chaud, on ôte le charbon de l'embouchure, pour donner accés à l'air, & les rafraichir jusqu'au tems, où le bouton veut former son éclair, qu'on augmente déréchef le chaud.

§. 5. Si en ôtant le charbon de l'embouchure on n'obtenoit pas le froid qu'on souhaite, on peut moderer la chaleur en fermant les portes du cendrier & le couvercle du fourneau, ou bien on place devant la coupelle un morceau froid d'un vieux creuset taillé de la figure marquée, Tab. II. fig. *l.* Par ces moiens on peut moderer le feu comme on le juge à propos.

§. 6. Si le contraire arrive, c'est-à-dire, qu'on soit obligé d'augmenter le degré de chaleur, soit que dans l'operation il manque, soit que les essais aillent à leur fin & soient prets à faire l'éclair, dans ce cas on donne plus d'ouverture aux portes du cendrier, on ouvre le couvercle du fourneau, on retire la pierre à moderer la chaleur, & on met un charbon ardent dans l'embouchure de la moufle, & même devant, s'il est necessaire. Enfin on emploie tous les moiens, que doivent connoitre tous les essaieurs, qui sont au fait de l'ancienne méthode.

§. 7. Il est bon d'observer, qu'avec mes fourneaux ronds, dont j'ai fait mention au Chap. IV. §. 1. on peut donner tous les degrés de chaud & de froid requis en fermant ou ouvrant la porte du cendrier & le couvercle; par ce moien les coupelles longues peuvent rester en place & les

les triangulaires ſe dirigent par le ſeul mouvement retardé ou acceleré.

§. 8. Pendant l'operation on trouvera ce qu'on a ſouhaité & cherché jusqu'à preſent, c'eſt-a-dire, que les trois eſſais dont l'un eſt l'echelle de comparaiſon, & les deux autres de la même qualité d'argent, feront comme trois etoiles dans une parfaite égalité, par conſequent aucun n'aura plus de chaud ni de froid, que les autres. Comme cette parfaite égalité eſt le chef d'oeuvre dans l'art d'eſſaïer, & que la juſteſſe de l'operation en dépend; il convient non ſeulement, que tous les trois entrent enſemble en fuſion, & pour cela on retire les coupelles à l'embouchure de la mouſle pour y placer les eſſais, afin que l'un ne travaille plutôt que l'autre; mais ils doivent de même finir & faire l'éclair en même tems. S'il arrive, qu'un ou l'autre finiſſe quelques moments plutôt ou plus tard, cela n'eſt d'aucune conſequence; c'eſt une marque, qu'il y avoit un peu plus ou moins de plomb dans l'un que dans l'autre, ce qui provient de ce qu'on ne peſe pas le plomb aux balances d'eſſais, mais à des balances plus groſſiéres, qui n'annoncent ordinairement pas les moindres parties.

§. 9. Si l'operation a été telle, qu'on n'aie obſervé aucun défaut, qui oblige à la répeter, & que l'éclair ſoit paſſé dans le degré de chaud convenable, on laiſſe la coupelle encore quelques moments à ſa place, apres avoir ôté le charbon de l'embouchure, par où elle eſt un peu rafraichie; le tout étant figé, on la retire à l'embouchure par le moien des pinces, & avec l'inſtrument convenable on détache les boutons encore tout chauds, qui par ce moien ſe ſéparent parfaitement de la coupelle. Dans cet état on les peſe, & on les compare avec l'echelle de comparaiſon.

§. 10. On commence par peſer l'echelle de comparaiſon, pour être aſſuré, ſi elle annonce le titre, qu'elle doit avoir, & qu'on lui avoit donné pour ſervir de comparaiſon aux eſſais, avec lesquels on l'a paſſé par la coupelle.

§. 11. Si par exemple on eſſaie nos écus de convention, & que l'echelle de comparaiſon aie donné ſur la coupelle 13 lots & 6 grains, on a une certitude phyſique, que, ſi les eſſais ſe trouvent exactement en équilibre ſur la balance, ils annonceront le juſte titre de ces écus, ſoit qu'il réponde à celui de l'echelle, ſoit qu'il en différe.

CHAPITRE VI.

Obſervations phyſiques, qui démontrent la certitude de la nouvelle méthode d'eſſaïer.

§. 1. Pour ſe convaincre de la certitude phyſique de cette nouvelle méthode, il n'eſt pas beſoin de poſſeder la pratique de l'art d'eſſaïer; les lumieres ſeules de la raiſon ſuffiſent, & les principes ſuivans démontrent, qu'en la ſuivant on doit trouver infailliblement le juſte titre des éſpéces. Car

a.) On a les coupelles de la même matière, preſſées avec la même force, par conſequent elles ſont de la même texture interieure & de la mème bonté.

b.) On ſe ſert du même plomb, dont on s'eſt aſſuré par des épreuves réiterées & dont on emploie à chaque eſſai la même quantité, comme dans l'ancienne méthode.

c.) On a pour chaque ſorte d'eſſai une echelle de comparaiſon trés juſte; on a donc un temoin fidele, qui par le

le moien d'une bonne balance dénonce avec toute la preciſion poſſible le titre des éſpéces établi par les loix. Enſin

d.) Si les coupelles longues s'adaptent bien ſur le fond de la mouſle, on obtient par le moien des fourneaux ronds & des mouſles pointuës une circulation uniforme du feu, ce qui arrive auſſi en faiſant tourner les coupelles triangulaires. Cette nouvelle méthode reunit par conſequent toutes les conditions ſi longtems deſirées, qui ſuffiſent pour écarter les doutes dans les operations faites ſur les mêmes ſujets & dans le même tems.

§. 2. Il eſt demontré tant en théorie qu'en pratique, que le feu, ſoit celui des raions ſolaires, ſoit celui de charbons, lorsqu'il eſt pouſſé au même degré & qu'on lui préſente les mêmes matières dans les mêmes circonſtances & dans le même tems, produit neceſſairement les mêmes effets. Il en eſt de meme de la nouvelle méthode d'eſſaïer; toutes les choſes & circonſtances ſusmentionnées ſe rencontrant parfaitement, il eſt impoſſible, que les effets ne ſoient les mêmes dans les eſſais de l'argent aux yeux les plus perçants de l'eſſaïeur le plus ſcrupuleux, ſoit qu'il opere dans les coupelles longues, ſoit dans les triangulaires.

§. 3. Si donc il eſt certain tant en Théorie qu'en pratique, qu'une maſſe d'argent bien fonduë & régulierement alliée & melée convenablement, comme on doit le faire dans les hôtels des monnoies, donne la même quantité de fin tant en lingots qu'en éſpéces monnoiées, lorsqu'on la paſſe par la coupelle ſelon la nouvelle méthode, perſonne ne pourra raiſonnablement douter, que l'effet ne doive être le meme, ſi l'échelle de proportion a été bien faite, c'eſt à dire

que le même bouton de fin doit ſe réproduire, puisque les circonſtances ſont les mêmes, ſoit qu'on faſſe uſage des coupelles longues ou triangulaires.

CHAPITRE VII.

Différentes obſervations, qui appartiennent à la nouvelle méthode d'eſſaïer.

§. 1. Nous avons dit plus haut, que l'operation des eſſais étant finie, le fin de l'echelle de comparaiſon, qui avoit été compoſée ſelon le titre des monnoies à eſſaïer, devoit ſe rétrouver ſur la balance, & que les deux eſſais à coté devoient être égaux; par là on eſt convaincu, que les boutons des eſſais doivent toujours correſpondre au titre des eſpéces, & qu'ils ne peuvent les annoncer ni moindres ni meilleures, de ſorte que ſi même on donnoit à 100 eſſaieurs différens, qui ſe fuſſent préparé pour leur uſage une echelle de comparaiſon ſelon le §. 3. du chapitre II. un morceau de la même maſſe à eſſaïer, leurs opérations donneroient toutes le même réſultat.

§. 2. S'il arrive, que l'echelle de comparaiſon ne donne pas par exemple pour les écus de convention 13 lots 6 grains, l'eſſaïeur eſt aſſuré, que le degré de chaud a été trop fort, ou trop faible, & que par conſéquent il a manqué. Si l'echelle de comparaiſon a plus de 13 lots 6 grains, on reconnoit ſelon la régle générale, que l'eſſai n'a pas eu le chaud requis, & qu'en conſequence le bouton contient encore du cuivre ou du plomb; ſi au contraire l'echelle a moins de 13 lots & 6 grains, c'eſt une marque, que le chaud a été trop conſidérable, & qu'il eſt entré trop

trop de fin dans la coupelle, ce qui obligera l'artiſte à étudier le feu, & à prendre ſes précautions. Cependant ces défauts ne mettront aucun obſtacle à la juſteſſe des operations faites ſelon la nouvelle méthode d'eſſaïer, comme nous le dirons aux §. 7. 8. & ſuivants de ce chapitre.

§. 3. Quoque ſelon la nouvelle méthode d'eſſaïer le plus ou le moins qui reſte ſur la coupelle ne faſſe aucun obſtacle; il convient cependant d'être aſſez au fait de l'art, pour connoitre ce qui a pu occaſionner ces différences, & que l'artiſte ſoit en état de rendre raiſon de tout ce qui peut arriver dans ſes manipulations.

§. 4. Nous avons fait voir dans le Ier chap. au §. 14. que l'argent fin ne ſe conſummoit pas dans le feu; ſi donc il arrive, qu'il reſte une fois ſur la coupelle plus de fin, q'une autre, c'eſt le plus ou le moins de chaleur, qui a fait, qu'il en eſt entré plus ou moins dans la coupelle. Une chaleur plus concentrée & plus forte, dilate plus les pores de la coupelle, rend le plomb & l'argent plus fluides & par conſéquent plus propres à ſe précipiter dans la coupelle par leur propre poids; voila la vraie cauſe & aucune autre, que des artiſtes ignorants pourroient alleguer, pourquoi un eſſai, qui a eû plus chaud, ſe trouve avoir 1. 2. & même pluſieurs grains de moins qu'un autre, qui n'a pas eû le même degré de chaud.

§. 5. Si quelqu'un veut s'aſſurer de la verité du fait, qu'il place dans le fourneau bien echauffé 3 eſſais du même titre, par exemple de 13 lots 6 grains, l'un derriere l'autre. L'operation finie on trouvera que l'eſſai, qui a eû le plus de chaud (c'eſt la plus en arriere) peſera moins,

que le ſecond, & celui-ci moins, que le 3me, qui ſera plus péſant, par ce qu'il a eû moins chaud. Par là on aura trois ſortes de titre pour une ſeule éſpéce. Qu'on faſſe la réduction de chaque coupelle ſéparément & qu'on ajoute à chaque eſſai ce que la ſéduction aura produit, on verra avec étonnement, que chaque eſſai ſera de 13 lots 6 grains.

§. 6. Comme eſt toujours vrai, ſelon les régles de l'art que chaque eſſai de différent aloi demande un différent degré de chaleur; on voit clairement, que par la méthode ordinaire, où l'on n'a point d'echelle de comparaiſon, ni des coupelles longues ou triangulaires, il eſt impoſſible à detérminer le titre des éſpéces; au lieu que par la nouvelle méthode, par le moien de l'echelle de compáraiſon avec les coupelles longues ou triangulaires, en obſervant l'égalité du feu, le plus ou moins de fin, qui reſte ſur les coupelles, n'empêche nullement la détermination juſte du titre des éſpéces.

§. 7. C'eſt pourquoi, lorsqu'on eſt aſſuré de ſon echelle de comparaiſon, on n'eſt jamais obligé de répeter l'operation, ſi on ne veut, quoique l'echelle n'annonce pas le titre requis p. e. de 13 lots 6 grains pour nos ecus; pourvû que les deux autres eſſais à coté ſoient égaux ſur la balance (on ſuppoſe que le tout a été peſé au plus juſte & que l'égalité du feu a été obſervé) ſi p. e. l'echelle ne donnoit que 13 lots 5 grains, au lieu de 6 & que les deux autres eſſais fuſſent égaux en tout, on concluroit facilement ſans calcul, qu'il manque un grain à l'echelle, & comme les autres eſſais ont été dans le même degré de chaud, avec une égale quantité du même plomb, il en ſuit qu'il

qu'il doit manquer de même à chacun un grain, & au contraire ſi l'echelle de comparaiſon annonce 13 lots 7 grains plus ou moins par rapport au défaut de chaleur, il eſt certain que les autres eſſais, s'ils ſont d'ailleurs égaux entre eux, doivent avoir la même augmentation de poids à proportion de l'echelle de comparaiſon, ſelon l'axiome: *les choſes qui ſont égales à une troiſieme, ſont égales entre elles.*

§. 8. J'ajouterai ici pour ſurcroit de ſureté les expériences, que j'ai faites ſur un écu, que les eſſaieurs ſelon la méthode ancienne avoient déclarée de 13 lots 5 grains.

Je fis la premiere operation dans une coupelle triangulaire avec l'echelle de comparaiſon ſans faire attention au degré de chaleur; les 3 eſſais finirent presque au même inſtant, les deux eſſais de l'eſpéce étoient de poids égaux.

Je trouvai l'echelle de comparaiſon de 12 lots 17 grains, & les eſſais de 12 lots $17\frac{3}{4}$ grains.

De même que l'echelle, par le trop de chaud, a perdu 7 grains, il en ſuit, que les eſſais, qui ont été traités de même, doivent être diminués de la même quantité, en ajoutant à chacun le même déchet, qui s'eſt fait à l'echelle; j'ai trouvé que l'eſpéce monnoiée étoit au titre de 13 lots $6\frac{3}{4}$ grains & non 13 lots 5 grains, comme on l'avoit décidé à l'hôtel des monnoies.

§. 9.

§. 9. La seconde experience fut faite dans une coupelle longue avec un degré de feu très concentré.

L'echelle de comparaison donna 12 lots $15\frac{1}{2}$ grains, & les essais égaux entre eux, donnerent 12 lots $16\frac{1}{4}$ grains.

Il manque à l'echelle de comparaison $8\frac{1}{2}$ grains, qui ont été absorbés par la coupelle à cause du trop de chaud; il en est donc arrivé de même aux essais, & leur ajoutant ce déchet, il produira 13 lots $6\frac{3}{4}$ grains comme au paravant.

§. 10. La troisieme operation se fit dans une coupelle triangulaire avec plus d'attention au degré de chaleur. L'echelle de comparaison donna 13 lots $6\frac{1}{4}$ grains, & les essais étant égaux entre eux donnerent 13 lots $7\frac{1}{4}$ grains; ainsi l'echelle aiant rétenu $\frac{1}{2}$ grain de matière étrangere, on doit être assuré, que les essais sont dans le même cas; si donc on ôte de part & d'autre ce qu'ils ont rétenu d'étranger, il restera 13 lots $6\frac{3}{4}$ grains pour le vrai titre.

§. 11. Enfin je fis la 4e experience dans une coupelle longue en dirigeant le feu avec toute l'attention possible, dont l'echelle de comparaison fut la preuve, puisqu'elle donna pour resultat précisément 13 lots 6 grains, & les essais, qui s'étoient trouvés égaux, donnerent 13 lots $6\frac{3}{4}$ grains.

On voit par ces procedés, avec quelle proportion & justesse on peut operer par ma nouvelle méthode, soit qu'il

qu'il reſte plus ou moins ſur la coupelle, pourvû qu'on aie peſé juſte & qu'on obſerve les régles établies.

§. 12. Apres toutes ces experiences je réduiſis toutes les coupelles, dont j'avois fait uſage dans mes operations, & ajoutant à chaque eſſai ce qui ſe trouvoit dans ſa coupelle, je fus convaincu, que la même proportion de plus ou moins, qui s'étoit trouvé dans l'echelle de comparaiſon, ſe rencontroit parfaitement dans les eſſais. De là une preuve ſurabondante, que cette nouvelle méthode eſt infaillible pour annoncer le vrai titre, & qu'elle eſt le vrai point mathématique de l'art d'eſſaïer.

CHAPITRE VIII.

Des précautions à prendre dans cette nouvelle manipulation tant par ceux, qui ont la direction des hôtels des monnoies, que par les marchands, qui livrent les matières.

§. 1. Ces echelles de comparaiſon pourroient, pour plus d'exactitude & pour obvier aux inconveniens & aux détours des officiers des hôtels des monnoies, être fabriquées ou préparées ſous les yeux des directeurs de l'hôtel général des monnoies, ſelon que nous avons dit au chapitre II. §. 3. & delà être éparties en lingots aux hôtels ſubalternes avec le plomb & les coupelles.

§. 2. Si on donne à chaque hôtel des monnoies 10 marcs de maſſe pour les echelles de comparaiſon, il y aura de quoi faire 5120 épreuves ſoit des eſpéces, ſoit de

l'argent en fonte; cela ſuffira certainement pour quelques années, les hôtels porteront cette maſſe à compte, on fera la réduction des coupelles à ſon tems, & par là rien ne ſera perdu.

§. 3. À l'égard du blanchiment des monnoies, on donne un peu plus de cuivre dans l'alliage des différentes éſpéces, cela n'entre en aucune conſidération par rapport à l'echelle de comparaiſon, d'autant plus, que ce peu de cuivre ne demande aucun autre traitement dans le feu. Il en eſt de même, ſi on veut eſſaïer de l'argent, qui à la pierre de touche a un lot de plus ou moins de fin que l'echelle, cela ne peut faire de variation ſenſible dans le degré du feu; on choiſit l'echelle, qui approche le plus du titre qu'on veut eſſaïer, on donne le même plomb à l'echelle, que les eſſais demandent, on met l'une & l'autre dans la même coupelle, on traite le tout ſelon l'art, les triangulaires par le mouvement circulaire, & les longues par un bain égal, par ce moien on obtiendra le réſultat très juſte.

§. 4. Si à l'imitation des touchaux on forme des echelles de comparaiſon depuis 1 jusqu'a 16 lots, ou ſimplement de 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. & 16. lots, on pourra eſſaïer très-exactement toutes ſortes d'argent, ſans courir aucun risque de faire le moindre tort ni à l'état, ni aux particuliers, quand même l'argent ſeroient plus ou moins fin, que l'echelle; pourvû qu'on aie obſervée ce que nous avons dit.

CHA-

CHAPITRE IX.

Des eſſais de l'or avec l'echelle de comparaiſon.

§. 1. Pour eſſaïer l'or avec une echelle de comparaiſon, l'operation eſt plus facile. Par exemple ſi on veut eſſaïer des ducats, & former la dite echelle, on prend de l'or à 24 carats, qui a paſſé par l'antimoine, & de l'argent le plus fin; ſur 23 carats & 8 grains d'or, on met trois fois autant d'argent, on les fait fondre enſemble, & on a de quoi faire des echelles de comparaiſon, & le tout eſt preparé pour la quartation. De cette maſſe on ſe forme d'avance des demis-marcs d'eſſaieurs à volonté ſur le poids de carat, on les roule ſelon l'art en cornets, en leur faiſant un pli pour les diſtinguer des autres eſſais, & de la ſorte on les conſerve pour l'uſage.

§. 2. Lorsqu'il s'agit de faire l'eſſai d'un ducat & qu'on a préparé les cornets, on met dans le même matras les deux eſſais & l'echelle de comparaiſon, on leur donne la même eau forte pour tous, on les place ſur un peu de charbon, pour mettre l'eau forte en action, enfin on les traite également ſelon les régles de l'art. L'operation finie on lave les eſſais, on les seche, & on les fait recuire, aprés quoi on l s péſe. L'echelle de comparaiſon doit peſer les 23 carats & 8 grains, & les deux autres, aiant été trouvés d'égal poids ſur la balance à eſſaïer, doiuent annoncer au plus juſte le titre du ducat.

§. 3. On connoit avec toute la ſureté poſſible par cette manipulation, ſi les eſſais des ducats s'accordent avec l'echelle de comparaiſon, ou s'ils ſont de meilleur ou de

moindre aloi, en conſequence de quoi on peut avec certitude juger de la qualité des eſpéces à monnoier, & corriger les défauts, s'il s'en eſt commis dans l'alliage.

§. 4. L'effet de la quartation eſt, que les cornets dans tous les eſſais de l'or doivent reſter entiers ſelon les régles établies généralement, & ne doivent pas être déchirés par l'eau forte, ni réduits en eſpéce de chaux, ſelon les prétentions de quelques eſſaieurs. Pour éviter ces inconvenients, on emploie de l'eau forte, qui ne ſoit pas trop active, ſans cependant étre trop foible, mais convenablement temperée; il faut de plus eſſaier par un or fin, quelle augmentation peuvent occaſionner les impuretés de l'eau forte, qui proviennent ſoit de la diſtillation, ſoit de la précipitation, afin de la rétrancher des eſſais.

§. 5. Toutes les autres préparations pour faire tous les eſſais différens avec l'echelle de comparaiſon ſe comprendront aiſement par les régles générales, qu'on en a données; il ne s'agit donc que de répéter: que pour former chaque echelle de comparaiſon, il faut emploier l'or & l'argent les plus fins, comme nous l'avons dit au §. 3. du chap. II. & au §. 1. du chap. IX.

CONCLUSION.

Raiſons, qui ont engagé l'auteur à être précis, & à donner ſi peu d'etenduë à ſon Mémoire.

1. Je crois avoir ſuffiſamment éclairci & démontré la nouvelle méthode d'eſſaïer; je l'ai fait, je l'avoue, par des propoſitions courtes & ſuccintes; mais comme j'ai écrit, pour dou-

donner un uſage pratique de cette méthode à des officiers des hôtels des monnoies & à des eſſaieurs de profeſſion, il auroit été inutile, de m'etendre ſur les régles & la pratique de l'ancienne méthode, qui leur ſont d'ailleurs très connuës.

2. Si quelques uns, ſoit eſſaieurs, officiers des monnoies, ou métallurgiſtes rencontrent des difficultés dans cet expoſé, dont ils ſouhaiteroient avoir des éclairciſſemens, je m'offre de ſatisfaire tous ceux, qui me voudront communiquer leurs doutes.

3. C'eſt en conſidération de ceux, qui pourroient ſe former quelques doutes, ou rencontrer quelques paſſages, qui leur paroitroient obſcurs, que je joins ici des remarques, qui pourront lever une grande partie des difficultés, qui pourroient ſe préſenter.

Rémarques particulieres, qui peuvent ſervir de ſupplements & d'eclairciſſements à la nouvelle méthode d'eſſaier.

1. Pour la ſureté du public & du treſor royal, on eſt accoutumé d'avoir dans tous les hôtels des monnoies en Allemagne deux perſonnes, qui font les mêmes eſſais, afin qu'il y ait un contrôle. Dans certains endroits, par exemple à Vienne en Autriche, où on a remarqué la grande incertitude & varieté dans les eſſais ſelon la méthode uſitée jusqu'à preſent, & par conſequent le danger, que le public courre d'être trompé, au lieu de deux eſſaïeurs, on en a mis trois, qui font les eſſais de la même maſſe ſeparément; ſi ces trois ne ſont pas d'accord dans leur pro-

duit, on prend une moienne proportionelle, qu'on établit pour le vrai titre de la maſſe eſſaiée; mais qui ne voit qu'un ou deux ou même que tous les trois peuvent ſe tromper; j'oſe même avancer, que tous les trois ſe trompent, parce-qu'ils opèrent ſans echelle de comparaiſon, puisqu'en bonne phyſique il eſt impoſſible de déterminer la moindre proportion dans un corps ſans un point de comparaiſon, choſe qui ſe rencontre dans ma nouvelle méthode d'eſſaïer.

2. Si ſelon la nouvelle méthode deux eſſaieurs ont opère avec la même echelle de comparaiſon, & que ces echelles ſoient en parfaite égalité apres l'operation, que les eſſais de chacun ſoient égaux, mais que nonobſtant cela il ſe trouve une différence entre les eſſais de l'un & de l'autre, quoiqu'ils aient eû les mêmes poids d'eſſaieurs, il faut conclure, que la différence, quoiqu'imperceptible, provient de ce qu'en fondant les métaux enſemble, on ne les a pas mêlé convenablement, ou que les eſſais de l'un ont été détachés des coupelles trop refroidies, par où il eſt reſté de la litarge attachée aux boutons, ou un peu du fond de la coupelle, défauts faciles à corriger dans la manipulation.

3. Si les echelles de comparaiſon de deux eſſaieurs annoncent le même titre p. e. de 13 lots 6 grains, & que les eſſais de l'un & de l'autre ſoient égaux & correſpondent de même, c'eſt une marque certaine, que tous les deux ont operé avec le même degré de feu, & qu'il ne s'eſt commis aucune faute.

4. Afin que deux eſſaïeurs obtiennent le même produit tant des echelles de comparaiſon que des autres eſſais,

fais, en ſuppoſant, que les matieres d'alliage ont été bien melées dans la fonte: il ne s'agit, que de donner le même plomb tant en qualité qu'en quantité, d'operer dans les mêmes coupelles, d'obſerver le même degré de feu convenable tant pour la circulation que pour l'eclair. Toutes ces conditions ſe rencontrent dans la nouvelle méthode d'eſſaïer en obſervant ce que nous en avons dit. Quand même les eſſais de deux eſſaieurs ne ſe rencontreroient pas parfaitement égal entre eux, ils ſeront toujours en proportion avec les echelles.

5. Si trois eſſais d'une même maſſe, qui ont été traités dans une triple coupelle, ſont parfaitement égaux, tout le monde conviendra que ces trois eſſais ſont de même titre. Il en eſt par conſequent de même, ſi deux eſſais placés avec l'echelle de comparaiſon ſont p. e. de 13 lots 6 grains, ſe trouvent égaux entre eux, & ne montrent de fin que 13 lots $5\frac{1}{2}$ grains, il eſt certain, que les maſſes dont on a pris les eſſais, ſont du même titre annoncé, puisque ces eſſais on eû le même feu & le même traitement que l'echelle de comparaiſon.

6. Comme un marc d'argent fin ou de 16 lots perd ſur la coupelle 2 grains, lorsque le feu a été bien dirigé, & que ſelon le §. 8. du I. chap. l'argent ne ſe conſumme pas par l'action du feu; il s'en ſuit, qu'un argent de 13 lots 6 grains doit perdre $1\frac{2}{3}$ grain de fin, & que par conſequent un écu, qui laiſſera ſur la coupelle 13 lots 6 grains, doit avoir de fin 13 lots $7\frac{2}{3}$ grains.

Il eſt a remarquer, que tout ce qui entre dans la coupelle, n'a jusqu'a preſent pas été porté en compte, ni même

même conſideré dans les éſtimations qu'on a faites de l'argent, quoique cet argent exiſta reéllement, & qu'il auroit dû être compris dans la maſſe, qui circule dans un Etât. Cette obſervation merite la plus grande attention, & deviendra de la plus grande importance, lorsqu'il ſera queſtion d'établir un pied de monnoies, ou de faire une convention à ce ſujet.

7. Si par conſéquent dans une evaluation des éſpéces par les eſſais de l'ancienne méthode ſans echelle de comparaiſon, on avoit voulu ſavoir à juſte, ſi un écus p. e. étoit au titre de 13 lots 6 grains, en cas que la coupelle ne l'annonçat pas, il auroit fallu faire la réduction de la coupelle, par où on auroit été convaincu, ſi elle avoit pris plus ou moins de $1\frac{2}{3}$ grain, & delà on auroit pû porter un jugement certain, & fixer le vrai titre de chaque éſpece déterminé par les loix; cette précaution auroit prévenu ou arrêté toutes les difficultés & les diſputes, qui ont été occaſionées par la différence des eſſais, ſi des eſſaieurs de bonne foi avoient ſcû emploier cet expédient, & que les legislateurs euſſent établi leurs loix des avaluations ſur ce principe.

8. Si on objecte, que de cet argent, qu'on tire de la réduction de la coupelle, il s'en perd derechef une partie, je repondrai, que la perte eſt ſi peu conſiderable, qu'aucune balance ne peut la marquer; puisque ſi d'une maſſe de 13 lots 6 grains la coupelle en boit $1\frac{2}{3}$ grain, ce $1\frac{2}{3}$ grain ne perdra de ſa maſſe que $\frac{5}{432}$ d'un grain, quantité qui n'eſt certainement d'aucune conſidération.

On

On voit par cela que plus le poids d'eſſaieur & la maſſe à eſſaïer ſont petits, moins il ſe perd de l'argent dans la coupelle. Il ne faut cependant pas, que ce poids ſoit ſi petit, que ſa moindre partie, qui eſt $\frac{1}{4}$ de grain, qu'on a coutume d'annoncer & de porter en ligne de compte dans les eſſais, ne puiſſe être marquée par une bonne balance d'eſſaieur.

9. Pour prévenir toutes diſputes avec les officiers des hôtels des monnoies, qui prétendent, que le blanchiment attaque certaines éſpéces plus que les autres, & ſe procurer les eſſais tels qu'ils ont été faits du creuſet même, lorsque toute la maſſe avec l'alliage étoit en fonte, il faut avec la lime en lever la ſurface des maſſes à eſſaïer, afin d'en ôter tous les effets du blanchiment, & de reconnoitre, ſi l'alliage en a été bien fait.

10. Pour obtenir un bon mélange, il faut avoir un bon fourneau & fondre la maſſe à un feu couvert, & lorsque le tout eſt dans un bain parfait, il faut avant de couler la matiere & même en la coulant la remuer de haut en bas & de bas en haut avec une cuilliere, ou encore mieux avec un inſtrument de fer, fait exprés, Tab B. fig. 2.; par ce moien l'argent & le cuivre, qui s'uniſſent auſſi parfaitement que le vin & l'eau, formeront une maſſe homogène & bien melée.

11. La mauvaiſe manipulation dans l'art d'eſſaier, qui a été pratiquée jusqu'à préſent, a donné occaſion de croire, que le defaut provenoit de la fonte, & que le cuivre & l'argent ne s'uniſſoient pas aſſez intimement, même

en les rémuant dans le bain, & que par conſéquent il ſe trouvoit une inégalité dans les lingots.

Cette prévention ne peut plus avoir lieu, ſi on emploie la nouvelle manipulation, & qu'on veuille obſerver les régles que nous avons préſcrites. Il faudroit une terrible négligence ou malverſation dans la fonte, ſi entre les lingots, qui viennent du même creuſet, il ſe trouvoit une différence d'un quart de grain.

12. Comme le pouce cube d'argent fin péſe 13 lots 1 quintel $1\frac{5}{9}$ denier, & pareil cube de cuivre pûr 11 lots 2 quintel 2 deniers, ces deux métaux ne ſont pas extrémement différens en gravité ſpécifique, ſelon que l'hydroſtatique le démontre; il n'eſt par conſéquent pas poſſible, que ces deux métaux presque homogènes ne s'uniſſent très intimement dans une fonte réguliere pour peu qu'on les mêle. L'action de couler la maſſe en lingots ne peu pas l'alterer, comme quelques uns ſe l'imaginent, puisque toute la maſſe eſt ſuffiſamment couverte de pouſſiere de charbon, qui la garantit de l'air extérieur.

13. Pluſieurs eſſaïeurs ont le préjugé, que les eſſais, qui ont été traités avec moins de chaud, retiennent plus de plomb que ceux, qui ont eſſuiés un degré de chaleur plus conſidérable. La réduction de la coupelle les tirera de leur erreur & les convainquera du contraire.

Il eſt certain, que le moins de chaud fait que la coupelle boit moins de fin, que lorsque le degré de feu eſt plus fort; la raiſon de ceci eſt, que dans un feu plus concentré le plomb & l'argent deviennent plus fluides & par

par là plus propres à entrer dans la coupelle, qui par conſequent de ſon coté eſt plus dilatée. Voyez le §. 4. du VII. Chap.

14. La litarge & le fond de la coupelle, qui reſtent attachés aux boutons, qui n'ont pas été nettoiés avec ſoin, ſont ſouvent la cauſe, que les eſſais ſont annoncés différemment de ce qu'ils ſont en effet. Si l'on détache les boutons dans un degré de chaud convenable, on levera tous ces obſtacles, & on ne rejettera plus la faute ſur la fonte. §. 9. chap. V.

15. Les coupelles ſoit longues, ſoit triangulaires, dont on veut faire uſage, doivent être non ſeulement preſſées également, comme nous l'avons dit; mais elles doivent être aſſez vielles & ſêches, ſelon l'uſage ordinaire, pour les empecher de ſe fendre dans la chaleur, & donner la facilité de détacher les boutons.

16. Lorsque les coupelles faites par la preſſe ont seché pendant 8 jours, on peut les emploier en cas de beſoin; mais en régle elles doivent être faites d'un mois bien ſechées à l'air, qui les rend fermes & bonnes. Pareilles coupelles ſe conſerveront pluſieurs années dans le même état ſans ſe gater ni s'alterer en aucune façon.

17. Les eſſais ſe détachent dans le chaud parfaitement des coupelles, lorsqu'elles ſont ſuffiſamment ſeches & vielles, comme il a été dit au chap. V. au contraire ſi les coupelles ſont nouvellement faites, il arrive ſouvent, qu'on ne peut détacher le bouton qu'en briſant la coupelle.

18. Pour m'aſſurer de la vérité de ce que je viens d'avancer, j'ai placé des coupelles longues & triangulaires à l'orifice du fourneau pour les ſecher; j'en ai placé ſous la mouſle avant d'allumer le fourneau pour la même raiſon; je les ai peu à peu mis en chaleur pour ſervir aux eſſais, ſelon les regles; toutes les cavités ſe ſont remplis de crevaſſes; je m'en ſuis ſervi cependant, mais je n'ai pu en détacher les boutons que trés difficilement, & ils avoient retenu beaucoup du fond de la coupelle. Les eſſais quoiqu'approchant de la vérité, n'étoient pas juſtes; il eſt donc démontré par la pratique, que, ſi on veut eſſaïer avec juſteſſe, on ne doit jamais emploier des coupelles, qu'elles ne ſoient entierement privées de toute humidité par l'action de l'air.

19. Nous avons dit dès le commencement de cet ouvrage, que ſelon l'ancienne méthode les eſſais ne correſpondoient pas, d'où il réſultoit de grands inconvenients. Une des raiſons, qui occaſionnent ces défauts eſt la bouche trop reſſerrée de la plus part des fourneaux d'eſſaieur; cela empêche qu'on ne puiſſe régler le courrant de l'air ſelon les différentes variations de l'atmosphere, afin que la litarge puiſſe ſe former convenablement à l'argent qu'on eſſaie.

20. Lorsque la bouche d'un fourneau d'eſſaieur eſt plus grande à proportion de ſa ſtructure & de ſa grandeur, tels que ſont mes fourneaux ronds, & que les mouſles ont des ſouſpiraux plus élargis §. 2. chap. IV., & qu'enfin entre le fond de la mouſle & la partie antérieure du fourneau on laiſſe une rainure pour donner paſſage à la chaleur, qui vient du cendrier, on verra que la litarge ſe formera en quan-

quantité ſuffiſante même dans un grand degré de chaud, & par ce moien l'artiſte réuſſira à ſouhait dans ſon opération.

Explication des figures.

Tab. B. & C.

a. L'âtre, ſur lequel eſt poſé le fourneau à eſſaïer.

b. Le fourneau d'eſſai, qui eſt garni en

c. & en

d. de charnieres pour renverſer toute la partie ſupérieure, afin de mettre la mouſle en place, & de fournir le charbon par le haut.

e. Le tuyau pour augmenter la chaleur.

f. Le couvercle, pour faire ralentir le feu après avoir ôté le tuyau.

g. Les couliſſes du cendrier, qui ſervent auſſi à modérer la chaleur.

h. Une coupelle longue placée à l'entrée avec l'echelle de comparaiſon & les deux eſſais.

i. La mouſle pointuë.

k. Le ſupport des coupelles triangulaires.

l. Pierre pour moderer la chaleur des eſſais.

m. La plaque de fer garnie de petits creux pour y mettre les eſſais, qu'on détache des coupelles.

n. Le fer pour détacher les boutons des coupelles.

o. La pince, pour manier les coupelles triangulaires.

p. La pince, pour mettre les eſſais ſur les coupelles.

q. Un fer crochu pour diriger les coupelles longues.

r. La preſſe pour faire les coupelles ſur une plaque de fer, qui ne ſe prête pas. Lorsque les coupelles ont été bien preſſées, & qu'on veut les tirer du moule, on ôte du fond tout ce qui deborde le moule, avec un couteau: on met un morceau de fentre ſur le moule renverſé, enſuite on y place la plaque, & par le moien de la même preſſe on fait ſortir la coupelle du moule.

s. Les moules des coupelles triangulaires &

t. Les moules des coupelles longues faits de laiton fondu & bien polis en dedans.

u. Une coupelle longue.

v. Une coupelle triangulaire.

w. La plaque ronde pour faire tourner le ſupport des coupelles triangulaires, qui

x. ſe termine en pointe & repoſe ſur ſon centre avec toute la juſteſſe poſſible. Cette plaque doit deborder le fourneau, pour que l'artiſte puiſſe la faire tourner commodement ſoit avec les pinces ſoit avec la main.

y. Machine, pour faire tourner la plaque. Il eſt très libre à chacun de s'en ſervir ou non; il s'agit ſimplement qu'on faſſe tourner cette plaque d'un mouvement doux & qu'elle ſoit fixe ſur ſon centre.

z. Le fer pour remuer l'argent & le cuivre fondus dans le creuſet. Si on veut par un méchanisme appliqué au deſſus du creuſet faire mouvoir ce fer de haut en bas & de bas en haut, avant de couler la maſſe en lingots, on ſera aſſuré, que le cuivre & l'argent ſe-

ront

ront intimement mélés & formeront une maſſe homogène.

tz. Le Tuyau de tole ou de terre placé dans le milieu du fourneau d'eſſai, par lequel paſſe la barre, qui porte le ſupport des coupelles triangulaires. Il touche presque au fond de la mouſle, pour empécher, qu'aucun charbon ou cendre n'arrête le mouvement de la machine. Si ce tujau eſt de tole, on l'enduit d'argile, pour le garantir de l'action du feu.

RECHERCHES
SUR LES ÉQUATIONS AUX
DIFFÉRENCES PARTIELLES
DU PREMIER ORDRE À TROIS VARIABLES, LORSQUE CES DIFFÉRENCES NE SONT QUE LINÉAIRES.

Par
M. *JEAN TREMBLEY.*

Préſenté à l'Académie le 3 Juillet 1794.

Le ſujet que je me propoſe de traiter dans ce mémoire, eſt depuis longtems l'objet des recherches des plus grands géomètres. M. de la Grange a donné dans les mémoires de Berlin pour l'année 1785 une méthode génerale, par laquelle il a réduit l'intégration d'une équation aux différences partielles, à celle de deux équations aux différences ordinaires. Si ce but étoit rempli, on auroit obtenu, comme il le remarque fort bien, tout ce qu'on peut déſirer dans le calcul intégral aux différences partielles. Mais nous verrons que ces équations ſont d'une nature ſinguliere, & ne peuvent devenir ſusceptibles d'intégration que par des artifices ſouvent auſſi difficiles à trouver que la ſolution même que l'on cherche. M. de la Grange n'en rapporte qu'un ſeul exemple, mais cet exemple eſt trop ſimple pour donner une idée des difficultés de la méthode. Ainſi le mémoire de M.

M. de la Grange, quoique renfermant des recherches fublimes, comme tout ce qui fort de la plume de ce grand Géomètre, laiffe encore quelque chofe à défirer fur cette matiere. Ces confidérations m'ont engagé à remanier ce fujet, à expofer quelques idées propres à développer les difficultés qu'il renferme, & les reffources qu'on peut efpérer de l'Analyfe pour les furmonter. Je fens que je ne puis que bégayer après qu'un fi grand homme a parlé, mais dans les fciences exactes, fans poffeder le génie des inventeurs, il eft toujours poffible d'ajouter quelque chofe à la fcience, & de fournir à des efprits plus relevés les moyens de pénetrer plus avant.

§. 1. Soit l'équation génerale du premier degré

$$P\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + R = 0,$$

P, Q, R étant des fonctions quelconques de x, y, z. Soit l'intégrale complette de cette équation $\psi = F:\Phi$, ψ & Φ étant des fonctions de x, y, z & F: indiquant une fonction arbitraire. On confidère ici z comme une fonction de x & y, & l'on a par conféquent

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\partial y,$$

ce qui donne en différentiant l'intégrale d'abord relativement à x, enfuite relativement à y, les deux équations fuivantes:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] F' : \Phi,$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] F' : \Phi,$$

en faifant $F' : \Phi = \frac{\partial \cdot F:\Phi}{\partial \Phi}$.

Éliminant de ces deux équations $F' : \Phi$, & reduifant au même dénominateurs, on obtient

$$\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=0.$$

On a, en comparant cette équation avec l'équation propoſée

$$\frac{Q}{P}=\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)},$$
$$\frac{R}{P}=\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)}.$$

Ces valeurs fourniſſent les deux équations ſuivantes

$$P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=0,$$
$$P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0.$$

Si l'on peut trouver les intégrales particulieres de l'une de ces deux équations, on aura l'intégrale complette de l'équation propoſée. Car Φ & ψ ne diffèrent point en nature, ce qui reſulte de la forme de l'intégrale complette, qu'on peut repréſenter ainſi, $F:(\Phi,\psi)=0$. Ainſi en cherchant les intégrales particulieres de l'une de ces deux équations, on doit trouver les deux quantités Φ & ψ. Il reſulte de là un théoreme aſſez remarquable, c'eſt que la ſolution complette d'une équation aux différences partielles à trois variables, dépend de la ſolution particuliere d'une équation aux différences partielles à quatre variables, dans laquelle la quantité inconnue manque, & où il ne ſe trouve que ſes différentielles.

§. 9. Reprenons l'équation

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{Q}{P}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\frac{R}{P}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=0.$$

Soit $\Phi=\alpha$, une intégrale particuliere de cette équation, α étant une conſtante, on aura

$$\partial\Phi$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

La comparaiſon de ces deux équations donne

$$\frac{Q}{P} = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{R}{P} = -\frac{\partial z}{\partial x},$$

d'où reſultent les deux équations

$$P\partial z + R\partial x = 0, \; Q\partial x - P\partial y = 0, \text{ ou}$$

$$P\partial z + R\partial x = 0, \; Q\partial z + R\partial y = 0.$$

Ce ſont les deux équations que trouve M. de la Grange dans le memoire cité, & de l'intégration desquelles il fait dépendre la ſolution du problème. Mais il eſt évident que ces équations ne peuvent s'intégrer dans l'état où elles ſe trouvent, puiſqu'elles ne contiennent chacune que deux différentielles & trois inconnues. Il faudroit donc les combiner de maniere qu'il en reſultat une ou deux équations qui renfermaſſent les trois différentielles, & dont l'intégration donnat les quantités Φ, Ψ. C'eſt un nouveau problème qui n'eſt pas moins difficile que le premier, comme on peut s'en convaincre par les conſidérations ſuivantes.

§. 3. Les équations que nous venons de trouver,

$$\partial z + \frac{R\partial x}{P} = 0, \quad \partial z + \frac{R\partial y}{Q} = 0,$$

deviennent en y ſubſtituant les valeurs du §. 1. & reduiſant au même dénominateur,

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]\partial z + \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]\partial x = 0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right]\partial z + \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]\partial y = 0.$$

La premiere peut ſe mettre ſous cette forme en diviſant tout par ∂y,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x - \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\partial z\right] + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z = 0.$$

Mais

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\partial z = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\partial y.$$

Subſtituant cette valeur dans l'équation précedente, on a

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z = 0,$$

dont l'intégrale eſt $\psi = \beta$. La ſeconde équation devient en diviſant tout par ∂x,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z\right] + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\partial z = 0.$$

Or

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x,$$

ce qui donne en ſubſtituant cette valeur,

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\partial z = 0,$$

dont l'intégrale eſt $\Phi = \alpha$. L'on voit donc que pour tirer de la premiere des deux équations, une équation intégrable dont l'intégrale donne ψ, il faudroit connoitre la valeur de $\partial\Phi$, & réciproquement pour tirer de la ſeconde des deux équations une équation intégrale dont l'intégrale donne Φ, il faudroit connoitre la valeur de $\partial\psi$. Mais l'on ne connoit ni Φ, ni ψ, ainſi le Problème général reſte encore à réſoudre.

§. 4. Les conſidérations que nous venons d'expoſer nous font d'abord découvrir un cas très général où les équations propoſées peuvent nous conduire à l'intégration déſirée; c'eſt celui où l'une des deux quantités Φ, ψ, par exemple Φ, eſt une fonction de x & y ſeulement, ſans z. Alors l'équation $P\partial y - Q\partial x = 0$, deviendra intégrable, parce qu'el-

qu'elle ne contiendra plus de z, comme je vais le faire voir. Cette équation d'après les valeurs du §. 1. devient

$$[(\tfrac{\partial\psi}{\partial z})(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}) - (\tfrac{\partial\psi}{\partial y})(\tfrac{\partial\Phi}{\partial z})]\,\partial y - [(\tfrac{\partial\psi}{\partial x})(\tfrac{\partial\Phi}{\partial z}) - (\tfrac{\partial\psi}{\partial z})(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x})]\,\partial x = 0.$$

Maintenant ſi nous faiſons $(\frac{\partial\Phi}{\partial z}) = 0$, l'équation deviendra

$$(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y})(\tfrac{\partial\psi}{\partial z})\,\partial y + (\tfrac{\partial\Phi}{\partial x})(\tfrac{\partial\psi}{\partial z})\,\partial x = 0,$$

ou en diviſant par $(\frac{\partial\psi}{\partial z})$,

$$(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y})\,\partial y + (\tfrac{\partial\Phi}{\partial x})\,\partial x = 0,$$

équation qui ne contient plus de z, & dont l'intégrale eſt $\Phi = \alpha$. Cette équation n'eſt pas toujours immédiatement intégrable, parcequ'il peut y avoir quelque facteur commun qui ait disparu, comme nous le verrons plus bas, mais on pourra toujours retrouver ce facteur par les méthodes connues pour les équations différentielles ordinaires. Ainſi, intégrant par les méthodes ordinaires l'équation $P\,\partial y - Q\,\partial x = 0$, on aura $\Phi = \alpha$, & par conſéquent

$$\partial y = -\frac{(\frac{\partial\Phi}{\partial x})}{(\frac{\partial\Phi}{\partial y})}\,\partial x.$$

Mais dans ce cas là, l'équation $P\,\partial z + R\,\partial x = 0$, deviendra par le §. 3,

$$(\tfrac{\partial\psi}{\partial x})\,\partial x - \frac{(\frac{\partial\psi}{\partial y})}{(\frac{\partial\Phi}{\partial y})}(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x})\,\partial x + (\tfrac{\partial\psi}{\partial z})\,\partial z = 0.$$

Or on connoit la quantité ∂y qui lui eſt équivalente, on a

$$(\tfrac{\partial\psi}{\partial x})\,\partial x + (\tfrac{\partial\psi}{\partial y})\,\partial y + (\tfrac{\partial\psi}{\partial z})\,\partial z = 0,$$

dont l'intégrale ſera $\psi = \beta$. Mais cette méthode qui expoſée abſtraitement paroit fort ſimple, rencontre pluſieurs difficultés dans ſon exécution, & c'eſt ce qu'il faut développer.

§. 5. La premiere difficulté qui ſe préſente, c'eſt qu'il peut avoir disparu un facteur commun à toute l'équation, enſorte que l'équation $P\partial z + R\partial x = o$, ſe trouvant déja diviſée par ce facteur ne contient pas tous ſes termes & par conſéquent n'eſt pas ſusceptible des ſubſtitutions préſcrites. Pour remédier à cet inconvenient, je démontrerai les deux théoremes ſuivans. Le premier eſt que ce facteur qui diviſe toute l'équation eſt néceſſairement une fonction de x & de y ſeulement, ſans z. Pour le prouver, reprenons l'équation

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = o.$$

Soit p le facteur commun à toute l'équation, s'il contenoit le quantité z, on auroit en faiſant $p = o$,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\partial z = o.$$

Or p étant diviſeur de l'équation doit diviſer la quantité

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right),$$

c'eſt à dire, que lorsque $p = o$, & par conſéquent $\partial p = o$, on aura auſſi

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = o.$$

Mais dans ce cas on a

$$\frac{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)} = -\frac{\partial y}{\partial x},$$

car Φ étant une fonction de x & y ſeulement, on a

$\partial\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\partial y = o$, donc

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)} = -\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Donc

Donc lorsque $p = o$, $\partial p = o$, l'on a

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) \partial x + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) \partial y = o.$$

Ainſi en tirant de l'équation $\partial p = o$, ou

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \partial x + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \partial y + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \partial z = o,$$

la valeur de

$$\partial y = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)} \partial x - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)} \partial z,$$

& la ſubſtituant dans l'équation

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) \partial x + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) \partial y = o,$$

on aura l'équation

$$\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\right] \partial x - \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) \partial z = o,$$

qui doit devenir $= o$, lorsque $p = o$, il faut donc que le terme qui contient ∂z eſt $= o$, donc $\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = o$, donc p eſt une fonction de x & y ſeulement, ſans z.

§. 6. Le ſecond théoreme que j'ai à expoſer eſt que ce facteur p commun à toute l'équation eſt néceſſairement un facteur de Ψ. Pour le prouver, je dis que ce facteur doit diviſer $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)$, car s'il ne diviſoit pas $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)$ il faudroit qu'il diviſat à la fois $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$ & $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$, & dès lors il ſeroit un facteur de Φ. Si donc $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = p\,\Psi''$, on aura $\Psi = p\Psi' + q$, Ψ' étant $= \int \Psi'' \partial z$, & par conſéquent affecté de z dans tous ſes termes, & q étant une fonction de x & y, ſans z. On aura donc

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = p\left(\frac{\partial \Psi'}{\partial x}\right) + \Psi'\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right),$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = p\left(\frac{\partial \Psi'}{\partial y}\right) + \Psi'\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right),$$

&

& la quantité

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right),$$

deviendra

$$p\left[\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]+\Psi'\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right).$$

La quantité

$$p\left[\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]$$

eſt évidemment diviſible par p, les deux quantités

$$\Psi'\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right] \text{ \&}$$
$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right),$$

doivent être ſéparement diviſibles par p, puiſque la premiere eſt affectée de z dans tous ſes termes, & que l'autre ne contient point de z. Donc

$$\Psi'\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]$$

eſt diviſible par p, mais par la ſuppoſition Ψ' n'eſt pas diviſible par p, donc

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=\mathrm{M}\,p.$$

M étant un facteur quelconque, qui n'a pas p au dénominateur. Mais l'intégrale de cette équation eſt $\Phi=\mathrm{F}:\mu\,p$, μ étant un facteur qui ne contient pas p, que nous allons déterminer. On a en différentiant

$$\mu\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]+p\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]=0,$$

donc

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=-\frac{p}{\mu}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]:$$

ce dernier membre contient néceſſairement p puiſque p n'eſt pas un facteur de μ, ainſi en faiſant

$-\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]=M$, on a

$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=Mp$

équation différentielle propoſée : donc p eſt un facteur de Φ.

§. 7. Puis donc que nous connoiſſons Φ, nous connoîtrons néceſſairement le facteur p, par lequel il faut multiplier l'équation pour pouvoir procéder, puiſqu'il n'y a qu'à eſſayer ſucceſſivement les divers facteurs de Φ, ce qui remédie à la difficulté que nous avions propoſée. Les autres difficultés roulent principalement ſur les termes qui peuvent avoir disparu, mais la méthode des indéterminées, & l'obſervation que Φ peut être regardé comme conſtant dans l'intégration, ſuffiſent pour les ſurmonter, comme on va le voir par les exemples qui éclairciront cette méthode.

§. 8. Soit l'équation

$x\sqrt{c}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+z\sqrt{c}+2xy-3x^2\sqrt{c}-y^2\sqrt{c}=0.$

L'équation $P\partial y-Q\partial x=0$, donne $x\sqrt{c}\,\partial y-x\,\partial x=0$, d'où l'on tire $\Phi=x+y\sqrt{c}$, $\partial y=-\frac{\partial x}{x\sqrt{c}}$.

L'équation $P\partial z+R\partial x=0$, donne

$x\sqrt{c}\,\partial z+(z\sqrt{c}+2xy-3x^2\sqrt{c}-yy\sqrt{c})\,\partial x=0$,

ou en diviſant par $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=\sqrt{c}$,

$x\,\partial z+z\,\partial x+\frac{2y\partial x}{\sqrt{c}}-3x^2\partial x-yy\,\partial x=0$,

ou en ſubſtituant au lieu de $\frac{\partial x}{\sqrt{c}}$ ſa valeur $-x\,\partial y$,

$x\,\partial z+z\,\partial x-2xy\,\partial y-3x^2\partial x-yy\,\partial x=0$,

dont l'intégrale eſt $xz-xy^2-x^3=\psi$. L'intégrale complette de l'équation eſt donc

$xz-xy^2-x^3=F:(x+y\sqrt{c})$.

§. 9. Soit l'équation

$$(x-2y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+(2x-3y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)-z=0.$$

L'équation $P\partial y - Q\partial x = 0$, donne

$$(x-2y)\partial y-(2x-3y)\partial x=0,$$

d'où l'on tire

$$\Phi=(x-y)^2 e^{\frac{x}{x-y}},\ \partial y=\frac{(2x-3y)\partial x}{x-2y}.$$

L'équation $P\partial z + R\partial x = 0$, donne $(x-2y)\partial z - z\partial x = 0$, ou $\partial z - \frac{z\partial x}{x-2y} = 0$, en diviſant par $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$. Comme cette forme ne prête à aucune ſubſtitution, je vois qu'il a disparu un facteur, je multiplie par $x-y$, facteur de Φ, d'après le théoreme expoſé ci-deſſus, & j'ai

$$(x-y)\partial z-\frac{xz\partial x}{x-2y}+\frac{yz\partial x}{x-2y}=0,$$

ou pour pouvoir faire la ſubſtitution de la valeur de ∂y

$$(x-y)\partial z-\frac{z(2x-3y)\partial x}{x-2y}+\frac{z(x-2y)\partial x}{x-2y}=0,\text{ ou}$$

$$(x-y)\partial z-z\partial y+z\partial x=0,$$

équation dont l'intégrale eſt $z(x-y)=\psi$. L'intégrale complette eſt donc

$$(x-y)z=F:(x-y)^2 e^{\frac{x}{x-y}}.$$

§. 10. Soit l'équation

$$(x+y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-(x-y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)-z=0.$$

L'équation $P\partial y - Q\partial x = 0$, donne

$$(x+y)\partial y+(x-y)\partial x=0,$$

d'où l'on tire

$$\Phi=\sqrt{(x^2+y^2)}\,e^{-\text{Arc.tang.}\frac{x}{y}},\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=\frac{x+y}{\sqrt{(xx+yy)}},$$

ab-

abſtraction faite de la quantité exponentielle, qui affecte tous les termes de l'équation.

L'équation $P\partial z + R\partial x = o$, donne $(x+y)\partial z - z\partial x = o$, ou en diviſant par $(\frac{\partial\Phi}{\partial y})$,

$$\partial z \sqrt{(x x + y y)} - \frac{z\partial x \sqrt{(x x + y y)}}{x+y} = o. \quad \text{Or}$$

$$\partial y = -\frac{(x-y)\partial x}{x+y}.$$

Comme la forme actuelle ne prête à aucune ſubſtitution, je multiplie par $\sqrt{(x x + y y)}$, facteur de Φ, & j'ai

$$\partial z (x x + y y) - \frac{z\partial x (x x + y y)}{x+y} = o. \quad \text{Or}$$

$$x x + y y = (x+y) x - (x-y) y.$$

Subſtituant cette valeur dans l'équation, j'obtiens

$$\partial z (x x + y y) - \frac{z\partial x (x+y) x}{x+y} + \frac{z\partial x (x-y) y}{x+y} = o,$$

ou mettant pour $\frac{(x-y)\partial x}{x+y}$ ſa valeur $-\partial y$,

$$\partial z (x x + y y) - z x \partial x - z y \partial y = o,$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{z}{\sqrt{(x x + y y)}} = \Psi.$$

L'intégrale complette eſt donc

$$\frac{z}{\sqrt{(x x + y y)}} = F : \sqrt{(x^2 + y^2)}\, e^{-\text{Arc. tang.}\frac{x}{y}}.$$

§. 11. Soit l'équation

$$4y^3(\alpha y + x^3)(\tfrac{\partial z}{\partial x}) - 4x^3(\alpha y + x^3)(\tfrac{\partial z}{\partial y}) - (12 x^2 y^3 - 4\alpha x^3) z = o.$$

L'équation $P\partial y - Q\partial x = o$, donne $4y^3\partial y + 4x^3\partial x = o$, d'où l'on tire

$$\Phi = x^4 + y^4, \ (\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}) = 4y^3, \ \partial y = -\frac{x^3\partial x}{y^3}.$$

L'équation $P\partial z + R\partial x = o$, donne

$$4y^3(\alpha y + x^3)\partial z - (12 x^2 y^3 - 4\alpha x^3) z\partial x = o,$$

ou en divisant par $(\frac{\partial \Phi}{\partial y})$,

$$(\alpha y + x^3)\,\partial z - z\,(3x^2 - \tfrac{\alpha x^3}{y^3})\,\partial x = 0,$$

ou en mettant pour $-\frac{x^3 \partial x}{y^3}$, sa valeur ∂y,

$$(\alpha y + x^3)\,\partial z - 3 z x^2 \partial x - \alpha z \partial y = 0,$$

dont l'intégrale est $\frac{z}{\alpha y + x^3} = \psi$. L'intégrale complette est donc $\frac{z}{\alpha y + x^3} = F : (x^4 + y^4)$.

§. 12. Soit l'équation

$$\begin{aligned}(4x^2y^3 - 7xy^4 + 4y^5 + \alpha^3 x^2)\,(\tfrac{\partial z}{\partial x}) \\ + (3\alpha^3 xy + y^5 - \alpha^3 x^2 - \alpha^3 y^2)\,(\tfrac{\partial z}{\partial y}) \\ - (6\alpha^3 xy^2 + 2y^6 - 2\alpha^3 x^2 y - 2\alpha^3 y^3 + 8x^3 y^3 - 14 x^2 y^4 \\ + 8xy^5 + 2\alpha^3 x^3)\,z = 0.\end{aligned}$$

L'équation $P\,\partial y - Q\,\partial x = 0$, donne

$$(4x^2y^3 - 7xy^4 + 4y^5 + \alpha^3 x^2)\,\partial y - (3\alpha^3 xy + y^5 - \alpha^3 x^2 - \alpha^3 y^2)\,\partial x = 0,$$

d'où l'on tire $\Phi = (\alpha^3 x + y^4)\, e^{\frac{x}{x-y}}$, ce qui donne

$$(\tfrac{\partial \Phi}{\partial y}) = \tfrac{4x^2y^3 - 7xy^4 + 4y^5 + \alpha^3 x^2}{(x-y)^2},$$

$$\partial y = \tfrac{3\alpha^3 xy + y^5 - \alpha^3 x^2 - \alpha^3 y^2}{4x^2y^3 - 7xy^4 + 4y^5 + \alpha^3 x^2}\,\partial x.$$

L'équation $P\,\partial z + R\,\partial x = 0$, donne

$$\begin{aligned}(4x^2y^3 - 7xy^4 + 4y^5 + \alpha^3 x^2)\,\partial z \\ - [6\alpha^3 xy^2 + 2y^6 - 2\alpha^3 x^2 y - 2\alpha^3 y^3 + 8x^3 y^3 \\ - 14 x^2 y^4 + 8xy^5 + 2\alpha^3 x^3]\,z\,\partial x = 0,\end{aligned}$$

ou en divisant par $(\frac{\partial \Phi}{\partial y})$,

$$(x-y)^2 \partial z - \frac{(6\alpha^3 xy^2 + 2y^6 - 2\alpha^3 x^2 y - 2\alpha^3 y^3 + 8x^3 y^3 - 14 x^2 y^4 + 8xy^5 + 2\alpha^3 x^3) z \partial x}{\frac{4x^2y^3 - 7xy^4 + 4y^5 + \alpha^3 x^2}{(x-y)^2}} = 0,$$

ou

ou $(x-y)^2\,\partial z - \frac{2y(3\alpha^3 xy + y^5 - \alpha^3 x^2 - \alpha^3 y^2)(x-y)^2\,\partial x}{4x^2y^3 - 7xy^4 + 4y^5 + \alpha^3 x^2}$

$$- \frac{2x(4x^2y^3 - 7xy^4 + 4y^5 + \alpha^3 x^2)(x-y)^2\,\partial x}{4x^2y^3 - 7xy^4 + 4y^5 + \alpha^3 x^2} = 0, \text{ ou}$$

$$(x-y)^2\,\partial z - (2y\,\partial y + 2x\,\partial x)(x-y)^2 z = 0, \text{ ou}$$

$$\partial z - (2y\,\partial y - 2x\,\partial x)z = 0,$$

équation dont l'intégrale eſt $z e^{-x^2-y^2} = \psi$. L'intégrale complette eſt donc

$$z e^{-x^2-y^2} = F : (\alpha^3 x + y^4)\, e^{\frac{x}{x-y}}.$$

§. 13. Soit l'équation

$$y(2z+y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + x(2z+y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + z\,z + x\,z + y\,z = 0.$$

L'équation $P\,\partial y - Q\,\partial x = 0$, donne $y\,\partial y - x\,\partial x = 0$, d'où l'on tire $\Phi = y\,y - x\,x$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 2y$, $\partial y = \frac{x\,\partial x}{y}$. L'équation $P\,\partial z + R\,\partial x = 0$, donne

$$y(2z+y)\,\partial z + (z\,z + x\,z + y\,z)\,\partial x = 0,$$

ou en diviſant par $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$,

$$(2z+y)\,\partial z + \left(\frac{z\,z}{y} + \frac{x\,z}{y} + z\right)\partial x = 0.$$

Je ſubſtitue pour $\frac{x\,\partial x}{y}$ ſa valeur, ∂y & j'ai

$$(2z+y)\,\partial z + \frac{(z\,z + y\,z)}{y}\,\partial x + z\,\partial y = 0.$$

Cette équation n'étant pas intégrable, je la multiplie par un des facteurs de Φ, par exemple, par $x+y$, & j'ai

$$(x+y)(2z+y)\partial z + \frac{(x\,z\,z + x\,y\,z)}{y}\partial x + (z\,z + y\,z)\partial x + (x\,z + y\,z)\,\partial y = 0,$$

& en ſubſtituant toujours pour $\frac{x\,\partial x}{y}$ ſa valeur ∂y, j'obtiens

$$(x+y)(2z+y)\partial z + (z\,z + 2y\,z + x\,z)\partial y + (z\,z + y\,z)\partial x = 0,$$

équation dont l'intégrale eſt

$$(z\,z + y\,z)(x+y) = \psi.$$

L'intégrale complette eſt donc

$$(z\,z+y\,z)(x+y)=F:(x\,x-y\,y).$$

Si j'avois multiplié l'équation par $x-y$, elle ſeroit devenue

$$(x-y)(2\,z+y)\,\partial z+\tfrac{x\,\partial x}{y}(z\,z+y\,z)-(z\,z+y\,z)\,\partial x$$
$$+(x-y)\,z\,\partial y=0,$$

ou en ſubſtituant pour $\frac{x\,\partial x}{y}$ ſa valeur ∂y, j'obtiens

$$(x-y)(2\,z+y)\,\partial z+(z\,z+x\,z)\,\partial y-(z\,z+y\,z)\,\partial x=0,$$

équation dont l'intégrale eſt $\frac{z\,z+x\,z}{x-y}=\psi$. L'intégrale complette eſt donc

$$\tfrac{z\,z+x\,z}{x-y}=F:(x\,x-y\,y):$$

intégrale qui revient évidemment au même que la précédente, puiſque au lieu de $F:(x\,x-y\,y)$ je puis mettre $\frac{F:(x\,x-y\,y)}{x\,x-y\,y}$, & alors j'ai

$$(z\,z+y\,z)(x+y)=F:(x\,x-y\,y),$$

comme ci-deſſûs. Toutes les fois donc que $\Phi=\Phi'\,\Phi''$, Φ', Φ'' étant des facteurs quelconques, & que Φ' rend l'équation intégrable, Φ'' la rendra auſſi intégrable, ce qui ſe déduit immédiatement de ce que l'on peut multiplier ψ par une fonction quelconque de Φ ſans changer l'intégrale.

§. 14. Soit l'équation

$$x\,y\left(\tfrac{\partial z}{\partial x}\right)-y\,(3\,x+2\,y)\left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right)-(6\,x+5\,y)\,z=0.$$

L'équation $P\,\partial y-Q\,\partial x=0$, donne

$$x\,\partial y+(3\,x+2\,y)\,\partial x=0,$$

d'où l'on tire

$$\Phi=x^2(x+y),\quad\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=x^2,$$
$$\partial y=-\tfrac{(3\,x+2\,y)}{x}\,\partial x=-\left(3+\tfrac{2\,y}{x}\right)\partial x.$$

L'é-

L'équation $P\partial z + R\partial x = o$, donne

$$xy\partial z - (6x + 5y) z\partial x = o,$$

ou en diviſant par $(\frac{\partial \Phi}{\partial y})$,

$$\frac{y\partial z}{x} - \frac{6z\partial x}{x} - \frac{5yz\partial x}{xx} = o, \text{ ou}$$

$$\frac{y\partial z}{x} - \frac{2z}{x}(3 + \frac{2y}{x})\partial x - \frac{yz\partial x}{x} = o, \text{ ou}$$

$$\frac{y\partial z}{x} + \frac{2z\partial y}{x} - \frac{yz}{x}\partial x = o,$$

équation intégrable dont l'intégrale eſt $\frac{y^2 z}{x} = \psi$. L'intégrale complette eſt donc $\frac{y^2 z}{x} = F : x^2 (x + y)$.

§. 15. Soit l'équation

$$(\alpha x + \beta y)(\tfrac{\partial z}{\partial x}) + (\gamma x + \delta y)(\tfrac{\partial z}{\partial y}) - z = o.$$

L'équation $P\partial y - Q\partial x = o$, donne

$$\Phi = (y + qx)^{I + B'} (y + px)^{I - B'},$$

en faiſant pour abréger $p = \frac{\alpha - \delta - \sqrt{[(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma]}}{2\beta}$,

$$q = \frac{\alpha - \delta + \sqrt{[(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma]}}{2\beta}, \quad B' = \frac{\alpha^2 + \delta}{\sqrt{[(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma]}};$$

donc

$$(\tfrac{\partial \Phi}{\partial y}) = [2y + (p + q)x + (p - q)B'x](y + qx)^{B'} (y + px)^{-B'}$$

$= [$parceque $p + q = \frac{\alpha - \delta}{\beta}$, $p - q = \frac{\sqrt{[(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma]}}{\beta}$,

$$(p - q)B' = \tfrac{\alpha + \delta}{\beta}] = \tfrac{2}{3}(\alpha x + \beta y)(y + qx)^{B'} (y + px)^{-B'},$$

$$\partial y = \tfrac{(\gamma x + \delta y)}{\alpha x + \beta y}\partial x.$$

L'équation $P\partial z + R\partial x = o$, donne $(\alpha x + \beta y)\partial z - z\partial x = o$, ou en diviſant par $(\frac{\partial \Phi}{\partial y})$, $\frac{2}{\beta}\partial z (y + qx)^{B'} (y + px)^{-B'} - \frac{-2z\partial x}{\beta(\alpha x + \beta y)}(y + qx)^{B'} (y + px)^{-B'} = o$, ou $\partial z - \frac{z\partial x}{\alpha x + \beta y} = o$. Comme cette forme n'eſt pas ſuſceptible de ſubſtitution, je multiplie par $y + px$ facteur de Φ, & j'ai

$(y +$

$$(y + p\,x)\,\partial z - \frac{z\,\partial x\,(y + p\,x)}{\alpha x + \beta y} = 0.$$

Pour pouvoir fubftituer la valeur

$$\partial y = \frac{(\gamma x + \delta y)\,\partial x}{\alpha x + \beta y},$$ je fais

$$-\frac{(y + p\,x)}{\alpha x + \beta y} = \frac{A x + B y}{\alpha x + \beta y} + \frac{C(\gamma x + \delta y)}{\alpha x + \beta y};$$

A, B, C étant des conſtantes indéterminées, je tire delà $(A + C\gamma + p)\,x + (B + C\delta + 1)\,y = 0$, ce qui donne les deux équations, $A + C\gamma + p = 0$, $B + C\delta + 1 = 0$. On tire delà $C = -\frac{(A + p)}{\gamma} = -\frac{(B + 1)}{\delta}$, donc $B = \frac{A\delta + p\delta - \gamma}{\gamma}$. Notre équation devient donc,

$$\left[\frac{A x + \frac{(A\delta + p\delta - \gamma)\,y}{\gamma}}{\alpha x + \beta y} - \frac{(A + p)}{\gamma}\left(\frac{\gamma x + \delta y}{\alpha x + \beta y}\right)\right] z\,\partial x + (y + p\,x)\,\partial z = 0,$$

ou en mettant pour $\frac{\partial x\,(\gamma x + \delta y)}{\alpha x + \beta y}$ ſa valeur ∂y,

$$\left(\frac{A x + \frac{[A\delta + (p\delta - \gamma)\,y]}{\gamma}}{\alpha x + \beta y}\right) z\,\partial x - \frac{(A + p)}{\gamma} z\,\partial y + (y + p\,x)\,\partial z = 0.$$

Or pour que cette équation devienne intégrable, il faut que les termes affectés de ∂x & ∂y ſoyent un multiple de la différentielle de $y + p\,x$: il faut donc que

$$\frac{A + p}{\gamma} = -\mu,$$

$$\frac{A\gamma x + (A\delta + p\delta - \gamma)\,y}{\gamma(\alpha x + \beta y)} = \mu p;$$

cette derniere équation donne

$$A\gamma x + (A\delta + p\delta - \gamma)\,y = \mu p\gamma(\alpha x + \beta y),$$

ou $A\gamma = \alpha\mu p\gamma$; $A\delta + p\delta - \gamma = \mu p\beta\gamma$, donc

$$A = \alpha\mu p = \frac{\mu p\beta\gamma - p\delta + \gamma}{\delta},$$

$\mu = \frac{\gamma - p\delta}{p(\alpha\delta - \beta\gamma)}$. Mais

$\gamma =$

$$\gamma = -\frac{[\alpha-\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}]\,[\alpha-\delta+\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}]}{4\beta},$$

$$\alpha\delta-\beta\gamma = \frac{[\alpha+\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}]\,[\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}]}{4}.$$

Donc

$$\gamma - p\delta = -\frac{[\alpha-\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}]\,[\alpha-\delta+\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}]}{4\beta}$$

$$-\delta\left[\frac{\alpha-\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}{2\beta}\right] =$$

$$-\left[\frac{\alpha-\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}{4\beta}\right][\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}],$$

$$\mu = \frac{-\left[\frac{\alpha-\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}{4\beta}\right][\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}]}{\left[\frac{\alpha-\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}{2\beta}\right]\frac{[\alpha+\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}]\,[\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}]}{4}}$$

$$= -\frac{2}{\alpha+\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}},$$

$C = \mu$, $A = \alpha\,\mu\,p$, $B = \frac{A\delta+p\delta-\gamma}{\gamma} = \beta\,\mu\,p$. L'équation devient donc,

$$\frac{\mu p\,(x+\beta y)}{\alpha x+\beta y} z\,\partial x + \mu z\,\partial y + (y+px)\,\partial z = 0, \text{ ou}$$

$$(y+px)\,\partial z + \mu z\,(\partial y + p\,\partial x) = 0,$$

équation dont l'intégrale eſt $(y+px)^{\mu} z = \psi$. L'intégrale complette eſt donc

$$(y+px)^{\mu} z = F:(y+px)^{I-B'}(y+qx)^{I+B'}.$$

Si l'on avoit multiplié l'équation par $y+qx$, on auroit eu

$$(y+qx)^{\nu} z = F:(y+px)^{I-B'}(y+qx)^{I+B'},$$

ayant

$$\nu = -\frac{2}{\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}.$$

On peut de ces deux valeurs de ψ en tirer une troiſième de la maniere ſuivante: ſoit $\psi = z\,\psi'^{\mu}$, $\psi' = z\,\psi''^{\nu}$. Je fais $\psi = z\,\psi'^{m}\psi''^{n}$. Les deux premieres expreſſions me donnent

$$P\mu\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)+Q\mu\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)-R\psi'=0;$$
$$P\nu\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)+Q\nu\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)-R\psi''=0.$$

Sa troiſième expreſſion donnera

$$\left.\begin{aligned} &P m\psi''\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)+Q m\psi''\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)-R\psi'\psi'' \\ &+P n\psi'\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)+Q n\psi'\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}=0.$$

Subſtituant dans la troiſième équation les valeurs tirées des deux premieres, on aura $\frac{m}{\mu}+\frac{n}{\nu}-1=0$. L'on voit que l'une des deux quantités m, n reſte indéterminée. Faiſant $m=n$, on aura $m=\frac{1}{\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}}$, $\psi=z(\psi'\psi'')^m$. Or $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=-(\alpha+\beta)$, donc $m=-\frac{1}{\alpha+\beta}$. Donc l'intégrale complette ſera,

$$[(y+px)(y+qx)]^{-\frac{1}{\alpha+\delta}}z=(yy+\tfrac{\alpha-\delta}{\beta}xy-\tfrac{\gamma}{\beta}xx)^{-\frac{1}{\alpha+\delta}}$$
$$=F:(y+qx)^{1+B'}(y+px)^{1-B'}.$$

Cette valeur ſervira dans le cas où le radical deviendroit imaginaire. Dans ce cas on évitera auſſi les imaginaires dans la forme de Φ, en intégrant par les arcs de cercle, au lieu d'intégrer par les logarithmes.

§. 16. Soit l'équation

$$xx\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+yy\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)-nxy=0.$$

L'équation $P\partial y-Q\partial x=0$, donne $\Phi=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$, ce qui donne $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=-\frac{1}{yy}$, $\partial y=\frac{yy}{xx}\partial x$. L'équation $P\partial z+R\partial x=0$, donne $xx\partial z-nxy\partial x=0$, ou en diviſant par $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$, $xxyy\partial z-nxy^3\partial x=0$. Comme cette forme ne prête à aucune ſubſtitution, je multiplie l'équation par $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$, ce qui me donne,

$$x\,x\,y\,y\,\partial z\left(\tfrac{1}{y}-\tfrac{1}{x}\right)-n\,x\,y\,y\,\partial x+n\,y^3\partial x=0,\text{ ou}$$
$$y\,y\,\partial z\left(\tfrac{1}{y}-\tfrac{1}{x}\right)-\tfrac{n\,y\,y}{x}\,\partial x+\tfrac{n\,y^3}{x\,x}\,\partial x=0,$$

ou en ſubſtituant ∂y pour $\frac{y\,y}{x\,x}\partial x$, on aura

$$y\,y\,\partial z\left(\tfrac{1}{y}-\tfrac{1}{x}\right)-\tfrac{n\,y\,y}{x}\,\partial x+n\,y\,\partial y=0,\text{ ou}$$
$$\partial z\left(\tfrac{1}{y}-\tfrac{1}{x}\right)-\tfrac{n\,\partial x}{x}+\tfrac{n\,\partial y}{y}=0.$$

Mais comme on a, $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\Phi$, & que Φ eſt ſuppoſé conſtant, puiſque l'on fait $\partial\Phi=0$, cette équation eſt intégrable, & l'on a, $\psi=\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)z+n\,l\,\frac{y}{x}$. L'intégrale complette eſt donc $\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)z+n\,l\,\frac{y}{x}=\mathrm{F}:\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$.

17. Soit l'équation

$$x\,x\left(\tfrac{\partial z}{\partial x}\right)-x\,y\left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right)+y\,y=0.$$

L'équation $\mathrm{P}\,\partial y-\mathrm{Q}\,\partial x=0$, donne $\Phi=x\,y$, donc $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=x$, $\partial y=-\frac{y\,\partial x}{x}$. L'équation $\mathrm{P}\,\partial z+\mathrm{R}\,\partial x=0$, donne $x\,x\,\partial z+y\,y\,\partial x=0$, ou en diviſant par $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$,

$$x\,\partial z+\tfrac{y\,y\,\partial x}{x}=0.$$

En multipliant cette équation par un facteur de Φ, elle n'en deviendroit pas plus ſuſceptible d'intégration. Mais il faut conſidérer que puiſque l'on ſuppoſe $\partial\Phi=0$, on peut ajouter à cette équation un multiple quelconque de $\partial\Phi$ ſans la changer. Or $\partial\Phi=x\,\partial y+y\,\partial x$. Donc $x\,\partial y+y\,\partial x=0$, ou $y\,\partial y+\frac{y\,y\,\partial x}{x}=0$, ou

$$m\,y\,\partial y+\tfrac{m\,y\,y\,\partial x}{x}=0,$$

m étant un coëfficient conſtant. L'équation ſera donc

$$x\,\partial z+(m+1)\,\tfrac{y\,y\,\partial x}{x}+m\,y\,\partial y=0,\text{ ou}$$
$$\partial z+(m+1)\,\tfrac{y\,y\,\partial x}{x\,x}+\tfrac{m\,y\,\partial y}{x}=0,$$

équation qui eſt évidemment intégrable en faiſant $m=-\frac{1}{3}$.

On a alors $\psi = z - \frac{yy}{3x}$. L'intégrale complette eſt donc

$$z - \frac{yy}{3x} = F : xy.$$

18. Soit l'équation

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - n\sqrt{(xx+yy)} = 0.$$

L'équation $P\partial y - Q\partial x = 0$, donne $\Phi = \frac{x}{y}$, donc $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = -\frac{x}{yy}$, $\partial y = \frac{y\partial x}{x}$. L'équation $P\partial z + R\partial x = 0$, donne

$$x\partial z - n\partial x\sqrt{(xx+yy)} = 0,$$

ou diviſant par $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$,

$$yy\partial z - \frac{nyy\partial x}{x}\sqrt{(xx+yy)} = 0, \text{ ou}$$

$$yy\left[\partial z - \frac{n\partial x}{x}\,\frac{(xx+yy)}{\sqrt{(xx+yy)}}\right] = 0, \text{ ou}$$

$$\partial z - \frac{nx\partial x}{\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{\frac{nyy\partial x}{x}}{\sqrt{(xx+yy)}} = 0,$$

ou en ſubſtituant pour $\frac{y\partial x}{x}$ ſa valeur ∂y,

$$\partial z - \frac{nx\partial x - ny\partial y}{\sqrt{(xx+yy)}} = 0,$$

dont l'intégrale eſt $z - n\sqrt{(xx+yy)} = \psi$. L'intégrale complette eſt donc

$$z - n\sqrt{(xx+yy)} = F : \frac{x}{y}.$$

19. L'équation

$$(2y^2 + 2x^3y + 2xy^2z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - (2xy + 2x^4 + 2x^2yz)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 4xy + 2x^2yz + 2y^2z^2 - 2xy - 4x^3y - 4xy^2z = 0.$$

L'équation $P\partial y - Q\partial x = 0$, donne $\Phi = xx + yy$, donc $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 2y$, $\partial y = -\frac{x\partial x}{y}$. L'équation $P\partial z + R\partial x = 0$, donne

donne

$$(2y^2+2x^3y+2xy^2z)\,\partial z + (4xy+2x^2yz+2y^2z^2-2xz-4x^3y-4xy^2z)\,\partial x = 0,$$

ou en divisant par $(\frac{\partial\Phi}{\partial y})$,

$$(y+x^3+xyz)\,\partial z+(2x+x^2z+yz^2-\tfrac{xz}{y}-2x^3-2xyz)\,\partial x=0,$$

ou en substituant pour $-\frac{x\,\partial x}{y}$ sa valeur, on a

$$(y+x^3+xyz)\,\partial z + z\,\partial y + (2x+x^2z+yz^2-2x^3-2xyz)\,\partial x = 0,$$

équation qu'on rend intégrable en la divisant par x^2+yz, & dont l'intégrale est

$$l(x^2+yz)+xz-x^2=\psi.$$

L'intégrale complette est donc

$$l(x^2+yz)+xz-x^2=F:(xx+yy).$$

§. 20. Soit l'équation

$$\begin{aligned}&(y^2-yz-1)(2xy-x^3-3y^2)\left(\tfrac{\partial z}{\partial x}\right)\\&-(y^2-yz-1)(4x^3-3x^2y+y^2)\left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right)\\&-x^3y+x^3z-4x^3+4x^3z^2+3x^2z-4x^3yz+3x^2y^2z\\&-3x^2yz^2+2xy^2-2xyz-3y^3+3y^2z\\&-3y^2+2yz-y^3z+y^2z^2=0.\end{aligned}$$

L'équation $P\,\partial y - Q\,\partial x = 0$, donne $\Phi = (x-y)(x^3+y^2)$, donc $(\frac{\partial\Phi}{\partial y}) = -x^3+2xy-3y^2$,

$$\partial y = \frac{(4x^3-3x^2y+y^2)\,\partial x}{x^3-2xy+3y^2}.$$

L'équation $P\,\partial z + R\,\partial x = 0$, donne

$$\begin{aligned}&(y^2-yz-1)(2xy-x^3-3y^2)\,\partial z+(x^3z-x^3y-4x^3+4x^3z^2+3x^2z\\&-4x^3yz+3x^2y^2z-3x^2yz^2+2xy^2-2xyz\\&-3y^3+3y^2z-3y^2+2yz-y^3z+y^2z^2)\,\partial x=0,\end{aligned}$$

ou en diviſant par $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$,

$$(y^2-yz-1)\,\partial z+\left(\frac{x^3z-x^3y-4x^3+4x^3z^2+3x^2z-4x^3yz+3x^2y^2z-3x^2yz^2}{x^3-2xy+3y^2}\right)\partial x$$
$$+\left(\frac{2xy^2-2xyz-3y^3+3y^2z-3y^2+2yz-y^3z+y^2z^2}{x^3-2xy+3y^2}\right)\partial x=0.$$

La ſubſtitution de ∂y au lieu de ſa valeur ne réuſſiſſant pas, je multiplie toute l'équation par $x-y$ facteur de Φ, & j'ai

$$(x-y)\,(y^2-yz-1)\,\partial z+\left(\frac{x^3y^2-x^3yz+4x^3y-7x^3yz^2-5x^2yz}{x^3-2xy+3y^2}\right)\partial x$$
$$+\left(\frac{7x^3y^2z-3x^2y^3z+3x^2y^2z^2-2xy^3+5xy^2z-3y^4-3y^3z}{x^3-2xy+3y^2}\right)\partial x$$
$$+\left(\frac{3y^3-2y^2z+y^4z-y^3z^2+x^4z-x^4y-4x^4+4x^4z^2+3x^3z-4x^4yz}{x^3-2xy+3y^2}\right)\partial x$$
$$+\left(\frac{2x^2y^2-3xy^3-3xy^2+2xyz-xy^3z+xy^2z^2}{x^3-2xy+3y^2}\right)\partial x=0.$$

Maintenant il s'agit de reduire le terme affecté de ∂x à cette forme,

$$M+N\,\frac{(4x^3-3x^2y+y^2)}{x^3-2xy+3y^2}=\frac{M(x^3-2xy+3y^2)+N(4x^3-3x^2y+y^2)}{x^3-2xy+3y^2}.$$

Il s'agit donc de trouver les formes des termes qui entrent dans M & N. Or pour trouver M, il ſuffit de diviſer le numérateur du terme affecté de ∂x par $x^3-2xy+3y^2$, en n'ayant égard qu'à la forme des termes & nullement aux coëfficiens, & mettant enſuite devant chaque terme un coëfficient indéterminé, je trouve

$$M=\alpha z+\beta xy+\gamma yz+\delta y^2+\varepsilon y+\zeta yz^2+\eta y^2z+\varkappa xz.$$

Je diviſe de même le numérateur en queſtion par $4x^3-3x^2y+y^2$, pour trouver N, & j'ai

$$N=Ax+Bxz^2+Cxyz+Dxz+Exy+Fy$$
$$+Gyz^2+Hy^2z+Iz.$$

Il ne faut pas craindre de prendre des termes inutiles, parceque l'opération donnera leurs coëfficiens égaux à zero.

10. Cela posé appellant Z le numérateur, j'ai l'équation

$$M(x^3 - 2xy + 3y^2) + N(4x^3 - 3x^2y + y^2) - Z = 0,$$

& substituant les valeurs on a,

$$\beta x^4y+\gamma x^3yz+\delta x^3y^2+\zeta x^3yz^2+\eta x^3y^2z+4\kappa x^3z-2\alpha xyz-2\gamma xy^2z-2\delta xy^3$$

$$+4E \quad -3D \quad +1 \quad +4G \quad +4H \quad +\alpha \quad +2 \quad +D \quad +E$$
$$+1 \quad -1 \quad -3B \quad -3C \quad +3 \quad +5 \quad -3$$
$$-7 \quad +7 \quad +3H \quad +3\beta$$
$$-2$$

$$-2\zeta xy^2z^2-2\eta xy^3z+3\gamma y^3z+3\delta y^4+3\varepsilon y^3+3\zeta y^3z^2+3\eta y^4z+\kappa y^2z+4Ax^4$$

$$+B \quad +C \quad -3 \quad +3 \quad +F \quad +G \quad +H \quad +3\alpha \quad -4$$
$$+1 \quad -1 \quad +3 \quad -1 \quad +1 \quad -2$$

$$+4Bx^4z^2+4Cx^4yz+4Dx^4z+4Ex^3y-3Fx^2y^2-3Gx^2y^2z^2$$

$$+4 \quad -4 \quad +1 \quad -3A \quad +2 \quad +3$$
$$+H \quad +\varepsilon \quad -2\beta$$
$$+4$$

$$\left.\begin{array}{llll} -3Hx^2y^3z & -3Ix^2yz & +Axy^2 \\ -3 & -5 & -3 \\ & -2H & -2\varepsilon \end{array}\right\} = 0.$$

On tire delà $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$, $\zeta = 0$, $\eta = 0$, $\kappa = -1$;

$A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 1$, $H = -1$, $I = -1$.

L'équation devient donc,

$$(y^2 - yz - 1)(x - y)\,\partial z + \frac{(z - xz + yz - y + xy - yy)}{x^3 - 2xy + 3y^2}\,\partial x$$
$$+ (zy - z - x + y^2z - xyz - yz^2 + xz^2)\,\frac{(4x^3 - 3x^2y + y^2)}{x^3 - 2xy + 3y^2}\,\partial x = 0,$$

ou en substituant ∂y au lieu de $\frac{(4x^3 - 3x^2y + y^2)}{x^3 - 2xy + 3y^2}\,\partial x$, on obtient,

$(y^2 -$

$$(y^2-yz-1)(x-y)\partial z$$
$$+(2y-z-x+y^2z-xyz-yz^2+xz^2)\partial y$$
$$+(z-xz+yz-y+xy-yy)\partial x=0,$$

équation dont l'intégrale eſt

$$l(y-z)-l(x-y)+yz+x.$$

L'intégrale complette eſt donc

$$l\left(\frac{y-z}{x-y}\right)+yz+x=F:(x-y)(x^3+y^2).$$

§. 21. La méthode que nous venons d'expoſer, ne peut, comme nous l'avons déjà remarqué, s'appliquer au cas où ψ & Φ ſont des fonctions de x, y & z. Il faut donc employer d'autres principes, ſi l'on veut eſſayer de réſoudre le problème général. Cette recherche eſt ſans doute une des plus difficiles que puiſſe entreprendre l'Analyſe. Je vais expoſer avec autant de ſimplicité qu'il me ſera poſſible les idées qui ſe ſont préſentées à moi ſur cet objet, & la méthode qui en reſulte. Cette méthode ne préſente gueres d'autres difficultés que ſa longueur, je ne la donne cependant que comme un eſſai qui pourra engager les Géomètres à faire de nouveaux efforts pour pouſſer une branche auſſi importante de l'Analyſe, de laquelle dépend la ſolution d'un grand nombre de problèmes phyſiques.

§. 22. Nous avons trouvé ci-deſſûs l'équation

$$P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=0,$$

ſoit $\Phi=\Phi'\Phi''$, Φ' & Φ'' étant des fonctions quelconques de x, y, z, l'équation deviendra,

$$\Phi''\left[P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\right]$$
$$+\Phi'\left[P\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\right]=0;$$

donc

donc

$$P\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)=0,$$

lorsque $\Phi'=0$. Cette propriété eſt commune à tous les facteurs de Φ & peut ſervir à les diſtinguer. De plus ſi l'on à une quantité de la forme $\pi\Phi+p$, π & p étant des fonctions quelconques de x, y, z, on aura

$$\begin{aligned}&P\left[\frac{\partial.(\pi\Phi+p)}{\partial x}\right]+Q\left[\frac{\partial.\pi\Phi+p)}{\partial y}\right]-R\left[\frac{\partial.(\pi\Phi+p)}{\partial z}\right]\\&=\pi\left[P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]\\&+\Phi\left[P\left(\frac{\partial\pi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\pi}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\pi}{\partial z}\right)\right]\\&+P\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

$=$ (en ſuppoſant $\Phi=0$)

$$P\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right),$$

quantité qui deviendra $=0$, ſi $p=0$. Mettant donc devant chaque terme de la quantité $\pi\Phi+p$ un coëfficient indéterminé, l'équation

$$P\left[\frac{\partial.(\pi\Phi+p)}{\partial x}\right]+Q\left[\frac{\partial.(\pi\Phi+p)}{\partial y}\right]-R\left[\frac{\partial.(\pi\Phi+p)}{\partial z}\right]=0,$$

combinée avec l'équation $\pi\Phi+p=0$, donnera $p=0$, & déterminera les coëfficiens de Φ & de π. La quantité ſe reduira alors à $\pi\Phi$ ou à $l\pi+l\Phi$. Mettant devant chacun de ces termes un coëfficient indéterminé, on a $\alpha l\pi+\beta l\Phi$, & l'on obtient l'équation

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha}{\pi}\left[P\left(\frac{\partial\pi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\pi}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial\pi}{\partial z}\right)\right]+\\&\frac{\beta}{\Phi}\left[P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]=0.\end{aligned}$$

Or comme on a

$$P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=0,$$

on a β indéterminé & $\alpha=0$, ce qui donne enfin la quan-

tité Φ que l'on cherche. Quelque ſoit le nombre des facteurs de $\pi\Phi$, le procédé eſt le même. Tout cela s'éclaircira par les exemples, que je rapporterai plus bas.

§. 23. Il s'agit donc d'arriver à quelque quantité de la forme $\pi\Phi + p$, ou du moins à une quantité qui puiſſe prendre cette forme par le moyen des coëfficiens indéterminés que l'on mêt devant chaque terme, ou à la forme $\pi\Phi' + p$, Φ' étant un facteur de Φ. Or il reſulte de ce que nous avons dit dans le §. précedent, que

$$P\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right) = 0,$$

lorsque $\Phi' = 0$, donc

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \frac{Q}{P}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) - \frac{R}{P}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right) = M\Phi',$$

M étant un facteur quelconque. Donc

$$\frac{Q}{P} = \frac{M\Phi' + \frac{R}{P}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}.$$

Cette quantité eſt de la forme $\pi\Phi' + p$. La même choſe peut ſe dire de $\frac{R}{P}$ & par conſéquent de $\frac{Q+R}{P}$ ou de $\frac{P+Q+R}{P}$, ou de $\frac{P+Q+R}{Q}$ ou de $\frac{P+Q+R}{R}$. Si quelque terme de Φ' a diſparu, on remarquera que $\partial.\frac{Q}{P} = \mu\,\partial\Phi' + \nu$, μ & ν étant des fonctions de x, y, z, or

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial x} = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$= \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \frac{Q}{P}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) - \frac{R}{P}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right) = M\Phi',$$

donc $\partial.\frac{Q}{P}$ eſt encore de la forme $\pi\Phi' + p$, & l'on en peut dire autant de toutes les autres fonctions que je viens de rapporter. La même choſe a lieu pour $\partial\partial.\frac{Q}{P}$ & pour toutes les différentielles des ordres ultérieurs. Chacune

cune de ces différentielles reproduisant de nouvelles fonctions, les termes de Φ' qui ont disparu dans quelques unes, se reproduiront dans les autres, & l'on parviendra ainsi à une quantité de la forme $\pi\Phi' + p$. Au reste, je ne traite encore ici que du cas où Φ & ψ ne renferment point de quantités exponentielles ou logarithmiques: nous verrons ensuite comment il faut traiter ce cas.

§. 24. Soit, par exemple, l'équation

$$(y - xz)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (x - yz)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 1 - zz = 0.$$

La quantité $P + Q + R$ donne en mettant un coëfficient indéterminé devant chaque terme

$$Ay + Bxz + Cx + Dyz + E + Fzz = \Phi,$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = Bz + C,$$
$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = A + Dz,$$
$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = Bx + Dy + 2Fz.$$

Maintenant l'équation

$$P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = 0, \text{ donne}$$

$$Byz + Cy - Bxzz - Cxz + Ax - Dyzz + 2Fz^3 - 2Fz = 0,$$
$$-A \quad -D \quad +B \quad +D \quad -B \quad +D$$

ou $(C - D)y + (D - C)xz + (A - B)x + (B - A)yz$
$$+ 2Fz^3 - 2Fz = 0.$$

Combinant cette équation avec l'équation en Φ, je tire de ces deux équations la valeur de

$$x = \frac{(B - A)yz + 2Fz^3 - 2Fz + (C - D)y}{(C - D)z + B - A} = -\frac{Ay - Dyz - E - Fzz}{Bz + C},$$

ce qui donne

$$B(B-A)yz^2+2BFz^4-2BFz^2+B(C-D)yz+2CFz^3$$
$$+D(C-D) \qquad +F(B-A)+C(B-A) \quad +F(C-D)$$
$$+A(C-D)$$
$$+D(B-A)$$
$$-2CFz+C(C-D)y+E(B-A)=0.$$
$$+E(C-D)+A(B-A)$$

On tire de là $F=0$, $E=0$, $A=B$, $C=D$, donc

$$\Phi=A(y+xz)+C(x+yz),$$

A & C reſtant indéterminées, j'ai par cela même les deux valeurs de Φ & ψ. Faiſant $A=0$, j'ai $\psi=x+yz$, faiſant $B=0$, j'ai $\Phi=y+xz$. L'intégrale complette eſt donc $x+yz=F:(y+xz)$.

§. 25. Soit l'équation

$$(2\alpha yz-2\beta z-\beta y^2-\beta x)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$+(2\gamma z-\alpha z+\gamma y^2+\gamma x)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+2\gamma yz-\beta z=0.$$

La combinaiſon $P+Q+R$ ne donnant rien, je différentie une des quantités, R par exemple, & j'ai abſtraction faite des coëfficiens, $\frac{\partial R}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial y}{\partial x}+1=$ (en mettant pour $\frac{\partial z}{\partial x}$ ſa valeur $-\frac{R}{P}$, & pour $\frac{\partial y}{\partial x}$ ſa valeur $\frac{Q}{P}$, reduiſant au même dénominateur, & faiſant abſtraction des ſignes)

$$y^2z+yz+zz+xz+z+y^2+x.$$

Je fais donc

$$\Phi=Ay^2z+Byz+Cz^2+Dxz+Ez+Fy^2+Gx,$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=Dz+G,$$
$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=2Ayz+Bz+2Fy,$$
$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=Ay^2+By+2Cz+Dx+E.$$

L'é-

L'équation

$$P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=0,$$

donnera donc

$$\begin{array}{llllll}
2\alpha Dyz^2-2\beta Dz^2-\beta Dy^2z-\beta Dxz+2\alpha Gyz-2\beta Gz-\beta Gy^2-\beta Gx\\
+4\gamma A & +2\gamma B & +\gamma B & +\gamma B & +4\gamma F & +\beta E\\
-2\alpha A & -\alpha B & +\beta A & +\beta D & -2\alpha F\\
-4\gamma C & +2\beta C & -2\gamma B & & +\beta B\\
 & & & & -2\gamma E\\
+2\gamma Ay^3z+2\gamma Axyz+2\gamma Fy^3+2\gamma Fxy=0.\\
-2\gamma A & -2\gamma D
\end{array}$$

Combinant cette équation avec l'équation en Φ, on aura les deux valeurs de

$$x=\frac{(2\alpha A+4\gamma C-2\alpha D-4\gamma A)yz^2+(2\beta D-2\gamma B+\alpha B-2\beta C)z^2}{\gamma Bz-\beta G+(2\gamma A-2\gamma D)yz+2\gamma Fy}$$
$$+\frac{(\beta D-\beta A+\gamma B)y^2z+(2\alpha F-2\alpha G-4\gamma F-\beta B+2\gamma E)yz+(2\beta G-\beta E)z+\beta Gy^2-2\gamma Fy^2}{\gamma Bz-\beta G+(2\gamma A-2\gamma D)yz+2\gamma Fy}$$
$$=-\frac{Ay^2z-Byz-Cz^2-Ez-Fy^2}{Dz+G},$$

ce qui donne en développant & ne calculant d'abord que les termes qui contiennent y^3, $F=0$: enſuite calculant les termes qui contiennent y^2, on a $G=0$. On a actuellement

$$\frac{(2\alpha A+4\gamma C-2\alpha D-4\gamma A)yz^2+(2\beta D-2\gamma B+\alpha B-2\beta C)z^2+(\beta D-\beta A+\gamma B)y^2z}{\gamma Bz+(2\gamma A-2\gamma D)yz}$$
$$+\frac{(2\gamma E-\beta B)yz-\beta Ez}{\gamma Bz+(2\gamma A-2\gamma D)yz}=-\frac{Ay^2-By-Cz-E}{D}.$$

On a donc en développant

$$\begin{array}{llllll}
(2\alpha A+4\gamma C-2\alpha D-4\gamma A)Dyz^2+(2\beta D-2\gamma B+\alpha B-2\beta C)Dz^2\\
+(2\gamma A-2\gamma D)C & & +\gamma BC\\
+(\beta D-\beta A+\gamma B)Dy^2z+(2\gamma E-\beta B)Dyz-\beta EDz+A(2\gamma A-2\gamma D)y^3z=0.\\
+\gamma AB & & +\gamma B^2 & +\gamma BE\\
+(2\gamma A-2\gamma D)B & +E(2\gamma A-2\gamma D)
\end{array}$$

Le dernier terme donne $A = D$, ou $A = o$. Dans la premiere fuppoſition, le premier terme donne $C = D$, le ſecond terme donne $B = o$, le troiſieme terme devient identiquement nul, le quatrieme terme donne $E = o$, & le cinquieme devient identiquement nul. On a donc $\Phi = A(y^2 z + z^2 + x z)$. Dans la ſeconde ſuppoſition, le premier terme donne $\gamma C = \alpha D$, le troiſieme terme donne $\beta D = \gamma B$, le ſecond terme donne $\alpha B = \beta C$, le quatrieme & le cinquieme termes deviennent identiquement nuls, ainſi E reſte indéterminé, & l'on a $D = \frac{B\gamma}{\beta}$, $C = \frac{\alpha B}{\beta}$, donc

$$\Phi = \frac{B}{\beta}(\alpha z^2 + \beta y z + \gamma x z) + E z;$$

ce facteur ſe diviſe en deux autres, $\alpha z + \beta y + \gamma x + E$, & z, j'ai donc trois facteurs qui ſatisfont à l'équation

$$P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = o,$$

ſavoir $y^2 + z + x$, $\alpha z + \beta y + \gamma x + E$, & z. Je fais

$$\Phi = \alpha' l(y^2 + z + x) + \beta' l(\alpha z + \beta y + \gamma x + E) + \gamma' l z,$$

α', β', γ', étant des coëfficiens indéterminés. J'ai donc

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = \frac{\alpha'}{y^2 + z + x} + \frac{\beta'}{\alpha z + \beta y + \gamma x + E},$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = \frac{2\alpha' y}{y^2 + z + x} + \frac{\beta'\beta}{\alpha z + \beta y + \gamma x + E},$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \frac{\alpha'}{y^2 + z + x} + \frac{\beta'\alpha}{\alpha z + \beta y + \gamma x + E} + \frac{\gamma'}{z}.$$

L'équation

$$P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = o,$$

donne donc

$$\begin{array}{l} 2\alpha\alpha' y z - 2\alpha'\beta z - \alpha'\beta y^2 - \alpha'\beta x + 2\alpha'\gamma y^3 + 2\alpha'\gamma x y \\ +4\alpha'\gamma \quad +\alpha'\beta \\ -2\alpha\alpha' \\ -2\alpha'\gamma \end{array}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$y^2 + z + x$$

$$\begin{array}{l}
-\frac{2\gamma\gamma' yz+\gamma'\beta z}{z} \\
+2\beta'\alpha\gamma yz-2\beta'\beta\gamma z-\beta'\beta\gamma y^2-\beta'\beta\gamma x \\
-2\beta'\alpha\gamma \quad +2\beta'\beta\gamma \quad +\beta'\beta\gamma \quad +\beta'\beta\gamma \\
\qquad\qquad -\beta'\alpha\beta \\
\qquad\qquad +\beta'\alpha\beta \\
\hline
\qquad\qquad \alpha z+\beta y+\gamma x+E.
\end{array} = o.$$

Le numérateur dont le dénominateur eſt $\alpha z+\beta y+\gamma x+E$ s'évanouit, je puis donc faire $\Phi = \alpha z+\beta y+\gamma x+E$. En reduiſant les deux autres termes au même dénominateur, on a

$$\begin{array}{l}
2\alpha'\gamma yz-\alpha'\beta z-\alpha'\beta y^2-\alpha'\beta x+2\alpha'\gamma y^3+2\alpha'\gamma xy \\
-2\gamma'\gamma \quad +\gamma'\beta \quad +\gamma'\beta \quad +\gamma'\beta \quad -2\gamma\gamma' \quad -2\gamma'\gamma
\end{array} = o,$$

d'où l'on tire $\alpha' = \gamma'$, donc $\psi = y^2 z+z^2+xz$, & l'intégrale complette ſera

$$y^2 z+z^2+xz = F:(\alpha z+\beta y+\gamma x+E).$$

§. 26. Soit l'équation

$$\begin{array}{l}
(\alpha\delta xz-\alpha\gamma x^2 z-\alpha\gamma x^3 y+\alpha\delta x^2 y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\
+(2\beta\gamma xy^2 z-2\alpha\gamma xyz-\beta\delta y^2 z+\alpha\delta yz+\beta\delta xyz^2-\alpha\delta xz^2)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\
+\beta\delta yz^2-\alpha\delta z^2-2\beta\gamma xyz^2+\alpha\gamma xz^2-\alpha\gamma x^2 yz-\alpha\delta x^2 z^2-\beta\delta xz^3 = o.
\end{array}$$

On pourroit faire $\Phi = P+Q+R$, mais on abrégera en faiſant $\Phi = P$, c'eſt à dire

$$\Phi = Axz+Bx^2 z+Cx^3 y+Dx^2 y,$$

d'où l'on tire en ſubſtituant les valeurs dans l'équation

$$P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = o,$$

& combinant l'équation qui en reſultera, avec l'équation en Φ, $A = C = o$, $B = \gamma$, $D = \delta$, ce qui donne

$$x^2(\gamma y+\delta z) = o, \text{ ou } x = o,\ \gamma y+\delta z = o.$$

On

On trouve encore

$$A=D=o,\ B=C\ \&\ x^2(xy+z)=o,\ \text{ou}\ xy+z=o.$$

On fera enſuite $\Phi=Q$, c'eſt à dire

$$\Phi=A'xy^2z+B'xyz+C'y^2z+D'yz+E'xyz^2+F'xz^2.$$

On trouve en faiſant la même ſubſtitution & la même combinaiſon

$$A'=B'=D'=F'=o,\ C'=E',$$

$$yz(xz+y)\ \text{ou}\ y=o,\ z=o,\ xz+y=o.$$

On fait enfin $\Phi=R$, c'eſt à dire

$$\Phi=A''yz^2+B''z^2+C''xyz^2+D''xz^2+E''x^2yz+F''x^2z^2+G''xz^3,$$

on trouve en opérant de même

$$A''=B''=D''=F''=G''=o,\ C''=\beta,\ E''=\alpha,$$

ce qui donne

$$xyz(\alpha x+\beta z)=o,\ \text{ou}\ \alpha x+\beta z=o.$$

Je fais maintenant

$$\Phi=Al(xy+z)+Bl(\alpha x+\beta z)+Cl(xz+y)+Dl(\gamma y+\delta z)+El\,x+Fl\,y+Gl\,z,$$

& je trouve

$$E=F=G=o,\ A=-B,\ C=-D,\ \text{donc}$$

$$\Phi=Al\frac{xy+z}{\alpha x+\beta z}+Cl\frac{xz+y}{\gamma y+\delta z},$$

A & C reſtant indéterminés: je fais

$$\psi=\frac{xy+z}{\alpha x+\beta z},\ \Phi=\frac{xz+y}{\gamma y+\delta z},$$

& l'intégrale complette ſera

$$\frac{xy+z}{\alpha x+\beta z}=F:\left(\frac{xz+y}{\gamma y+\delta z}\right).$$

J'ai ſupprimé ici le détail du calcul qui n'a d'autre difficulté que la longueur, mon but dans ce mémoire étant unique-

quement de faire appercevoir distinctement la méthode. Au reste si l'on s'étoit borné à la valeur de P qui est, abstraction faite des coëfficiens, $xz + x^2z + x^3y + x^2y$, on auroit eu en différentiant,

$$z + 2xz + 3x^2y + 2xy + x^3\frac{\partial y}{\partial x} + x^2\frac{\partial y}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial x} + x^2\frac{\partial z}{\partial x},$$

ou en substituant les valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, tirées des équations $P\partial y - Q\partial x = 0$, $P\partial z + R\partial x = 0$, reduisant au même dénominateur, & mettant un coëfficient indéterminé devant chaque terme,

$$\begin{aligned}\Phi = {} & A\,x\,z^2 + B\,x^2\,z^2 + C\,x^3\,y\,z + D\,x^2\,y\,z + E\,x^3\,z^2 \\ & + F\,x^4\,y\,z + G\,x^5\,y^2 + H\,x^4\,y^2 + I\,x^3\,y^2 + K\,x^4\,y^2\,z \\ & + L\,x^3\,y^2\,z + M\,x^4\,y\,z^2 + N\,x^4\,z^2 + S\,x^2\,y^2\,z \\ & + T\,x^3\,y\,z^2 + a\,x\,y\,z^2 + b\,x^2\,y\,z^2 + c\,x^2z^3 + d\,x^2z^2 + e\,x^4z^3.\end{aligned}$$

Cette forme contient les quatre facteurs qui doivent entrer dans l'intégrale : en ne conservant que B & C, & faisant $B = C$, on a $Bx^2z(xy + z)$, ce qui donne le facteur $xy + z$; en ne conservant que D & E & faisant $D = E$, on a $Dx^2z(xz + y)$ ce qui donne le facteur $xz + y$; en ne conservant que B & D, faisant $D = \gamma$, $B = \delta$, on a $x^2z(\gamma y + \delta z)$, ce qui donne le facteur $\gamma y + \delta z$; en ne conservant que C & b, & faisant $C = \alpha$, $b = \beta$, on a $x^2yz(\alpha x + \beta z)$, ce qui donne le facteur $\alpha x + \beta z$. La difficulté ne consiste donc, comme je l'ai dit, que dans la longueur du calcul. Il y a plusieurs artifices propres à l'abréger dans les cas particuliers, mais je ne puis les détailler ici, je le ferai peut-être ailleurs.

§. 27. Je passe maintenant au cas où les quantités Φ & Ψ renferment des quantités exponentielles ou logarithmiques : je fais $\psi = \psi'' e^{\psi'}$, $\Phi = \Phi'' e^{\Psi'}$, ou ce qui revient

au même, $\psi = l\psi'' + \psi'$, $\Phi = l\Phi'' + \Phi'$; ψ'', ψ' Φ'', Φ' étant des fonctions quelconques de x, y, z. On aura en fubftituant ces valeurs:

$$\begin{aligned}
P = {} & \left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) \\
& + \Phi''\left[\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\right] \\
& + \psi''\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)\right] \\
& + \Phi''\psi''\left[\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\right]; \\
Q = {} & \left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) \\
& + \Phi''\left[\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right] \\
& + \psi''\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)\right] \\
& + \Phi''\psi''\left[\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right]; \\
R = {} & \left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) \\
& + \Phi''\left[\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right] \\
& + \psi''\left[\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)\right] \\
& + \Phi''\psi''\left[\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right].
\end{aligned}$$

Ces formules nous montrent que l'on peut trouver les quantités ψ'' & Φ'' par les mêmes moyens qui nous ont donné ψ & Φ dans le cas précédent. En effet on a

$$P\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right) = M'\psi'',$$

$$P\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) = M''\Phi'',$$

M' & M'' étant des facteurs quelconques. En fuppofant donc $\psi'' = o$, on aura

$$P\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right) = o;$$

& en faifant $\Phi'' = o$, on aura

$$P\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) = o;$$

ainfi

ainſi le procédé ſera le même que celui que nous avons détaillé ci-deſſus. La difficulté conſiſte donc uniquement à trouver les quantités ψ' & Φ', c'eſt ce dont nous allons nous occuper.

§. 28. Je dis que le Problème eſt réſolu, ſi connoiſſant Φ'' & ψ'', on parvient à mettre P, Q, R ſous la forme que je leur ai donnée dans le §. précedent: ou en diviſant par $\Phi''\psi''$, ſi l'on peut avoir ces quantités ſous la forme

$$P = \frac{(\frac{\partial\psi''}{\partial z})(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})-(\frac{\partial\psi''}{\partial y})(\frac{\partial\Phi''}{\partial z})}{\Phi''\psi''} + \frac{(\frac{\partial\psi''}{\partial z})(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})-(\frac{\partial\psi''}{\partial y})(\frac{\partial\Phi'}{\partial z})}{\psi''}$$
$$+ \frac{(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})(\frac{\partial\psi'}{\partial z})-(\frac{\partial\Phi''}{\partial z})(\frac{\partial\psi'}{\partial y})}{\Phi''} + (\frac{\partial\psi'}{\partial z})(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})-(\frac{\partial\psi'}{\partial y})(\frac{\partial\Phi'}{\partial z});$$

$$Q = \frac{(\frac{\partial\psi''}{\partial x})(\frac{\partial\Phi''}{\partial z})-(\frac{\partial\psi''}{\partial z})(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})}{\Phi''\psi''} + \frac{(\frac{\partial\psi''}{\partial x})(\frac{\partial\Phi'}{\partial z})-(\frac{\partial\psi''}{\partial z})(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})}{\psi''}$$
$$+ \frac{(\frac{\partial\Phi''}{\partial z})(\frac{\partial\psi'}{\partial x})-(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})(\frac{\partial\psi'}{\partial z})}{\Phi''} + (\frac{\partial\psi'}{\partial x})(\frac{\partial\Phi'}{\partial z})-(\frac{\partial\psi'}{\partial z})(\frac{\partial\Phi'}{\partial x});$$

$$R = \frac{(\frac{\partial\psi''}{\partial x})(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})-(\frac{\partial\psi''}{\partial y})(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})}{\Phi''\psi''} + \frac{(\frac{\partial\psi''}{\partial x})(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})-(\frac{\partial\psi''}{\partial y})(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})}{\psi''}$$
$$+ \frac{(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})(\frac{\partial\psi'}{\partial x})-(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})(\frac{\partial\psi'}{\partial y})}{\Phi''} + (\frac{\partial\psi'}{\partial x})(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})-(\frac{\partial\psi'}{\partial y})(\frac{\partial\Phi'}{\partial x});$$

on fera $\psi = \alpha l\psi'' + \beta l\Phi'' + M$, α & β étant des coëfficiens indéterminés, & M étant une fonction de x, y, z qu'il s'agit de déterminer. On a donc

$$(\frac{\partial\psi}{\partial x}) = \frac{\alpha(\frac{\partial\psi''}{\partial x})}{\psi''} + \frac{\beta(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})}{\Phi''} + (\frac{\partial M}{\partial x}),$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = \frac{\alpha\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)}{\psi''} + \frac{\beta\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\Phi''} + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right);$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \frac{\alpha\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)}{\psi''} + \frac{\beta\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)}{\Phi''} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right).$$

Subſtituant toutes ces valeurs dans l'équation

$$P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0,$$

& égalant ſéparement à zero les quantités qui ont le même dénominateur, on trouvera que toutes les formules où M n'entre pas deviennent identiquement nulles, ce ſont celles qui ont pour dénominateurs, $\Phi''\psi''^2$, ψ''^2, $\Phi''^2\psi''$, Φ''^2. Les quatre autres, c'eſt à dire celles qui ont pour dénominateurs les quantités $\Phi''\psi''$, ψ'', Φ'', 1, donnent les quatre équations ſuivantes,

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\right]\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)\\
&\quad + \left[\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)\\
&\quad + \left[\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)\\
&\quad + \alpha\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) - \alpha\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)\\
&\quad + \alpha\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) - \alpha\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)\\
&\quad + \alpha\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) - \alpha\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)\\
&\quad + \beta\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) - \beta\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\\
&\quad + \beta\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right) - \beta\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\\
&\quad + \beta\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) - \beta\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\right]\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)\\
&\quad + \left[\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)\\
&\quad + \left[\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)
\end{aligned}$$

+

$$+\alpha\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)-\alpha\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)$$
$$+\alpha\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)-\alpha\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$$
$$+\alpha\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)-\alpha\left(\frac{\partial\Psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=0;$$

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right]\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)$$
$$+\beta\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)-\beta\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)$$
$$+\beta\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)-\beta\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$$
$$+\beta\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)-\beta\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=0;$$

$$\left[\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)\right]\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)=0.$$

Trois de ces équations ſuffiſent pour obtenir les valeurs $\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)$, & l'on trouve

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)=\alpha\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\right)+\beta\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right),$$
$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)=\alpha\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial y}\right)+\beta\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right),$$
$$\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)=\alpha\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial z}\right)+\beta\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right),$$

& ces valeurs ſatisfont à la quatrieme équation. Le calcul n'a point de difficulté, & l'on peut s'aſſurer de ſa juſteſſe en ſubſtituant dans ces quatre équations les valeurs de $\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)$. On aura donc

$$\Psi=\alpha l\Psi''+\beta l\Phi''+\alpha\Psi'+\beta\Phi',$$

puiſque l'on obtient en intégrant $M=\alpha\Psi'+\beta\Phi'$. Or α & β reſtant indéterminés donnent les deux valeurs de Ψ

& Φ; en faiſant $\beta = c$, on a $\psi = \alpha l \psi'' + \alpha \psi'$; en faiſant $\alpha = c$, on a $\Phi = \beta l \Phi'' + \beta \Phi'$. Donc l'intégrale complette ſera $l \psi'' + \psi' = F : (l \Phi'' + \Phi')$, cela s'éclaircira par les exemples que nous rapporterons plus bas.

§. 29. Tout dépend donc de mettre les quantités P, Q, R ſous la forme $A + B \Phi'' + C \psi'' + D \Phi'' \psi''$, A, B, C, D étant des fonctions de x, y, z qu'il s'agit de déterminer. La forme de ces fonctions s'appercevra aiſément, & en mettant devant chaque terme un coëfficient indéterminé, on trouvera la valeur des termes. Si quelques uns de ces coëfficiens reſtent indéterminés, ou que la forme ſoit mal choiſie, dans le premier cas, les équations qui ont pour dénominateur $\Phi'' \psi''^2$, ψ''^2, $\Phi''^2 \psi''$, Φ''^2, & qui doivent être identiquement nulles, détermineront les coëfficiens; dans le ſecond cas, tous les termes de ces équations ne s'évanouiſſant pas, on verra comment il faut corriger la forme & quels termes ont doit y ajouter. Si les équations qui doivent être identiquement nulles, laiſſoient encore des coëfficiens indéterminés, les conditions d'intégrabilité, ou la quatrieme équation de celles qui contiennent $(\frac{\partial M}{\partial x})$, $(\frac{\partial M}{\partial y})$, $(\frac{\partial M}{\partial z})$ les détermineroient. Au reſte la détermination des formes A, B, C, D eſt facilitée par cette conſidération que l'on connoit ſouvent $A = (\frac{\partial \psi''}{\partial z})(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}) - (\frac{\partial \psi''}{\partial y})(\frac{\partial \Phi''}{\partial z})$ pour P, & de même pour Q, R. Et la recherche des quantités Φ'', ψ'' eſt plus facile que dans le cas précédent, parceque les quantités, P, Q, R les contiennent preſque toujours, & qu'il eſt rarement beſoin de deſcendre aux différentielles.

§. 30. Soit l'équation

$$[y + 2xz^2 + xy^2 + 3yz^3 + y^3z + y^2 + 3xyz^2 + xy^3 + 3y^2z^3 + y^4z + xyz + 3x^2z^3 + 3xyz^4 + xy^3z^2 - xz - x^4 - 2x^2yz - x^3yz$$

$$-2xy^2z^2-yz-x^3y-2xy^2z-2y^3z^2-x^4z-2x^2yz^2,$$
$$-x^3yz^2-2xy^2z^3]\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$+[x+2x^3y+2x^2y^2z+y+2x^2y^2+2xy^3z+xz+2x^3yz$$
$$+2x^2y^2z^2-yz-3xz^3-xy^2z-3yz^4-y^3z^2]\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$+1+2x^2y+2xy^2z+y+2x^2y^2+2xy^3z+xz+2x^3yz$$
$$+2x^2y^2z^2-z^2-x^3z-2xyz^2-x^2yz^2-2y^2z^3=0.$$

Je trouve par la méthode expoſée ci-deſſus, $\psi''=x+yz$, $\Phi''=y+xz$, ce qui donne

$$\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)=1,\ \left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)=z,\ \left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)=y;$$
$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)=z,\ \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)=1,\ \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)=x.$$

Donc pour la quantité P, on aura

$$A=y-xz+B(y+xz)+C(x+yz)$$
$$+D(xy+x^2z+y^2z+xyz^2).$$

En commençant la diviſion de P par $xyz^2+y^2z+x^2z+xy$, & mettant devant chaque terme du quotient un coëfficient indéterminé, je trouve

$$D=\alpha+\beta z^2+\gamma y^2+\delta y+\varepsilon x+\zeta x^2+\eta yz,$$

& je marque dans la valeur de P les termes qui reſultent de là. Diviſant les termes qui reſtent par $yz+x$, je trouve $C=\alpha' z^2+\beta' x^3$. Diviſant les termes qui reſtent par $xz+y$, je trouve $B=\alpha''z+\beta''y+\gamma''$. Tous les termes étant epuiſés, je compare cette valeur de P avec la valeur donnée dans l'équation, & j'ai

$$\beta xyz^2+\gamma xy^3+\delta xy^2+\varepsilon x^2y+\zeta x^3y+\eta xy^2z+\alpha y^2z+\beta y^2z^3$$
$$-3\quad -1\quad -1\quad +1\quad +2\quad -3$$
$$+\gamma'$$

+

$$+\gamma y^4 z + \delta y^3 z + \varepsilon x y^2 z + \zeta x^2 y^2 z^2 + \eta y^3 z^2 + \alpha x^2 z + \beta x^2 z^3$$
$$-1 \qquad -1 \qquad\qquad +\gamma \qquad +2 \qquad\qquad -3$$
$$\qquad +\gamma'$$

$$+\delta x^2 y z + \varepsilon x^3 z + \zeta x^4 + \eta x^2 z^2 + \beta x y z^4 + \gamma x y^3 z^2 + \delta x y^2 z^2$$
$$+2 \qquad\quad +1 \quad +2 \qquad -3 \qquad -1 \qquad\quad +2$$
$$+\delta' \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +\delta'$$

$$+\varepsilon x^2 y z^2 + \zeta x^3 y z^2 + \beta' x^4 + \beta' x^3 y z + \alpha' x z^2 + \alpha' y z^3 + \alpha'' y z$$
$$\qquad +1 \qquad +1 \quad +1 \qquad +\alpha'' \quad -3 \qquad +1$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2$$

$$+\beta'' y^2 + \gamma'' y + \beta'' x y z + \gamma'' x z + \eta x y^2 z^3 = 0.$$
$$-1 \qquad -1 \qquad -1 \qquad +1 \qquad +2$$
$$\qquad +1 \qquad\quad -1$$

Je tire de là $\alpha = \varepsilon = 0$, $\gamma = 1$, $\zeta = -1$, $\eta = -2$, $\beta = 3$, $\beta' = -1$, $\alpha' = 3$, $\alpha'' = -1$, $\beta'' = 1$, $\gamma'' = 0$, mais δ donne des valeurs contradictoires, savoir $\delta = -2$, $\delta = 1$, le terme $\delta x y^2 z^2$ divisé par $y z$ donne $x y z$, j'ajoute donc à C le terme $\delta' x y z$, le terme $\delta y^3 z$ divisé par $y z$ donne y^2, j'ajoute donc à C le terme $\gamma' y^2$, & je trouve alors $\delta + \gamma' - 1 = 0$, $\delta + \delta' + 2 = 0$. Ainsi δ reste indéterminé, & l'on a $\gamma' = 1 - \delta$, $\delta' = -2 - \delta$. J'ai donc reduit P à cette forme, en divisant tout par $\Phi'' \Psi''$,

$$P = \frac{y - x z}{(x + y z)(y + x z)} + \frac{y - z}{x + y z} + \frac{(1-\delta) y^2 + 3 z^2 - x^3 - (2+\delta) x y z}{y + x z}$$
$$+ y^2 + 3 z^2 - x^2 - 2 y z + \delta y.$$

§. 31. Maintenant pour la quantité Q, on aura

$$A = \left(\frac{\partial \Psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial \Psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) = x - y z.$$

Je fais donc

$$Q = x - y z + B(y + x z) + C(x + y z)$$
$$+ D(x y + x^2 z + y^2 z + x y z^2),$$

en mettant devant chaque terme du quotient un coëfficient indéterminé. Dans la diviſion de Q par $xy + x^2z + y^2z + xyz^2$, je trouve $D = \alpha xy$. Diviſant les termes qui reſtent par $xz + y$, je trouve $B = \alpha''$. Diviſant les termes qui reſtent par $yz + x$, je trouve $C = \beta' z^3 + \gamma' y^2 z + \delta x^2 y$. Tous les termes étant épuiſés, je compare cette valeur de Q avec la valeur donnée dans l'équation, & j'ai

$$\begin{array}{l} \alpha x^2y^2 + \alpha xy^3z + \alpha x^3yz + \alpha x^2y^2z^2 - x + \beta' xz^3 + \gamma' xy^2z \\ \quad -2 \qquad -2 \qquad -2 \qquad -2 \qquad +1 \quad +3 \qquad +1 \\ \left.\begin{array}{l} +\delta' x^3y + yz + \beta' yz^4 + \gamma' y^3z^2 + \delta' x^2y^2z + \alpha'' y + \alpha'' xz \\ \quad -2 \qquad -1 \quad +3 \qquad +1 \qquad -2 \qquad -1 \quad -1 \end{array}\right\} = 0. \end{array}$$

Je tire de là, $\alpha = 2$, $\beta' = -3$, $\gamma' = -1$, $\delta' = 2$, $\alpha'' = 1$. J'ai donc reduit Q à cette forme, en diviſant tout par $\Phi''\Psi''$,

$$Q = \frac{x - yz}{(x+yz)(y+xz)} + \frac{1}{x+yz} + \frac{2x^2y - 3z^3 - y^2z}{y+xz} + 2xy.$$

§. 32. Enfin pour la quantité R, on aura

$$A = \left(\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 1 - zz.$$

Je fais

$$R = 1 - zz + B(y + xz) + C(x + yz) + D(xy + x^2z + y^2z + xyz^2).$$

En commençant la diviſion de R par $xy + x^2z + y^2z + xyz^2$, je trouve $D = \alpha + \beta x + \gamma xy$. Diviſant les termes qui reſtent par $xz + y$, je trouve $B = \alpha''$. Diviſant les termes qui reſtent par $yz + x$, je trouve $C = \alpha' yz^2$. Tous les termes étant épuiſés, je compare cette valeur de R avec la valeur donnée dans l'équation, & j'ai

$$\alpha xy+\alpha y^2z+\alpha x^2z+\alpha xyz^2+\beta x^2y+\beta xy^2z+\beta x^3z+\beta x^2yz^2$$
$$+\alpha' \quad -2 \quad -2 \quad +1 \quad +1$$
$$+2$$
$$+\gamma x^2y^2+\gamma xy^3z+\gamma x^3yz+\gamma x^2y^2z^2+\alpha' y^2z^3+\alpha'' y$$
$$-2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \quad +2 \quad -1$$
$$\left.\begin{matrix}+\alpha'' xz+1-z^2\\ -1 \quad -1+1\end{matrix}\right\}=0.$$

Je tire de là $\alpha=0$, $\alpha'=-2$, $\gamma=2$, $\alpha''=1$, mais β donne des valeurs contradictoires, savoir $\beta=2$, $\beta=-1$, le terme xy^2z divisé par yz donne xy, j'ajoute donc à C la valeur $\beta' xy$; le terme x^2yz^2 divisé par yz donne x^2z, j'ajoute donc à C le terme $\gamma' x^2z$. Multipliant donc $\beta' xy+\gamma' x^2z$ par $x+yz$, & ne conservant que les termes affectés de β, j'obtiens,

$$\left.\begin{matrix}\beta x^2y+\beta xy^2z+\beta x^3z+\beta x^2yz^2\\ -2 \quad -2 \quad +1 \quad +1\\ +\beta' \quad +\beta' \quad +\gamma' \quad +\gamma'\end{matrix}\right\}=0,$$

ce qui donne $\beta+\beta'-2=0$, $\beta+\gamma'+1=0$, donc $\beta'=2-\beta$, $\gamma'=-1-\beta$, & β reste indéterminé. J'ai donc reduit R à cette forme en divisant tout par $\Phi''\Psi''$,

$$R=\frac{1-zz}{(x+yz)(y+xz)}+\frac{1}{x+yz}-\frac{2yz^2+(2-\beta)xy-(1+\beta)x^2z}{y+xz}$$
$$+\beta x+2xy.$$

§. 33. Je fais maintenant

$$\Psi=\alpha' l(x+yz)+\beta' l(y+xz)+M,$$

α' β' étant des coëfficiens indéterminés, & M une fonction de x, y, z qu'il s'agit de déterminer. J'ai donc

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)=\frac{\alpha'}{x+yz}+\frac{\beta' z}{y+xz}+\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right),$$

$\partial\Psi$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=\frac{\alpha' z}{x+yz}+\frac{\beta'}{y+xz}+\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right),$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=\frac{\alpha' y}{x+yz}+\frac{\beta' x}{y+xz}+\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right).$$

Subſtituant ces valeurs dans l'équation de condition

$$P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0,$$

les termes diviſés par $(y+xz)^2$ donnent l'équation

$$\left.\begin{array}{llll}\beta'(1-\delta)y^2z+3\beta'-\beta'x^3z & -\beta'(2+\delta)xyz^2+2\beta'x^2y\\ -\beta' & -3\beta'+\beta'(1+\beta)+2\beta' & -\beta'(2-\beta)\end{array}\right\}=0,$$

ce qui donne $\beta=\delta=0$. Maintenant les équations qui ont pour dénominateurs $\Phi''\psi''^2$, ψ''^2, $\Phi''^2\psi''$, Φ''^2 dévien-dront identiquement nulles, & les quatre autres, c'eſt à dire celles qui ont pour dénominateur $\Phi''\psi''$, ψ'', Φ'', 1 don-neront les quatre équations ſuivantes

$$(y-xz)\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)+(x-yz)\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)-(1-zz)\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)$$
$$+\alpha' y^2+3\alpha' z^2-\alpha' x^3-2\alpha' xyz-3\alpha' z^4-2\alpha' xy^2$$
$$+\alpha' y^2z^2+\beta' yz-\beta' zz+\beta'-\beta' x=0;$$

$$(y-z)\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)$$
$$+\alpha' y^2+3\alpha' z^2-\alpha' x^2-2\alpha' yz+2\alpha' xyz-2\alpha' xy^2=0;$$

$$(y^2+3z^2-x^3-2xyz)\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)+(2x^2y-y^2z-3z^3)\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$
$$-(2xy-x^2z-zyz^2)\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)+\beta' y^2z+3\beta' z^3-\beta' x^2z$$
$$-2\beta' yz^2+2\beta' xy-2\beta' x^2y=0;$$

$$(y^2+3z^2-x^2-2yz)\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)+2xy\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)-2xy\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)=0.$$

Multipliant la ſeconde équation par $2xy$ & la retranchant de la quatrieme, on a

$$(y^2+3z^2-x^2-2yz-2xy^2+2xyz)\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)$$
$$-2\alpha' xy(y^2+3z^2-x^2-2yz-2xy^2+2xyz)=0,$$

ce qui donne $\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)=2\alpha' xy$. Subſtituant cette valeur dans

les deux premieres équations, on a

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) + \alpha' y^2 + 3\alpha' z^2 - \alpha' x^2 - 2\alpha' y z = 0,$$

$$(x - y z)\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - (1 - z z)\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) + \alpha' y^2 + 3\alpha' z^2 - \alpha' x^3 - 2\alpha' x y z + \alpha' x^2 y z - 3\alpha' z^4 + \alpha' y^2 z^2 + \beta' y z - \beta' z z + \beta' - \beta' x = 0.$$

Multipliant la premiere de ces équations par $1 - z z$, & la retranchant de la feconde, on a

$$(x - y z - 1 + z z)\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) + \alpha' [x^2 y z - x^3 + x^2 - x^2 z^2 - 2 y z^3 + 2 y z + 2 y^2 z^2 - 2 x y z] + \beta' (y z + 1 - x - z z) = 0,$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = \beta' + \alpha' x^2 + 2\alpha' y z.$$

Subftituant cette valeur, on trouve

$$\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) = \beta' + \alpha' y^2 + 3\alpha' z^2, \text{ donc}$$

$$M = \alpha' (x^2 y + y^2 z + z^3) + \beta' (y + z),$$

ce qui fatisfait aux quatre équations. Donc

$$\psi = \alpha' l (x + y z) + \beta' l (y + x z) + \alpha' (x^2 y + y^2 z + z^3) + \beta' (y + z).$$

Les coëfficiens α', β' reftant indéterminés & indépendans l'un de l'autre, on a en faifant $\beta' = 0$, $\alpha' = 1$,

$$\psi = l (x + y z) + x^2 y + y^2 z + z^3,$$

& en faifant $\beta' = 1$, $\alpha' = 0$,

$$\Phi = l (y + x z) + y + z.$$

Donc l'intégrale complette fera

$$(x + y z)\, e^{x^2 y + y^2 z + z^3} = F : (y + x z)\, e^{y + z}.$$

§. 34.

§. 34. Soit l'équation

$$[2xyz+2x^3z+2xyz^3-xz^2-2x^2yz-x^4-x^2yz^2]\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$+[2xx+4x^2yz+2xy^2z+2x^4+2x^2yz^2+x^3y$$
$$+xy^2z^2-2xyz-6x^2z-2yz^3-2x^3z$$
$$-2xyz^3-2yz]\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+2xx+2xxzz+x^4$$
$$+x^2yz^2+x^3y+xy^2z^2-xz^2-3x^3-z^2=0.$$

Je trouve par la méthode expoſée ci-deſſus $\psi''=x^2+yz^2$, $\Phi''=x$, ce qui donne

$$\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)=2x,\ \left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)=z^2,\ \left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)=2yz;$$
$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)=1,\ \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)=0,\ \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)=0.$$

Donc pour la quantité P, on aura

$$A=\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right)=0,$$

je fais donc

$$P=Bx+C(x^2+yz^2)+Dx(x^2+yz^2).$$

En commençant la diviſion de P par xyz^2+x^3, & mettant devant chaque terme du quotient un coëfficient indéterminé, je trouve $D=\alpha x+\beta z$. Dans les termes qui reſtent je n'en trouve point qui ſoyent diviſibles par yz^2+x^2, je fais donc $C=0$. Je diviſe les termes reſtans par x, & j'ai

$$B=\alpha''yz+\beta''z^3+\gamma''z^2+\delta''xyz.$$

Tous les termes étant épuiſés, je compare cette valeur de P avec la valeur donnée dans l'équation, & j'ai

$$\begin{matrix}\alpha''xyz+\beta''xz^3+\gamma''xz^2+\delta''x^2yz+\alpha x^4+\alpha x^2yz^2+\beta x^3z+\beta xyz^3\\ -2\quad\quad -2\quad\quad +1\quad\quad +2\quad\quad +1\ +1\quad\quad -2\quad\quad -2\end{matrix}=0,$$

ce qui donne

$$\alpha''=2,\ \beta''=2,\ \gamma''=-1,\ \delta''=-2,\ \alpha=-1,\ \beta=2.$$

J'ai donc, en divisant tout par $\Phi''\psi''$ reduit P à cette forme

$$P = \frac{2yz+2z^3-z^2-2xyz}{x^2+yz^2} + 2z - x.$$

§. 35. Maintenant pour la quantité Q, on aura

$$A = \left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = -2yz.$$

Je fais donc

$$Q = -2yz + Bx + C(x^2+yz^2) + Dx(x^2+yz^2).$$

En commençant la division de Q par xyz^2+x^3, on a $D = \alpha z + \beta y + \gamma x$. Divisant les termes qui restent par yz^2+x^2, je trouve $C = \alpha' z$. Divisant les termes qui restent par x, j'ai

$$B = \alpha'' x + \beta'' xyz + \gamma'' y^2 z + \delta'' yz + \varepsilon'' xz.$$

Tous les termes étant épuisés, je compare cette valeur de Q avec la valeur donnée dans l'équation, & j'ai

$$\begin{array}{l} -2yz+\alpha''x^2+\beta''x^2yz+\gamma''xy^2z+\delta''xyz+\alpha'x^2z+\alpha'yz^3 \\ +2 \quad -2 \quad -4 \quad -2 \quad +2 \quad +6 \quad +2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\varepsilon'' \\ +\alpha x^3z+\alpha xyz^3+\beta x^3y+\beta xy^2z^2+\gamma x^2yz^2+\gamma x^4 \\ +2 \quad +2 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \quad -2 \end{array} \Big\} = 0.$$

Je tire de là

$$\alpha'' = 2,\ \beta'' = 4,\ \gamma'' = 2,\ \delta'' = -2,\ \alpha = -2,$$
$$\alpha' = -2,\ \varepsilon'' = -4,\ \beta = 1,\ \gamma = 2.$$

J'ai donc en divisant tout par $\Phi''\psi''$, reduit Q à cette forme

$$Q = -\frac{2yz}{x(x^2+yz^2)} + \frac{2x+4xyz+2y^2z-2yz-4xz}{x^2+yz^2} - \frac{2z}{x} + y + 2x - 2z.$$

§. 36.

§. 36. Enfin pour la quantité R, on aura

$$A = \left(\frac{\partial \Psi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Psi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) = -z^2.$$

Je fais

$$R = -z^2 + Bx + C(x^2 + yz^2) + Dx(x^2 + yz^2).$$

En commençant la diviſion de R par $xyz^2 + x^3$, je trouve $D = \alpha y + \beta x$. Diviſant les termes qui reſtent par $yz^2 + x^2$, je trouve $C = o$. Diviſant les termes qui reſtent par x, je trouve

$$B = \alpha'' x + \beta'' xz^2 + \gamma'' z^2 + \delta'' x^2.$$

Tous les termes étant épuiſés, je compare cette valeur de R avec la valeur donnée dans l'équation, & j'ai

$$\begin{array}{l} -z^2 + \alpha'' x^2 + \beta'' x^2 z^2 + \gamma'' xz^2 + \delta'' x^3 + \alpha x^3 y + \alpha x y^2 z^2 \\ +1 \quad -2 \quad\quad -2 \quad\quad +1 \quad\quad +3 \quad\quad -1 \quad\quad -1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +\beta' \\ \left.\begin{array}{l} +\beta x^4 + \beta x^2 y z^2 \\ -1 \quad\quad -1 \end{array}\right\} = o. \end{array}$$

Je tire de là $\alpha'' = 2$, $\beta'' = 2$, $\gamma'' = -1$, $\delta'' = -3$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$. J'ai donc reduit en diviſant tout par $\Phi'' \Psi''$, R à cette forme

$$R = -\frac{zz}{x(x^2 + yz^2)} + \frac{2x + 2xz^2 - z^2 - 3x^2}{x^2 + yz^2} + x + y.$$

J'obſerverai qu'au lieu de faire $C = o$, j'aurois pu faire $C = \alpha' + \beta' x + \gamma' x^2$, la ſuite du calcul fait voir laquelle de ces deux ſuppoſitions doit avoir lieu, en faiſant

$$\Psi = \alpha' l(x^2 + yz^2) + \beta' l x + M,$$

ce qui me donne

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \frac{2\alpha' x}{x^2 + yz^2} + \frac{\beta'}{x} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right),$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = \frac{\alpha' z^2}{x^2 + yz^2} + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = \frac{2\alpha' yz}{x^2 + yz^2} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right).$$

L'équa-

L'équation qui a pour dénominateur $(x^2 + y z^2)^2$ ne devient pas identiquement nulle, je fais donc $C = \alpha' + \beta^{IV} x + \gamma' x^2$, ce qui me donne dans l'équation les termes

$$\alpha' x^2 + \alpha' y z^2 + \beta^{IV} x^3 + \beta^{IV} x y z^2 + \gamma' x^4 + \gamma' x^2 y z^2.$$

Il faudroit par conſéquent changer B, & je vois tout de ſuite qu'en faiſant

$$B = 2x + 2xz^2 - z^2 + \alpha''' x^2 + \beta''' y z^2,$$

l'on doit avoir

$$\frac{2x + 2xz^2 - z^2 + \alpha''' x^2 + \beta''' y z^2}{x^2 + y z^2} + \frac{\alpha' + \beta''' x + \gamma' x^2}{x} = \frac{2x + 2xz^2 - z^2 - 3x^2}{x^2 + y z^2},$$

ce qui donne

$$\begin{array}{llllll} 2x^2 + 2x^2z^2 - xz^2 + \alpha''' x^3 + \beta''' xyz^2 + \alpha' yz^2 + \gamma' x^4 \\ -2 \quad -2 \quad +1 \quad +3 \quad +\beta^{IV} \\ +\alpha' \quad +\beta^{IV} \\ +\gamma' x^2 yz^2 = 0, \end{array}$$

ce qui donne

$$\alpha' = \gamma' = 0, \ \alpha''' + 3 + \beta^{IV} = 0, \ \beta''' + \beta^{IV} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\alpha''' = -(3 + \beta^{IV}), \ \beta''' = -\beta^{IV}.$$

J'ai donc

$$R = -\frac{zz}{x(x^2 + yz^2)} + \frac{2x + 2xz^2 - z^2 - (3 + \beta')x^2 - \beta' yz^2}{x^2 + yz^2} + \frac{\beta' x}{x} + x + y.$$

§. 37. Subſtituant maintenant les valeurs dans l'équation

$$P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0,$$

les termes diviſés par $(x^2 + y z^2)^2$ donnent

$$\begin{array}{llllll} 4\alpha' xyz + 4\alpha' xz^3 - 2\alpha' xz^2 - \quad 4\alpha' x^2 yz + 4\alpha' xyz^3 \\ -4 \quad -4 \quad +2 \quad +2\alpha'(3 + \beta^{IV}) \quad -4 \\ +2\alpha' xyz^3 - 2\alpha' yz^3 \\ +2\alpha'\beta^{IV} \quad +2\alpha' \end{array} = 0,$$

ce

ce qui donne $\beta^{IV} = -1$. Maintenant les équations qui ont pour dénominateur $\Phi''\psi''^2$, ψ''^2, $\Phi''^2\psi''$, Φ''^2, deviendront identiquement nulles & les quatre autres, c'eſt à dire celles qui ont pour dénominateur ψ'', $\Phi''\psi''$, Φ'', 1, donneront

$$(2z^3 + 2yz - 2xyz - zz)\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)$$
$$+ (4xyz + 2y^2z + 2x - 2yz - 4xz)\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$
$$- (2xzz + yzz + 2x - 2x^2 - z^2)\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)$$
$$+ 4\alpha' xz - 2\alpha' x^2 + 2\alpha' xz^2 + \alpha' yz^2 - 2\alpha' z^3$$
$$- 2\alpha' xyz - 2\alpha' y^2 z = 0,$$
$$- 2yz\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) + zz\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) + 2\beta' z^3 + 2\beta' yz - 2\beta' xyz$$
$$- \beta' zz - 2\alpha' z^3 + 2\alpha' xyz = 0,$$
$$- 2z\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) + x\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) + 2\beta' z - \beta' x = 0,$$
$$(2z - x)\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) + (2x + y - 2z)\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - (x + y)\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) = 0.$$

La troiſieme équation multipliée par y & retranchée de la ſeconde donne

$$(zz - xy)\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) + \beta'(2z^3 - 2xyz - zz + xy)$$
$$- \alpha'(2z^3 - 2xyz) = 0,$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) = \beta'(1 - 2z) + 2\alpha' z;$$

cette valeur ſubſtituée dans la troiſieme équation donne

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = \beta'(1 - x) + \alpha' x,$$

& ces deux valeurs ſubſtituées dans la quatrieme équation donnent

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = \beta'(1 - 2x - y) + \alpha'(2x + y),$$

ces trois valeurs ſatisfont à la premiere équation, & α', β' reſtent indéterminés: on tire de là

$$M = \beta'(x+y+z-xx-xy-zz)+\alpha'(xx+xy+zz),$$
$$\psi = \alpha' l(x^2+yz^2)+\beta' lx+\beta'(x-xx-xy+y+z-zz)$$
$$+\alpha'(xx+xy+zz).$$

Faiſant $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$, j'ai

$$\psi = l(x^2+yz^2)+x^2+xy+zz,$$

Faiſant $\alpha' = 0$, $\beta' = 1$, j'ai

$$\Phi = lx+x+y+z-xx-xy-zz.$$

L'intégrale complette ſera donc

$$(x^2+yz^2)\,e^{xx+xy+zz} = F:x\,e^{x+y+z-x^2-xy-z^2}.$$

En faiſant $\alpha' = \beta'$, on auroit eu

$$\Phi = l(x^3+xyzz)+x+y+z,$$

& alors l'intégrale auroit eu cette forme

$$(x^2+yz^2)\,e^{xx+xy+zz} = F:(x^3+xyzz)\,e^{x+y+z}.$$

§. 38. Si ψ'' & Φ'' contiennent pluſieurs facteurs, enſorte que $\psi'' = \psi'''\psi^{IV}$, on trouvera chacun de ces facteurs par la méthode qui a donné ci-deſſus ψ''; car puiſque

$$P\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\psi''}{\partial z}\right) = 0,$$

lorsque $\psi'' = c$, on aura dans ce cas-ci,

$$\psi^{IV}\left[P\left(\frac{\partial\psi'''}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\psi'''}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\psi'''}{\partial z}\right)\right]+$$
$$\psi'''\left[P\left(\frac{\partial\psi^{IV}}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\psi^{IV}}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\psi^{IV}}{\partial z}\right)\right] = 0,$$

lorsque $\psi'''\psi^{IV} = c$. Faiſant $\psi''' = c$, on aura

$$P\left(\frac{\partial\psi'''}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\psi''}{\partial y}\right)-R\left(\frac{\partial\psi'''}{\partial z}\right) = 0,$$

lorsque $\psi''' = c$. On trouvera donc tous les facteurs de ψ'', Φ'' par la même méthode: mais s'il y en a pluſieurs, il s'agit de ſavoir quels ſeront les facteurs qui appartiendront

dront à ψ'', & quels ſeront ceux qui appartiendront à Φ''. Un ſimple tatonnement ſeroit long & faſtidieux: voici une méthode directe pour parvenir au même but.

§. 39. L'équation $\psi = F : \Phi$ peut ſe mettre ſous cette forme $A\psi + B\Phi = F : (A'\psi + B'\Phi)$, A', B' étant des conſtantes quelconques, & l'équation différentielle qui en reſultera ſera la même à cela près, qu'elle ſera toute multipliée par $AB' - A'B$. On pourra donc faire entrer dans la valeur de ψ'' & Φ'' tous les facteurs trouvés par le §. précedent, en les affectant de coëfficiens indéterminés différens; enſuite on fera $\psi = \psi'' + M$, $\Phi = \Phi'' + M$, & ſubſtituant ces valeurs dans l'équation différentielle, on aura la forme des quantités P, Q, R, & l'on procédera comme ci-deſſus. Je vais éclaircir ceci par des exemples.

§. 40. Soit l'équation

$$(\nu\varrho x + 2\nu xy^2 + \varrho xz - \tau xy + 2xy^2z - 2xyz^2)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$+ (\mu\tau y + 2\mu yz^2 - 2\nu x^2y + \tau xy + 2xyz^2 - 2x^2yz)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$+ \mu\varrho z + \varrho xz + 2\mu y^2z + 2xy^2z - 2x^2yz = 0.$$

Je trouve tout de ſuite, x, y, z, pour les facteurs de ψ'', Φ''. Je fais donc

$$\psi = \alpha lx + \beta ly + \gamma lz + M,$$
$$\Phi = \alpha' lx + \beta' ly + \gamma' lz + M',$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\alpha}{x} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = \frac{\beta}{y} + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \frac{\gamma}{z} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right),$$

$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=\frac{\alpha'}{x}+\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=\frac{\beta'}{y}+\left(\frac{\partial M'}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=\frac{\gamma'}{z}+\left(\frac{\partial M'}{\partial z}\right)$.

On aura donc

$$P=\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=\frac{\gamma'\beta-\beta'\gamma}{yz}$$
$$+\frac{\gamma'\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)-\gamma\left(\frac{\partial M'}{\partial y}\right)}{z}+\frac{\beta\left(\frac{\partial M'}{\partial z}\right)-\beta'\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)}{y}$$
$$+\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial M'}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial M'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right);$$
$$Q=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{xz}$$
$$+\frac{\gamma'\left(\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)-\gamma\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)\right.}{z}+\frac{\alpha\left(\frac{\partial M'}{\partial z}\right)-\alpha'\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)}{x}$$
$$+\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial M'}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right);$$
$$R=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=\frac{\alpha\beta'-\beta\alpha'}{xy}$$
$$+\frac{\alpha\left(\frac{\partial M'}{\partial y}\right)-\alpha'\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{x}+\frac{\beta'\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)-\beta\left(\frac{\partial M'}{\partial y}\right)}{y}$$
$$+\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial M'}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Je ferai donc

$$P=\frac{A}{yz}+\frac{B}{z}+\frac{C}{y}+D,$$
$$Q=\frac{A'}{xz}+\frac{B'}{z}+\frac{C'}{x}+D',$$
$$R=\frac{A''}{xy}+\frac{B''}{x}+\frac{C''}{y}+D'',$$

ou en reduisant tout au même dénominateur,

$$P=x(A+By+Cz+Dyz),$$
$$Q=y(A'+B'x+C'z+D'xz),$$
$$R=z(A''+B''y+C''x+D''xy).$$

Main-

Maintenant pour trouver D, je divise P par xyz, & j'ai $D = \alpha' y + \beta z$. Je divise pour trouver C les termes qui restent par xz, & j'ai $C = \alpha''$. Pour trouver B, je divise les termes qui restent par xy, & j'ai $B = \alpha'' y + \beta''$. Je prens pour A les termes restans divisés par x, & j'ai $A = \alpha$. Substituant ces valeurs dans celle de P, & la comparant avec celle qui est donnée dans l'équation, j'ai

$$\left.\begin{array}{llllllll} \alpha & +\alpha'' y^2 & +\beta'' y & +\alpha''' z & +\alpha' y^2 z & +\beta' y z^2 & \\ -\nu\varrho & -2\nu & +\tau & -\varrho & -2 & +2 & \end{array}\right\} = 0,$$

ce qui donne $\alpha = \nu\varrho$, $\alpha'' = 2\nu$, $\beta'' = -\tau$, $\alpha''' = \varrho$, $\alpha' = 2$, $\beta' = -2$, donc

$$P = \frac{\nu\varrho}{yz} + \frac{2\nu y - \tau}{z} + \frac{\varrho}{y} + 2y - 2z.$$

§. 41. Je continue: & pour trouver D', je divise Q par xyz, & j'ai $D' = \alpha' x + \beta' z$. Pour trouver C', je divise les termes restans par yz, j'ai $C' = \alpha''' z$. Pour trouver B, je divise les termes restans par xy, & j'ai $B' = \alpha'' x + \beta''$. Pour trover A', je divise les termes restans par y & j'ai $A' = \alpha$. Substituant ces valeurs dans celle de Q, & la comparant avec celle qui est donnée dans l'équation, j'ai

$$\left.\begin{array}{llllllll} \alpha & +\alpha'' x^2 & +\beta'' x & +\alpha''' z^2 & +\alpha' x^2 z & +\beta' x z^2 & \\ -\mu\tau & +2\nu & -\tau & -2\mu & +2 & -2 & \end{array}\right\} = 0,$$

ce qui donne $\alpha = \mu\tau$, $\alpha'' = -2\nu$, $\beta'' = \tau$, $\alpha''' = 2\mu$, $\alpha' = -2$, $\beta' = 2$, donc

$$Q = \frac{\mu\tau}{xz} + \frac{\tau - 2\nu x}{z} + \frac{2\mu z}{x} + 2z - 2x.$$

§. 42. Enfin pour trouver D'', je divise R par xyz, & j'ai $D'' = \alpha' x + \beta' y$. Pour trouver C'', je divise les termes restans par xz & j'ai $C'' = \alpha'''$. Pour trouver B'',

je divise les termes restans par yz, & j'ai $B'' = \alpha'' y$. Pour trouver A'', je divise les termes restans par z, j'ai $A'' = \alpha$. Substituant ces valeurs dans celle de R, & comparant cette derniere avec celle qui est donnée dans l'équation, j'ai

$$\left.\begin{array}{llllll} \alpha & +\alpha'' y^2 & +\alpha''' x & +\alpha' x^2 y & +\beta' x y^2 \\ -\mu\varrho & -2\mu & -\varrho & -2 & -2 \end{array}\right\} = 0,$$

ce qui donne $\alpha = \mu\varrho$, $\alpha'' = 2\mu$, $\alpha''' = \varrho$, $\alpha' = 2$, $\beta' = 2$; donc

$$R = \frac{\mu\varrho}{xy} + \frac{2\mu y}{x} + \frac{\varrho}{y} + 2y - 2x.$$

§. 43. J'ai donc obtenu ces trois valeurs,

$$P = \frac{\nu\varrho}{yz} + \frac{2\nu y - \tau}{z} + \frac{\varrho}{y} + 2y - 2z,$$

$$Q = \frac{\mu\tau}{xz} + \frac{\tau - 2\nu x}{z} + \frac{2\mu z}{x} + 2z - 2x,$$

$$R = \frac{\mu\varrho}{xy} + \frac{2\mu y}{x} + \frac{\varrho}{y} + 2y - 2x.$$

Je fais maintenant

$$\psi = A l x + B l y + C l z + M,$$

ce qui donne,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{A}{x} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = \frac{B}{y} + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \frac{C}{z} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right),$$

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0,$$

& faisant autant d'équations différentes qu'il y a de dénominateurs différens, j'ai les équations suivantes;

I. $A\nu\varrho + B\mu\tau - C\mu\varrho = 0$,

II. $A(2\nu y - \tau) - 2C\mu y + \mu\tau\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = 0$,

III. $A\varrho + 2B\mu z - \mu\varrho\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) = 0$,

IV. $A(2y - 2z) + 2\mu z\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - 2\mu y\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) = 0$,

V.

V. $C(2x-2y)+(2\nu y-\tau)\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)+(\tau-2\nu x)\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)=0$,

VI. $B(\tau-2\nu x)-C\varrho+\nu\varrho\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)=0$,

VII. $B(2z-2x)-\varrho\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)+\varrho\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)=0$,

VIII. $(2y-2z)\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)+(2z-2x)\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)+(2x-2y)\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)=0$.

La VIe. équation donne $\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)=\frac{C}{\nu}+\frac{B(2\nu x-\tau)}{\nu\varrho}$. La IIe équation donne $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)=\frac{2Cy}{\tau}+\frac{A(\tau-2\nu y)}{\mu\tau}$; La IIIe équation donne $\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)=\frac{A}{\mu}+\frac{2Bz}{\varrho}$. J'ai donc $\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)=\frac{C\varrho-B\tau}{\nu\varrho}+\frac{2Bx}{\varrho}$, $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)=\frac{2(C\mu-A\nu)}{\nu\tau}y+\frac{A}{\mu}$, $\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)=\frac{A}{\mu}+\frac{2Bz}{\varrho}$. Mais on a par l'équation I. $\frac{C\varrho-B\tau}{\nu\varrho}=\frac{A}{\mu}$, $\frac{C\mu-A\nu}{\mu\tau}=\frac{B}{\varrho}$: donc

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)=\frac{A}{\mu}+\frac{2Bx}{\varrho},\ \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)=\frac{2By}{\varrho}+\frac{A}{\mu},\ \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)=\frac{A}{\mu}+\frac{2Bz}{\varrho}:$$

donc

$$M=\frac{A}{\mu}(x+y+z)+\frac{B}{\varrho}(x^2+y^2+z^2).$$

Ces valeurs satisfont à toutes les autres équations. On a donc

$$\psi=Alx+Bly+\left(\frac{A\nu}{\mu}+\frac{B\tau}{\varrho}\right)lz+\frac{A}{\mu}(x+y+z)+\frac{B}{\varrho}(x^2+y^2+z^2).$$

Si je fais $A=1$, $B=0$, j'ai

$$\psi=lx+\frac{\nu}{\mu}lz+\frac{1}{\mu}l(x+y+z),$$

ou $\psi=x^{\mu}z^{\nu}e^{x+y+z}$. Si je fais $A=0$, $B=1$, j'ai

$$\Phi=ly+\frac{\tau}{\varrho}lz+\frac{1}{\varrho}(x^2+y^2+z^2),\text{ ou}$$

$$\Phi=y^{\varrho}z^{\tau}e^{x^2+y^2+z^2}.$$

Donc l'intégrale complette eſt

$$x^{\mu}z^{\nu}e^{x+y+z}=F:y^{\varrho}z^{\tau}e^{x^2+y^2+z^2}.$$

§. 44.

§. 44. Soit l'équation

$$(x\,x + x\,z + x^2\,y + x\,y\,z + x\,y + x\,y^2 + y^2\,z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (y\,z + x\,y\,z + y^2\,z - x\,y - y\,y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + x\,z + z\,z + 2\,x\,y\,z + 2\,y\,z^2 + x^2\,z + x\,z^2 + x^2\,y\,z + x\,y\,z^2 + x\,y^2\,z + y^2\,z^2 + y\,z = 0.$$

Je trouve $x+y$, $x+z$, y, z, pour les facteurs de ψ'', Φ''. Je fais donc

$$\psi = \alpha\, l(x+y) + \beta\, l(x+z) + \gamma\, l\,y + \delta\, l\,z + \mathrm{M},$$
$$\Phi = \alpha'\, l(x+y) + \beta'\, l(x+z) + \gamma'\, l\,y + \delta'\, l\,z + \mathrm{M}',$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\alpha}{x+y} + \frac{\beta}{x+z} + \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}\right),$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = \frac{\alpha}{x+y} + \frac{\gamma}{y} + \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\right),$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \frac{\beta}{x+z} + \frac{\delta}{z} + \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}\right),$$
$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = \frac{\alpha'}{x+y} + \frac{\beta'}{x+z} + \left(\frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial x}\right),$$
$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = \frac{\alpha'}{x+y} + \frac{\gamma'}{y} + \left(\frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial y}\right),$$
$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \frac{\beta'}{x+z} + \frac{\delta'}{z} + \left(\frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial z}\right),$$

On aura donc

$$\mathrm{P} = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{(x+y)(x+z)} + \frac{\alpha'\delta - \alpha\delta'}{(x+y)z} + \frac{\alpha'\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}\right) - \alpha\left(\frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial z}\right)}{x+y} + \frac{\gamma'\beta - \gamma\beta'}{(x+z)y} + \frac{\gamma'\delta - \gamma\delta'}{yz} + \frac{\gamma'\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}\right) - \gamma\left(\frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial z}\right)}{y} + \frac{\beta\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\right) - \beta'\left(\frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial y}\right)}{x+z} + \frac{\delta\left(\frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial y}\right) - \delta'\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\right)}{z} + \frac{(\partial \mathrm{M}')}{\partial y}\frac{(\partial \mathrm{M})}{\partial z} - \frac{(\partial \mathrm{M}')}{\partial z}\frac{(\partial \mathrm{M})}{\partial y}.$$

Q=

$$Q = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{(x+y)(x+z)} + \frac{\beta'\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) - \beta\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)}{x+z} + \frac{\alpha\delta' - \alpha'\delta}{(x+y)z}$$
$$+ \frac{\beta\delta' - \beta'\delta}{(x+z)z} + \frac{\delta'\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) - \delta\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)}{z} + \frac{\alpha\left(\frac{\partial M'}{\partial z}\right) - \alpha'\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)}{x+y}$$
$$+ \frac{\beta\left(\frac{\partial M'}{\partial z}\right) - \beta'\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)}{x+z} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial M'}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right).$$

$$R = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{(x+y)y} + \frac{\alpha\left(\frac{\partial M'}{\partial y}\right) - \alpha'\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{x+y} + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{(x+y)(x+z)}$$
$$+ \frac{\beta\gamma' - \beta'\gamma}{(x+z)y} + \frac{\beta\left(\frac{\partial M'}{\partial y}\right) - \beta'\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{x+z} + \frac{\gamma'\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) - \gamma\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)}{y}$$
$$+ \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial M'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right).$$

Je fais donc d'après ces formes

$$P = \frac{A}{(x+y)(x+z)} + \frac{B}{(x+y)z} + \frac{C}{x+y} + \frac{D}{(x+z)y} + \frac{E}{yz} + \frac{F}{y} + \frac{G}{x+z} + \frac{H}{z} + I;$$
$$Q = \frac{A'}{(x+y)(x+z)} + \frac{B'}{x+z} + \frac{C'}{(x+y)z} + \frac{D'}{(x+z)z} + \frac{E'}{z} + \frac{F'}{x+y} + \frac{G'}{x+z} + H',$$
$$R = \frac{A''}{(x+y)y} + \frac{B''}{x+y} + \frac{C''}{(x+y)(x+z)} + \frac{D''}{(x+z)y} + \frac{E''}{x+z} + \frac{F''}{y} + G''$$

ou en reduiſant tout au même dénominateur,

$$P = A\,yz + B(x+z)y + C(x+z)yz + D(x+y)z$$
$$+ E(x+y)(x+z) + F(x+y)(x+z)z$$
$$+ G(x+y)yz + H(x+y)(x+z)y$$
$$+ I(x+y)(x+z)yz;$$

$$Q = A'yz + B'(x+y)yz + C'(x+z)y + D'(x+y)y$$
$$+ E'(x+y)(x+z)y + F'(x+z)yz + G'(x+y)yz$$
$$+ H'(x+y)(x+z)yz;$$

$$R = A''(x+z)z + B''(x+z)yz + C''yz + D''(x+y)z + E''(x+y)yz + F''(x+y)(x+z)z + G''(x+y)(x+z)yz.$$

Pour avoir I, je divise P par $(x+y)(x+z)yz$, & ne trouvant dans P aucun produit de quatre dimensions, je fais $I = o$. Pour avoir H, je divise P par

$$x^2y + xyz + xy^2 + y^2z,$$

& je trouve $H = \alpha$. Il ne reste dans P aucun autre terme de trois dimensions, je fais donc $G = F = o$. Pour avoir E, je divise les termes restans par $x^2 + xz + xy + yz$, & j'ai $E = \alpha'$. Tous les termes étant épuisés, & n'ayant point trouvés de termes paralleles à yz, je prens le terme Ayz & j'ai $A = \alpha''$, cela reduit P à la forme:

$$P = \alpha''yz + \alpha'(x+y)(x+z) + \alpha(x+y)(x+z)y.$$

Comparant cette valeur avec celle de l'équation, j'ai

$$\begin{array}{cccccccccc} \alpha''yz & + \alpha'x^2 & + \alpha'xz & + \alpha'xy & + \alpha x^2y & + \alpha xyz & & & & \\ + \alpha' & - 1 & - 1 & - 1 & - 1 & - 1 & & & & \\ & & & & + \alpha xy^2 & + \alpha y^2z & \Big\} & = o. & & \\ & & & & - 1 & - 1 & \Big\} & & & \end{array}$$

ce qui donne $\alpha' = 1$, $\alpha = 1$, $\alpha'' = -1$, donc

$$P = -\frac{1}{(x+y)(x+z)} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{z}.$$

45. Pour avoir H′, je divise Q par

$$x^2yz + xyz^2 + xy^2z + y^2z^2,$$

& ne trouvant dans Q aucun produit de quatre dimensions, je fais $H' = o$. Pour avoir G′, je divise Q par $xyz + y^2z$, & je trouve $G' = \alpha$. Il ne reste dans Q aucun autre terme de trois dimensions, je fais donc $E' = F' =$

B′

$B' = o$. Pour avoir D', je divise les termes restans par $xy + y^2$, & je trouve $D' = \alpha'$. Il ne reste d'autre terme que yz, je fais $A' = \alpha''$, $C' = o$, cela reduit Q à la forme,

$$Q = \alpha'' yz + \alpha' (x+y) y + \alpha (x+y) yz.$$

Comparant cette valeur avec celle de l'équation, j'ai

$$\left.\begin{matrix} \alpha'' yz + \alpha' xy + \alpha' y^2 + \alpha xyz + \alpha y^2 z \\ -1 \quad +1 \quad +1 \quad -1 \quad -1 \end{matrix}\right\} = o,$$

ce qui donne $\alpha'' = 1$, $\alpha' = -1$, $\alpha = 1$, donc

$$Q = \frac{1}{(x+y)(x+z)} - \frac{1}{(x+z)z} + \frac{1}{x+z}.$$

§. 46. Pour avoir G'' je divise R par

$$x^2 yz + xyz^2 + xy^2 z + y^2 z^2,$$

je trouve $G'' = \alpha$. Pour avoir F'', je divise les termes restans par $x^2 z + xz^2 + xyz + yz^2$ & j'ai $F'' = \alpha'$. Il ne reste plus de termes de trois dimensions, je fais donc $B'' = D'' = E'' = o$. Pour trouver C'', je divise les termes restans par yz, & j'ai $C'' = \alpha''$. Pour trouver A'', je divise les termes restans par $xz + z^2$, & j'ai $A'' = \alpha''$. Ainsi R est reduit à cette forme,

$$R = \alpha''' (x+z) z + \alpha'' yz + \alpha' (x+y)(x+z) z + \alpha (x+y)(x+z(yz.$$

Comparant cette valeur avec celle de l'équation, j'ai

$$\left.\begin{matrix} \alpha''' xz + \alpha''' zz + \alpha'' yz + \alpha' x^2 z + \alpha' xz^2 + \alpha' xyz \\ -1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \\ & & & & & +\alpha^{IV} \\ -\alpha' yz^2 + \alpha x^2 yz + \alpha xyz^2 + \alpha xy^2 z + \alpha y^2 z^2 \\ -2 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ +\alpha^{IV} \end{matrix}\right\} = o,$$

ce qui donne $\alpha''' = 1$, $\alpha'' = -1$, $\alpha = 1$; α' donne des valeurs contradictoires, je fais donc $B'' = \alpha^{IV}$, parce qu'il eſt affecté du terme xyz, & je trouve $\alpha' = 1$, $\alpha^{IV} = 1$, donc

$$R = \frac{1}{(x+y)y} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{(x+y)(x+z)} + \frac{1}{y} + 1.$$

§. 47. J'ai donc les trois formes déſirées, & faiſant

$$\psi = \alpha l(x+y) + \beta l(x+z) + \gamma l y + \delta l z,$$

j'obtiens,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\alpha}{x+y} + \frac{\beta}{x+z} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right);$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = \frac{\alpha}{x+y} + \frac{\gamma}{y} + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right),$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \frac{\beta}{x+z} + \frac{\delta}{z} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right).$$

Subſtituant ces valeurs dans l'équation

$$P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0,$$

on a autant d'équations différentes qu'il y a de dénominateurs, & l'on a ainſi les équations ſuivantes, ſans compter ecells qui déviennent identiquement nulles; I. $\alpha - \delta = 0$, II. $\beta - \gamma = 0$, III. $\beta - \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = 0$, IV. $\alpha - \beta + \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = 0$, V. $\delta - \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = 0$, VI. $\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) = 0$. La 1ere équation donne $\alpha = \delta$, la 2e donne $\beta = \gamma$, la 3e donne $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = \beta$, la 5e donne $\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = \delta$, la 6e donne $\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) = 0$, & ces valeurs ſatisfont à la 4e: j'ai donc $M = \alpha x + \beta y$, donc

$$\psi = \alpha l(x+y) + \beta l(x+z) + \beta l y + \alpha l z + \alpha x + \beta y.$$

En faiſant $\beta = 0$, $\alpha = 1$, on a $\psi = l(x+y) + l z + x$. En faiſant $\alpha = 0$, $\beta = 1$, on a $\Phi = l(x+z) + l y + y$: donc l'intégrale complette eſt

$$(x+y)z\,e^{x} = F : (x+z)y\,e^{y}.$$

§. 48.

§. 48. Soit l'équation

$$[x^3z^4-x^3y^4-x^2z^5-x^2yz^4+xy^6+xy^2z^4+2x^5y^2+4x^4y^3 \\ +x^2y^4z+x^2z^5+2x^4yz^2+2x^3yz^3-2x^4y^2z+2x^3y^3z \\ -2x^2y^2z^3]\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$+[3xy^6-3x^2y^5-4x^2y^3z^2-x^2yz^4+3xy^2z^4-y^7-y^3z^4 \\ +xy^5z+xyz^5-2x^4y^3-4x^4yz^2+4x^3y^4 \\ +10x^3y^2z^2-2x^3y^3z+2x^2y^4z+2x^2y^2z^3]\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$+x^2z^6-x^2y^4z-3xy^5z-3xyz^5+y^6z+y^2z^5-xy^4z^2 \\ -xz^6-2x^4y^2z+4x^3y^3z+2x^3y^2z^2-2x^2y^3z^2 \\ -2x^2yz^4-2x^3yz^3=0.$$

On trouve d'abord, que $x=0$, $y=0$, $z=0$, font les facteurs de Φ'', Ψ'', ce qui donneroit

$$\Psi=\alpha\, l\, x+\beta\, l\, y+\gamma\, l\, z+M,$$
$$\Phi=\alpha'\, l\, x+\beta'\, l\, y+\gamma'\, l\, z+M',$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)=\frac{\alpha}{x}+\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)=\frac{\beta}{y}+\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right),\ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)=\frac{\gamma}{z}+\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right),$$
$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=\frac{\alpha'}{x}+\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=\frac{\beta'}{y}+\left(\frac{\partial M'}{\partial y}\right),\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=\frac{\gamma'}{z}+\left(\frac{\partial M'}{\partial z}\right),$$

ce qui donne

$$P=\frac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{yz}+\frac{\gamma\left(\frac{\partial M'}{\partial z}\right)-\gamma'\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{z}+\frac{\beta'\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)-\beta\left(\frac{\partial M'}{\partial z}\right)}{y} \\ +\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial M'}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial M'}{\partial z}\right),$$

$$Q=\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{xz}+\frac{\alpha\left(\frac{\partial M'}{\partial z}\right)-\alpha'\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)}{x}+\frac{\gamma'\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)-\gamma\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)}{z} \\ +\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial M'}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right),$$

 R=

$$R = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{xy} + \frac{\alpha\left(\frac{\partial M'}{\partial y}\right) - \alpha'\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{x} + \frac{\beta'\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) - \beta\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)}{y} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial M'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Je fais donc

$$P = \frac{A}{yz} + \frac{B}{z} + \frac{C}{y} + D,$$
$$Q = \frac{a}{xz} + \frac{b}{z} + \frac{c}{x} + d,$$
$$R = \frac{\alpha}{xy} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{x} + \delta.$$

Comme la forme de P, Q, R rendroit le tatonnement assez long, je remarque, & c'est pour cela que j'ai choisi cet exemple, que si M & M′ ont des dénominateurs, ensorte que $M = \frac{r}{p}$, $M' = \frac{s}{q}$, en reduisant P, Q, R au même dénominateur, une partie des termes sera multipliée par $p^2 q^2$, une autre par p^2, une autre par q^2, & une autre en sera exemte, ensorte qu'on pourra toujours mettre P, Q, R sous ces formes

$$P = A' p^2 q^2 + B' p^2 + C' q^2 + D',$$
$$Q = a' p^2 q^2 + b' p^2 + c' q^2 + d',$$
$$R = \alpha' p^2 q^2 + \beta' p^2 + \gamma' q^2 + \delta'.$$

Or l'inspection des premiers termes de P, Q, R montre tout de suite, qu'ils peuvent renfermer le quarré

$$(x^2 - 2xy + y^2)(y^4 + 2y^2 z^2 + z^4),$$

je fais donc

$$P = A'(x-y)^2(y^2+z^2)^2 + B'(x-y)^2 + C'(y^2+z^2)^2 + D',$$
$$Q = a'(x-y)^2(y^2+z^2)^2 + b'(x-y)^2 + c'(y^2+z^2)^2 + d',$$
$$R = \alpha'(x-y)^2(y^2+z^2)^2 + \beta'(x-y)^2 + \gamma'(y^2+z^2)^2 + \delta'.$$

On trouvera sans aucune difficulté les valeurs de A′, B′, C′, D′, a', b', c', d', α', β', γ', δ', en suivant la même méthode

thode que ci-deſſus. Comme j'ai détaillé cette méthode dans les §. précédens & qu'elle ne renferme qu'un uſage très ſimple de la méthode des indéterminées, je ne m'y arrêterai pas. Le réſultat donnera

$$P=(x-y)^2(y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2)(x-y)^2$$
$$+(xz+xy)(y^2+z^2)^2+2x^3yz^2-2x^3y^2z+2x^2y^3z$$
$$+2x^2yz^3-2xy^2z^3-2xy^3z^2,$$

$$Q=-(x-y)^2(y^2+z^2)^2+(2y^2z^2-4x^2z^2-2x^2y^2)(x-y)^2$$
$$+(xy+xz)(y^2+z^2)^2+2x^3yz^2-2xy^3z^2-2xy^2z^3$$
$$+2x^2y^3z+2x^2yz^3-2x^3y^2z,$$

$$R=(x-y)^2(y^2+z^2)^2-(2x^2y^2+2y^2z^2)(x-y)^2$$
$$-(xy+xz)(y^2+z^2)^2+2xy^3z^2+2x^3y^2z+2xy^2z^3$$
$$-2x^3yz^2-2x^2y^3z-2x^2yz^3.$$

Maintenant, comme on a

$$P=A+By+Cz+Dyz,$$
$$Q=a+bx+cz+dxz,$$
$$R=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta xy,$$

& qu'il ne faut pas toucher aux quarrés $(x-y)^2$, $(y^2+z^2)^2$, je ferai

$$A=(x-y)^2(y^2+z^2)^2,$$
$$B=(A^{V}x^2y+B^{V}yz^2)(x-y)^2+C^{V}x(y^2+z^2)^2,$$
$$C=A^{VI}y^2z(x-y)^2+B^{VI}x(y^2+z^2)^2,$$
$$D=2x^3z-2x^3y+2x^2y^2+2x^2z^2-2xyz^2-2xy^2z,$$
$$a=-(x-y)^2(y^2+z^2)^2,$$
$$b=(a^{V}xz^2+b^{V}xy^2)(x-y)^2+(c^{V}y+d^{V}z)(y^2+z^2)^2,$$
$$c=(a^{VI}y^2z+b^{VI}x^2z)(x-y)^2+c^{VI}x(y^2+z^2)^2,$$
$$d=2x^2yz-2y^3z-2y^2z^2+2xy^3+2xyz^2-2x^2y^2,$$

$$\alpha=$$

$$\alpha = (x-y)^2 (y^2+z^2)^2,$$
$$\beta = \alpha^{V} x y^2 (x-y)^2 + (\beta^{V} y + \gamma^{V} z)(y^2+z^2)^2,$$
$$\gamma = (\alpha^{VI} x^2 y + \beta^{VI} y z^2)(x-y)^2 + \gamma^{VI} x (y^2+z^2)^2,$$
$$\delta = 2 y^2 z^2 + 2 x^2 y z + 2 y z^3 - 2 x^2 z^2 - 2 x y^2 z - 2 x z^3.$$

Je fais maintenant

$$\psi = \alpha' l x + \beta' l y + \delta' l z,$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\alpha'}{x} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\beta'}{y} + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = \frac{\delta'}{z} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right),$$

& reprenant les trois valeurs

$$P = \frac{A}{yz} + \frac{B}{z} + \frac{C}{y} + D,$$
$$Q = \frac{a}{xz} + \frac{b}{z} + \frac{c}{x} + d,$$
$$R = \frac{\alpha}{xy} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{x} + \delta,$$

l'équation de condition

$$P\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - R\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0,$$

donne en égalant ſéparement à zero les termes qui ont le même dénominateur, les équations ſuivantes

I. $A\alpha' + a\beta' - \alpha\delta' = 0.$
II. $A\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) + b\beta' - \beta\delta' = 0.$
III. $a\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - \gamma\delta' + B\alpha' = 0.$
IV. $C\alpha' + c\beta' - \alpha\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) = 0.$
V. $D\alpha' + c\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - \gamma\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) = 0.$
VI. $B\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - \delta\delta' = 0.$
VII. $C\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) - \beta\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) + d\beta' = 0.$
VIII. $D\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) + d\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - \delta\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) = 0.$

On

On a par les valeurs ci-deſſus, $A = \alpha = -a$, la premiere équation donne donc $\delta' = \alpha' - \beta'$. En ſubſtituant ces valeurs dans les autres, on obtient

II. $\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = \frac{\beta\alpha'}{A} - \frac{(b+\beta)\beta'}{A}$;

III. $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{(B-\gamma)\alpha'}{A} + \frac{\gamma\beta'}{A}$;

IV. $\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) = \frac{C}{A}\alpha' + \frac{c}{A}\beta'$;

V. $c\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - \gamma\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) + D\alpha' = 0$;

VI. $B\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) + \delta(\beta' - \alpha') = 0$;

VII. $C\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) - \beta\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) + d\beta' = 0$;

VIII. $D\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) + d\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - \delta\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) = 0$.

Subſtituant les valeurs de $\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)$ dans les quatre autres équations, on obtient

V. $\frac{(cB - c\gamma - \gamma C + AD)\alpha'}{A} = 0$;

VI. $\frac{(B\beta + bB - b\gamma - A\delta)\alpha'}{A} + \frac{(b\gamma - Bb - B\beta + A\delta)}{A}\beta' = 0$;

VII. $\frac{(Cb + C\beta + \beta c - Ad)}{A}\beta' = 0$;

VIII. $\frac{(D\beta + dB - d\gamma - \delta C)}{A}\alpha' + \frac{(d\gamma - Db - D\beta - c\delta)}{A}\beta' = 0$.

L'équation V devient en y mettant les valeurs, & faiſant pour abréger, $(x-y)^2 = p^2$, $(y^2+z^2)^2 = q^2$,

$$2x^3zp^2q^2 - 2x^3yp^2q^2 + 2x^2y^2p^2q^2 + 2x^2z^2p^2q^2 - 2xyz^2p^2q^2$$
$$+C^{V}b^{VI} \quad +A^{V}c^{VI} \quad -\alpha^{VI}C^{VI} \quad +D^{V}b^{VI} \quad +B^{V}c^{VI}$$
$$-\gamma^{VI}b^{VI} \quad -\alpha^{VI}c^{VI} \quad -\beta^{VI}c^{VI}$$
$$-\alpha^{VI}B^{VI} \quad -B^{VI}\beta^{VI}$$

$$-2xy^2zp^2q^2 + A^{V}a^{VI}x^2y^3zp^4 + B^{V}a^{VI}y^3z^3p^4$$
$$+C^{V}a^{VI} \quad -\alpha^{VI}a^{VI} \quad -\beta^{VI}a^{VI}$$
$$-a^{VI}\gamma^{VI} \quad -\alpha^{VI}A^{VI} \quad -\beta^{VI}A^{VI}$$
$$-A^{VI}\gamma^{VI}$$

$$\left.\begin{array}{l} +A^{V}b^{VI}x^{4}yzp^{4}+B^{V}b^{VI}x^{2}yz^{3}p^{4}+C^{V}c^{VI}x^{2}a^{4} \\ -a^{VI}b^{VI} \qquad -\beta^{VI}b^{VI} \qquad -c^{VI}\gamma^{VI} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -B^{VI}\gamma^{VI} \\ +D^{V}a^{VI}y^{2}z^{2}p^{2}q^{2}+D^{V}c^{VI}xzq^{4}-C^{V}\gamma^{VI}xyq^{4} \\ -C^{VI}\beta^{VI} \end{array}\right\} = 0.$$

Les termes $2x^2y^2p^2q^2$ & $2x^2z^2p^2q^2$ qui reſtent ſeuls m'engagent à ajouter à B, $D^{V}zq^2$, & à C, $C^{V}yq^2$, ce qui complette le tableau précédent, duquel je tire

$$A^{V} = \alpha^{VI},\ B^{V} = \beta^{VI},\ c^{VI} = \gamma^{VI} = A^{VI} = 0,$$
$$b^{VI} = -a^{VI},\ \beta^{VI} = \alpha^{VI},\ C^{VI} = -B^{VI},\ D^{V} = C^{V},$$

ce qui nous donne

$$B = \alpha^{VI}(x^2y + yz^2)p^2 + C^{V}(x+z)q^2,$$
$$C = -c^{V}(x-y)q^2,$$
$$c = -a^{V}(y^2z - x^2z)p^2,$$
$$\gamma = \alpha^{VI}(x^2y + yz^2)p^2.$$

Maintenant l'équation VII donne

$$\begin{array}{l} -2x^2yzp^2q^2+2y^3zp^2q^2+2y^2z^2p^2q^2-2xy^3p^2q^2 \\ -\alpha^{VI}\beta^{V} \qquad +a^{VI}\beta^{V} \qquad +a^{VI}\gamma^{V} \qquad -B^{VI}a^{V} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -B^{VI}\alpha^{V} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2xyz^2p^2q^2+2x^2y^2p^2q^2+B^{VI}a^{V}x^2z^2p^2q^2 \\ -B^{VI}a^{V} \qquad +B^{VI}b^{V} \qquad -a^{VI}\gamma^{V} \\ \qquad\qquad +B^{VI}\alpha^{V} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +B^{VI}c^{V}xyq^4+B^{VI}d^{V}xzq^4-B^{VI}c^{V}y^2q^4-B^{VI}d^{V}yzq^4 \\ +B^{VI}\beta^{V} \qquad +B^{VI}\gamma^{V} \qquad -B^{VI}\beta^{V} \qquad -B^{VI}\gamma^{V} \end{array}$$

$$+a^{VI}\alpha^{V}xy^4zp^4-a^{VI}\alpha^{V}x^3y^2zp^4 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\alpha^{V} = 0,\ d^{V} = -\gamma^{V},\ c^{V} = -\beta^{V},$$
$$\gamma^{V} = \beta^{V},\ b^{V} = a^{V},\ c^{V} = d^{V},$$

ce qui donne

$$b = a^{V}(xz^{2} + xy^{2})p^{2} + c^{V}(y+z)q^{2},$$
$$\beta = -c^{V}(y+z)q^{2}.$$

L'équation VI donne $B(\beta + b) - b\gamma - A\delta = 0$, ou

$$a^{V}C^{V}x^{2}z^{2}p^{2}q^{2} + a^{V}C^{V}x^{2}y^{2}p^{2}q^{2} + a^{V}C^{V}xy^{2}zp^{2}q^{2} + a^{V}C^{V}xz^{3}p^{2}q^{2}$$
$$+2 \qquad -\alpha^{VI}c^{V} \qquad +2 \qquad +2$$
$$-\alpha^{VI}c^{V}x^{2}yzp^{2}q^{2} - \alpha^{VI}c^{V}y^{2}z^{2}p^{2}q^{2} - \alpha^{VI}c^{V}yz^{3}p^{2}q^{2} = 0.$$
$$-2 \qquad -2 \qquad -2$$

On tire de la $\alpha^{VI}c^{V} = -2$, $a^{V}C^{V} = -2$, ce qui rentre dans les déterminations précédentes. L'équation VIII, en fuppoſant α', β', indépendans l'un de l'autre, donne les deux équations

$$\frac{D}{\delta}\beta + \frac{d}{\delta}(B - \gamma) - C = 0,$$
$$\frac{D}{\delta}(\beta + b) - \frac{d}{\delta}\gamma + c = 0,$$

d'où l'on tire en éliminant

$$\frac{D}{\delta} = \frac{C\gamma - Bc + c\gamma}{B\beta + Bb - b\gamma},\quad \frac{d}{\delta} = \frac{C\beta + Cb + \beta c}{B\beta + Bb - b\gamma},$$

ſi l'on ſubſtitue dans ces équations les valeurs trouvées ci-deſſus, on les trouve identiques. J'ai donc en reprenant les équations II, III, IV,

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = -\frac{c^{V}\alpha'(y+z)}{(x-y)^{2}} - \frac{a^{V}x(y^{2}+z^{2})\beta'}{(y^{2}+z^{2})^{2}}$$
$$= -\frac{c^{V}(y+z)\alpha'}{(x-y)^{2}} - \frac{a^{V}x\beta'}{y^{2}+z^{2}};$$
$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{C^{V}\alpha'(x+z)}{(x-y)^{2}} + \frac{\alpha^{VI}y(x^{2}+z^{2})\beta'}{(y^{2}+z^{2})^{2}};$$
$$\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) = \frac{c^{V}\alpha'}{x-y} - \frac{a^{V}z(y^{2}-x^{2})\beta'}{(y^{2}+z^{2})^{2}};$$

d'où l'on tire en faiſant $c^{V} = C^{V}$, $\alpha^{VI} = a^{V}$,

$$M = \frac{\alpha' c^{V} (y+z)}{x-y} - \frac{\alpha^{VI}}{2} \cdot \frac{\beta' (x^2+z^2)}{y^2+z^2} =$$

(en faiſant $c^{V} = 1$, $\alpha^{VI} = -2$)

$\frac{\alpha'(y+z)}{x-y} + \frac{\beta'(x^2+z^2)}{y^2+z^2}$, donc

$$\psi = \alpha' l x + \beta' l y + (\alpha' - \beta') l z + \frac{\alpha'(y+z)}{x-y} + \frac{\beta'(x^2+z^2)}{(y^2+z^2)^2}.$$

En faiſant $\beta' = 0$, $\alpha' = 1$, on a

$$\psi = x z e^{\frac{y+z}{x-y}}.$$

En faiſant $\alpha' = 0$, $\beta' = 1$, on a

$$\Phi = \frac{y}{z} e^{\frac{x^2+z^2}{y^2+z^2}};$$

donc l'intégrale complette eſt

$$x z e^{\frac{y+z}{x-y}} = F : \frac{y}{z} e^{\frac{x^2+z^2}{y^2+z^2}}.$$

§. 49. J'ai choiſi ce dernier exemple aſſez compliqué, pour qu'il fut plus aiſé d'appercevoir les difficultés & les reſſources de la méthode. L'on voit que toute la difficulté conſiſte à mettre les quantités, P, Q, R ſous une certaine forme qui eſt indiquée par la nature même de l'équation; enſorte que le nombre des eſſais eſt limité, & peut être diminué par divers moyens. Cette méthode paroit donc mériter l'attention des Géomètres, d'autant plus que le ſujet eſt d'une extrême difficulté, & n'a point encore été traité d'une maniere détaillée. On s'eſt borné à des exemples ſi ſimples, qu'ils ne pouvoient donner une idée des difficultés de la matiere & de l'imperfection des ſolutions connues. C'eſt un inconvenient qui ſe préſente ſouvent, & qui fait que pluſieurs théories qui paroiſſent générales n'ont que peu ou point d'utilité.

DE-

DESCRIPTIO CAENOPTERIDIS.

Auctore

Car. Petr. Thunberg.

Conuentui exhib. die 16 Octob. 1794.

Genus plantae, ex ordine Filicum, eo tempore novum, ſub nomine Caenopteridis, deſcripſit Anno 1782, in Actis Academ. Imperial. Scient. Petropolitanae celeberrimus Profeſſor *Bergius*, eiusque ſpecies tres notas reddidit, ſcilicet *furcatam, rutaefoliam* et *viviparam.* Poſt hoc tempus plures innotuerunt diſtincti huius generis ſpecies, certe pulcherrimae, quas deſcriptas et depictas cum orbe erudito communicare operae pretium duxi, ſimul cum obſervationibus nonnullis de ſpeciebus antea notis.

Caenopteris *vivipara* detecta fuit in Inſula Mauritii et Bourbon a Domin. *Commerſonio; furcata* vero et *rutaefolia* a me collectae fuerunt in Promontorio bonae ſpei Africes. Docuerunt autem obſervationes circa plura a me collecta ſpecimina, has duas a *Bergio* conſtitutas ſpecies revera non niſi unicam eſſe, aetate variantem et plus minus diſſectam, ut adiuncta a me tabula Caen. *furcatae* ſatis monſtrat, *pinnis inferioribus magis compoſitis, ſuperioribus ſenſim magis magisque ſimplicibus.*

Praeter hasce, aliam quoque ſpeciem nuper dedit pictam et deſcriptam Celeberr. *Smith*, in Iconibus Plantarum, nimirum *rhizophyllam*, ex inſula Dominica Americes oriundam.

Hisce addi ſequentes poſſunt ſpecies, nempe C. *flaccida, odontites, auriculata, japonica* et *cicutaria.*

Character genericus ante datus fuit in Actis Acad. Imper. Scient. Petropol. Tom. VI. Part. II. p. 248, et ſequent.

Species ſunt, quae ſequuntur:

1. C. *flaccida:* fronde pinnata: pinnis lanceolatis ſerratis.
2. C. *rhizophylla:* fronde bipinnata, apice radicante: pinnulis ovatis, infimis bi- et trifidis.
3. C. *odontites*: fronde bipinnatifida: pinnulis lanceolatis acutis inferne fiſſis.
4. C. *auriculata:* fronde bipinnatifida: pinnulis lanceolatis obtuſis, infimis bifido-auriculatis.
5. C. *furcata:* fronde tripinnatifida, apice bipinnatifida: pinnulis lanceolatis obtuſis ſparſe bipartitis.
6. C. *cicutaria:* fronde tripinnatifida: pinnulis lanceolatis ſaepiſſime bifidis.
7. C. *vivipara:* fronde tripinnata: pinnulis filiformibus.
8. C. *japonica:* fronde tripinnata, apice pinnata: pinnulis lanceolatis acutis incifis integrisque.

De-

Deſcriptio ſpecierum:

1. C. flaccida Tab. D. fig. 1. 2.

Frons ſimpliciter pinnata, debilis, erecta, glabra, ſpithamaea usque pedalis vel ultra.

Pinnae ſubpetiolatae, alternae, diſtichae, erectae, lanceolatae, acuminatae, ſerratae, marginatae: fructificantes inciſae, apice integrae, lineam latae, digitales.

Stipes inferne flexuoſus, compreſſus.

2. C. rhizophylla. *Smith* Icon. Plantar. ante non editar. Faſcic 2. Tab. 50.

3. C. odontites. Tab. E. fig. 1.

Frons bipinnatifida, erecta, glabra, bipedalis.

Pinnae petiolatae, diſtinctae, lanceolatae, acuminatae, erectae, palmares.

Pinnulae ſeſſiles, obverſae, diſtichae, alternae, acutae, integrae, infimis nonnullis fiſſis, unguiculares.

Stipes baſi flexuoſus, ſemiteres, ſubſulcatus, ſuperne compreſſus.

4. C. auriculata. Tab. E. fig. 2.

Darea. *Juſſieu* Ordin. natur. pag. 15.

Frons bipinnatifida, ſummo apice pinnatifida, hinc inde vivipara et radicans, flexuoſa, erecta, glabra, ſpithamaea.

Pinnae rarius oppoſitae, ſaepius alternae, breviſſime petiolatae, ovatae, obtuſae, inciſae, horizontales vel reflexae, unguiculares usque pollicares.

Pin-

Pinnulae ſeſſiles, lanceolatae, obtuſae, integrae, excepta infima baſeos e latere ſuperiori bifida et auriculata, lineam longae.

Stipes ſemiteres, ſulcatus.

5. C. furcata. Tab. F. fig. 1.

Caenopteris furcata et rutaefolia. Actor. Petropol. Tom. VII. P. II. Tab. VI. fig. 1. et 2.

Creſcit in Capitis bonae ſpei ſylvis, vt in Hauteniquas et Grootvaders-boſch.

Frons longe ſtipitata, prope radicem ſquamoſa, erecta, glabra, ſpithamaea, vsque pedalis. — *Junior*, quae C. *furcata Bergii*, bipinnatifida, apice tantum pinnatifida; *adultior* tripinnatifida.

Pinnae petiolatae, alternae, diſtiche patentes, incurvato-erectae, pollicares, usque digitales.

Pinnulae ſubpetiolatae, alternae, patulae, unguiculares; *terminales* ſimplices, lanceolatae, integrae; *mediae* bifidae; *inferiores* pinnatifidae: *laciniis* integris, infimis bifidis.

Stipes compreſſus.

6. C. cicutaria. Tab. F. fig. 2. et Tab. G. fig. 1.

Aſplenium cicutarium *Swartz* Prodrom. p. 130.

Filix pinnulis criſtatis *Plum.* Amer. 16. Tab. 25. fig. A. minus bona.

Rutae murariae accedens filicula non ramoſa minima *Sloan.* h. l. 92. Tab. 52. fig. 3. mala et iunioris plantae.

Creſcit in umbroſis calcareis Jamaicae.

Frons

Frons longe ſtipitata, flexuoſo-erecta, glabra, tripinnatifida, apice ſimpliciori, pedalis.

Pinnae oblongae, acuminatae, patenti-erectae, digitales.

Pinnulae lanceolatae, apice integrae, medio bifidae, baſi trifidae, laete virentes, ſemilineam longae.

Fructificationes ſubmarginales, verſus baſin pinnularum ſolitariae, oblongae, e nervo medio exeuntes, membranula ſcarioſa tectae, ferrugineae.

Stipes fuſcus, ſemiteres, ſulcatus, nigricans.

Rachis communis fuſca, teres, apice planiuſcula, ſubinde, ſed rarius, radicans; *partiales* planiores, marginatae.

Media haec eſt inter *Caenopterides* et *Aſplenia*, quo duo Genera combinare videtur.

7. C. vivipara. Act. Petropol. Tom. VI. P. II. Tab. VII. fig. 3.

Acroſtichum viviparum. *Linn.* Syſtem. vegetab. XIV. pag. 930. Suppl. p. 444.

8. C. japonica. Tab. G. fig. 2.

Trichomanes japonicum. *Thunberg* Flor. Japonic. p. 340. *Linn.* Syſt. veg. XIV. p. 941.

Japonenſibus dicitur *Simobi.*

Creſcit locis montoſis in Inſulis Niponiae.

Frons quadripinnatifida, apicem verſus ſenſim ſimplicior, flexuoſa, erecta, laxa apice cernuo, ſpithamaea vel paulo ultra.

Pinnae petiolatae, alternae, inferiores frondi ſimiles et magis compoſitae, ſuperiores ſenſim ſimpliciores, auctae, palmares.

Pinnulae ovato-lanceolatae, inferne attenuatae, bifidae et trifidae, auctae.

Stipes ſulcatus.

Petioli capillares, flexuoſi.

Figurae omnes ſunt magnitudine naturali:

Tab. D. fig. 1. C. flaccida, florens.
—— fig. 2. C. flaccida, ſterilis.
Tab. E. fig. 1. C. odontites.
—— fig. 2. C. auriculata.
Tab. F. fig. 1. C. furcata.
—— fig. 2. C. cicutaria: A. ſpecimen exiguum. B. pinna florens.
Tab. G. fig. 1. C. cicutaria, ſpecimen majus.
Tab. G. fig. 2. C. japonica.

EX-

EXTRAIT DES MÉMOIRES
CONTENUS DANS CE VOLUME.

CLASSE MATHÉMATIQUE ET PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

De ſingulari genere quaeſtionum Diophantearum et methodo maxime recondita eas reſoluendi.

Auctore *L. Eulero*, pag. 3.

Sachant que toutes les puiſſances des nombres de la forme $aa+nbb$ ſont toujours des nombres d'une forme ſemblable $xx+nyy$, il ſe préſente ici un nouveau genre de queſtions indéterminées, pour la reſolution desquelles l'Analyſe de Diophante n'offre aucun ſecours, ſavoir: d'aſſigner de toutes ces puiſſances des nombres de la forme $aa+nbb$ celles, dans lesquelles ou x ou y obtienne la plus petite valeur? C'eſt de ce problème qu'on trouve la ſolution dans le mémoire préſent; & cette ſolution eſt d'autant plus remarquable, qu'elle eſt fondée uniquement ſur la conſidération des facteurs imaginaires du binome $aa+nbb$ & ſur des calculs purement trigonométriques. Cette courte notice ſuffira pour inſpirer aux amateurs de recherches de cette nature la curioſité de lire le mémoire même.

II.

De radicibus aequationis infinitae:

$$0 = 1 - \frac{x^2}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{x^6}{n\ldots(n+5)} + \text{etc.}$$

Auctore *L. Eulero*, pag. 19.

Cette équation infinie préſente le phénomene ſingulier, que pour les cas $n = 1$, $n = 2$ & $n = 3$, toutes les racines, dont le nombre eſt infini, ſont réelles, au lieu qu'elles deviennent toutes imaginaires, dès que le nombre n ſurpaſſe 3. Quant aux racines réelles de cette équation, il eſt facile de les trouver pour les trois cas mentionnés $n = 1$, $n = 2$ & $n = 3$; car elles forment dans chacun une progreſſion arithmétique, dont la différence eſt π pour les deux premiers cas, & 2π pour le troiſième. Mais quand il s'agit de chercher les racines pour des valeurs fractionnaires de n, plus petits que 3, la formule qui exprime la ſomme de la ſérie propoſée devient tellement compliquée & transcendante, qu'il eſt impoſſible de reconnoître les cas où elle s'évanouit. Il ne reſte donc, pour trouver les racines, d'autre moyen que l'approximation, & c'eſt à ce moyen que M. Euler a recours, en cherchant, par la méthode des ſéries recurrentes, inventée par Daniel Bernoulli, la plus petite racine de l'équation propoſée, pour les cas $n = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$ & $n = \frac{1}{4}$, pour leſquels il trouve $x = 0,909$; $x = 0,687$; $x = 0,572$.

Comme pour les cas $n = 1$, $n = 2$ & $n = 3$ toutes les racines de l'équation propoſée peuvent être exprimées d'une maniere ſi ſimple par π, l'auteur avoit cru qu'il en ſeroit de même pour les cas où n eſt une fraction quelconque

que moindre que 3; & que dans les cas où n eſt un nombre entier plus grand que 3, les racines imaginaires de l'équation ſeroient peut être auſſi dans un rapport ſimple avec la quadrature du cercle. Mais un examen plus rigoureux des racines trouvées pour les valeurs $n = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $n = \frac{1}{4}$, $n = 4$ a détruit cette opinion.

Au reſte, quoique cette recherche eût été infructueuſe, elle offre quelques fineſſes de calcul qui doivent donner de l'intérêt à ce petit mémoire.

III.

Exercitatio analytica, vbi imprimis ſeriei maxime generalis ſummatio traditur.

Auctore *L. Eulero*, pag. 41.

Le développement de la formule qui exprime l'arc indéfini de l'Hyperbole équilatère par l'amplitude, & la conſidération du cas où l'amplitude devient 45 degrés, avoient conduit l'auteur de ce mémoire à cette ſommation remarquable:

$$\frac{1}{7} + \frac{1.5}{7.11} + \frac{1.5.9}{7.11.15} + \frac{1.5.9.13}{7.11.15.19} + \&c. = \frac{1}{2}.$$

Pour mieux s'aſſurer de la vérité de cette ſommation, M. Euler met

$$s = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1.5}{7.11}x^{11} + \frac{1.5.9}{7.11.15}x^{15} + \&c.$$

& il trouve que $\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{x^6}{\partial x}\partial.\frac{s}{xx} = x^6$, équation qui donne

$$s = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}\sqrt{(1-x)^4}\int\frac{xx\partial x}{\sqrt{(1-x)^4}};$$

de ſorte qu'en mettant $x = 1$ on a effectivement $s = \frac{1}{2}$.

Par

Par des opérations ſemblables à celles qui l'ont conduit à cette ſommation, l'auteur trouve auſſi la ſommation ſuivante beaucoup plus générale:

$$\frac{a}{b} + \frac{a(a+\theta)}{b(b+\theta)} + \frac{a(a+\theta)(a+2\theta)}{b(b+\theta)(b+2\theta)} + \&c. = \frac{a}{b-a-\theta}.$$

Enfin M. Euler rapporte à cette occaſion la ſommation ſuivante beaucoup plus générale encore que la précédente:

$$\frac{a}{b+\theta} + \frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta} + \frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta}\cdot\frac{c}{d+\theta} + \&c. = \frac{a}{\theta}$$

qui eſt vraye, quelles que ſoyent les valeurs de a, b, c, d, ... & θ, & quel que ſoit le nombre des termes de cette ſérie. Il en donne deux démonſtrations différentes, qui ſont déduites des principes de l'Algébre commune, & n'ont, par conſéquent, rien de commun avec la démonſtration de la ſommation précédente.

IV.

Dilucidationes ſuper formulis, quibus ſinus & coſinus angulorum multiplorum exprimi ſolent; vbi ſimul ingentes difficultates diluuntur.

Auctore *L. Eulero*, pag. 54.

Les éclairciſſemens que feu M. Euler donne dans ce Mémoire, concernent les ſeries, qui expriment par les puiſſances décroiſſantes du coſinus de l'angle ſimple Φ, le ſinus & le coſinus de l'angle multiple $n\Phi$. Il fait voir que ces expreſſions, telles qu'il les avoit données autrefois dans ſon Introduction à l'Analyſe des infiniment petits, ne ſont vrayes à la rigueur que pour les cas, où n eſt un nombre entier poſitif, & que même dans ces cas il faille, pour rendre les expreſſions conformes à la vérité, rejetter tous les termes qui

qui contiennent les cofinus de l'angle Φ dans le dénominateur, quoique les féries ne ſe terminent nulle part.

Après avoir montré ces imperfections dans pluſieurs exemples, M. Euler remonte à leur ſource. Il fait voir d'où proviennent ces écarts de la vérité, en montrant que les féries mentionnées ne donnent pas l'expreſſion complette du ſinus & du cofinus de l'angle multiple $n\,\Phi$; mais qu'il faut joindre à chacune une ſeconde férie, & que les termes de cette ſeconde férie détruiſent dans chaque cas déterminé les termes ſuperflus de la premiere.

Pour montrer l'exiſtence de cette double férie, M. Euler met cof. $\Phi = z$ & cof. $n\,\Phi = s$; de ſorte que $\partial\Phi = -\frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$ & $n\,\partial\Phi = -\frac{\partial s}{\sqrt{(1-ss)}}$, d'où l'on tire cette équation différentielle

$$\partial s^2\,(1 - z\,z) = n\,n\,\partial z^2\,(1 - s\,s),$$

qui différenciée, en ſuppoſant ∂z conſtant, mène à cette équation différentielle du ſecond degré:

$$\partial\,\partial s\,(1 - z\,z) - z\,\partial z\,\partial s + n\,n\,s\,\partial z^2 = 0.$$

En mettant donc

$$s = A\,z^{\lambda} - B\,z^{\lambda-2} + C\,z^{\lambda-4} - \&c.$$

l'équation tantôt rapportée ſera transformée en une férie dont le premier terme eſt $(n\,n - \lambda\,\lambda)\,z^{\lambda}$, qui devient zéro, en mettant $\lambda = \pm n$. On a donc deux valeurs pour l'expoſant λ, qui étant ſubſtituées, la valeur $s = \text{cof. } n\,\Phi$ ſera exprimée par une double férie, l'une provenant de la valeur $\lambda = +n$, l'autre de la valeur $\lambda = -n$, c'eſt-à-dire

$$s = \left\{\begin{array}{l} +\,A\,z^{n} - B\,z^{n-2} + C\,z^{n-4} - D\,z^{n-6} + \&c. \\ +\,\mathfrak{A}\,z^{-n} - \mathfrak{B}\,z^{-n-2} + \mathfrak{C}\,z^{-n-4} - \mathfrak{D}\,z^{-n-6} + \&c. \end{array}\right\}.$$

La premiere ſérie, après avoir déterminé comme il faut les coëfficiens A, B, C, &c. ſe trouve être la même que l'auteur avoit donnée ſeule autrefois pour la valeur de cof. $n\Phi$. Quant à la ſeconde ſérie, M. Euler fait voir qu'elle détruit effectivement tous les termes qui rendoient la premiere inexacte dans les cas ci-deſſus mentionnés.

C'eſt de la même manière que l'auteur traite auſſi l'expreſſion pour le ſinus de $n\Phi$, en faiſant voir que les mêmes imperfections, provenans de la même ſource, peuvent être levées par une ſemblable correction.

V.

De inſignibus proprietatibus formularum integralium praeter binas variabiles etiam earum differentialia cuiuscunque ordinis inuoluentium.

Auctore *L. Eulero*, pag. 81.

Soit Z une fonction à deux variables x & y ſeulement, mais qui renferme, outre ces deux variables auſſi leurs différentielles d'un ordre quelconque, ſi l'on dégage cette fonction des différentielles, en mettant $\partial y = p\,\partial x$, $\partial p = q\,\partial x$, $\partial q = r\,\partial x$, $\partial r = s\,\partial x$, &c. ſa différentielle ſera $\partial Z = V\,\partial x$, V étant une fonction de x, y, p, q, r, &c. dépendante de Z, ſavoir

$$V = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right) + r\left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right) + \&c.$$

De là il ſuit que ſi V marque une fonction telle qu'on vient de dire, la formule différentielle $V\,\partial x$ ſera toujours intégrable, quoique x & y fuſſent entiérement indépendantes l'une de l'autre, au lieu que ſi pour V on prenoit une autre fon-

fonction des variables x, y, p, q, r, &c., l'intégration ne fauroit avoir lieu, à moins qu'il n'y eût une certaine relation entre les variables x & y.

Cela remarqué M. Euler fait voir dans une fuite de Théorèmes que fi la formule $V\partial x$ eſt intégrable, toutes les formules fuivantes

$$\partial x\left(\tfrac{\partial V}{\partial x}\right),\ \partial x\left(\tfrac{\partial V}{\partial y}\right),\ \partial x\left(\tfrac{\partial V}{\partial p}\right),\ \partial x\left(\tfrac{\partial V}{\partial q}\right),$$
$$\partial x\left(\tfrac{\partial V}{\partial r}\right),\ \partial x\left(\tfrac{\partial \partial V}{\partial x^2}\right),\ \partial x\left(\tfrac{\partial \partial V}{\partial x\,\partial y}\right),\ \partial x\left(\tfrac{\partial \partial V}{\partial x\,\partial p}\right),$$
$$\partial x\left(\tfrac{\partial \partial V}{\partial x\,\partial q}\right),\ \partial x\left(\tfrac{\partial \partial V}{\partial y\,\partial p}\right),\ \partial x\left(\tfrac{\partial \partial V}{\partial y\,\partial q}\right),\ \text{&c.}$$

le feront auſſi, & qu'en général toutes les fois que $V\partial x$ admet l'intégration, la formule

$$\partial x\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.}} V}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}\,\partial p^{\gamma}\,\partial q^{\delta}\ \text{&c.}}\right)$$

ſera pareillement intégrable.

Au reſte on trouve dans ce mémoire une nouvelle démonſtration du critère général & connu de l'intégrabilité de la formule $V\partial x$, qui ne diffère pas beaucoup de celle, que feu M. Lexell en avoit donnée dans les nouveaux commentaires de l'Académie.

VI.

Specimen integrationis abſtruſiſſimae hac formula $\int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2xx-1)}}$ contentae.

Auctore *L. Eulero*, pag. 98.

C'eſt par le moyen de deux méthodes entièrement différentes que M. Euler eſt parvenu à rendre la formule

irrationelle propoſée rationelle & à trouver ſon intégrale exprimée par des logarithmes & des arcs de cercle. Dans la premiere méthode il ſe ſert des ſubſtitutions ſuivantes :

$$x = \frac{yy-3}{4},\ y = z\sqrt{-1},\ \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)} = v,$$
$$p = \frac{1+z}{v} \text{ \& } q = \frac{1-z}{v},$$

moyennant lesquelles la formule propoſée ſe trouve transformée en deux, ſavoir :

$$-2^{\frac{3}{4}}\int \frac{\partial p}{2-p^4} - 2^{\frac{3}{4}}\int \frac{\partial q}{2-q^4},$$

dont l'intégration n'eſt ſujette à aucune difficulté.

Dans la ſeconde méthode il met $\sqrt[4]{(2xx-1)} = \varrho$, ce qui transforme la formule propoſée en

$$2\sqrt{2}\int \frac{\varrho\varrho\partial\varrho}{(1-\varrho^4)\sqrt{(1+\varrho^4)}} - 2\int \frac{\varrho\varrho\partial\varrho}{1-\varrho^4},$$

dont la ſeconde partie eſt déja rationnelle. Pour dégager la premiere du ſigne radical, l'auteur met $\frac{\sqrt{(1+\varrho^4)}}{\varrho} = t\sqrt{2}$, & elle devient $\int \frac{\partial t}{1-t^4}$.

Cette ſeconde méthode ayant conduit à une intégrale d'une forme différente de celle que la premiere méthode avoit fournie, M. Euler fait paſſer celle-ci par quelques transformations qui démontrent le parfait accord des deux réſultats.

La ſeconde méthode a ſur la premiere le grand avantage, de pouvoir être miſe en uſage pour raméner à la rationalité d'autres formules irrationnelles beaucoup plus générales. C'eſt ainſi que la formule

$$\frac{\partial x\,(1-x^{n-1})}{(1-x^n)\sqrt[2n]{(2x^n-1)}},$$

peut

peut être transformée en

$$\frac{\partial t}{1-t^{2n}} - \frac{2\varrho^{2n-2}\partial\varrho}{1-\varrho^{2n}},$$

moyennant les ſubſtitutions

$$\sqrt[2n]{(2x^n-1)} = \varrho \;\&\; \frac{x}{\varrho} = t.$$

Même la formule beaucoup plus générale

$$\frac{x^{n-1}\partial x}{(a+bx^n)\left[(a+bx)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}\right]^{\frac{m}{\lambda n}}}$$

peut être rendue rationelle par les ſubſtitutions

$$(a+bx)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n} = \varrho^{\lambda n} \;\&\; \frac{x}{\varrho} = t.$$

Ces profondes recherches, dont le tître de ce mémoire n'anonce pas toute l'importance, rempliſſent un vuide très conſidérable dans l'intégration des formules différentielles irrationelles.

VII.

Integratio formulae cuiusdam differentialis maxime irrationalis, quam tamen per logarithmos & arcus circulares expedire licet.

Auctore *L. Eulero*, pag. 118.

La formule irrationelle qui fait le ſujet de ce mémoire eſt

$$\frac{\partial z\,(1-zz)^2}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)^3}}$$

& la méthode dont l'auteur ſe ſert pour la rendre rationnelle & pour trouver ſon intégrale convient avec la premiere des deux méthodes du mémoire précédent. Car les mêmes ſubſtitutions $\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)} = v$, $\frac{1+z}{v} = p$; $\frac{1-z}{v} = q$, transforment la formule propoſée en $\frac{2pp\partial p}{1-p^4} - \frac{2qq\partial q}{1-q^4}$. Ayant trouvé l'intégrale de la formule propoſée, M. Euler cherche auſſi celle de

$$\frac{\partial z(1+zz)^2}{(1-zz)\sqrt[4]{(1-6zz+z^4)^3}},$$

qu'on obtient en écrivant $z\sqrt{-1}$ à la place de z, de ſorte que toute l'intégrale eſt repréſentée ſous une forme imaginaire qu'il eſt facile de raméner à la réalité. Cette ſeconde intégration eſt d'autant plus remarquable qu'il paroît impoſſible d'y parvenir par une voye directe.

VIII.

Euolutio formulae integralis

$$\int \frac{\partial z(3+zz)}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}$$

per logarithmos et arcus circulares.

Auctore *L. Eulero*, pag. 127.

Les transformations que M. Euler fait ſubir à cette formule, pour la rendre rationelle diffèrent de celles dont il a fait uſage dans les deux mémoires précédens. Il met $z = \frac{1+x}{1-x}$, & la formule propoſée ſe change en

$$2^{\frac{5}{4}}$$

$$2^{\frac{5}{4}} \frac{\partial x}{(1-x^4)\sqrt[4]{(1+x^4)}} + 2^{\frac{5}{4}} \frac{x^3 \partial x}{(1-x^4)\sqrt[4]{(1+x^4)}}.$$

Et en mettant dans la premiere $\frac{x}{\sqrt[4]{(1+x^4)}} = t$, & dans l'autre $1 + x^4 = u^4$, on aura à la place de la formule propoſée ces deux à intégrer

$$2^{\frac{5}{4}} \frac{\partial t}{1-2t^4} + 2^{\frac{5}{4}} \frac{uu\partial u}{2-u^4},$$

qui étant rationnelles, la principale difficulté qui s'oppoſoit à l'intégration, eſt levée.

IX.

Problema geometricum, quo inter omnes Ellipſes, quae per data quatuor puncta traduci poſſunt, ea quaeritur quae habeat aream minimam.

Auctore *L. Eulero*, pag. 132.

Feu M. Euler avoit déja reſolu dans le ſecond ſemeſtre des Actes de l'Académie pour l'année 1780, le problème de trouver la plus petite des Ellipſes qu'on peut circonſcrire à un Parallelogramme rectangle donné. Mais il avoue de n'avoir pas oſé tenter la ſolution du problème général énoncé dans le tître de ce mémoire, à cauſe du grand nombre d'élémens qu'il faut introduire dans le calcul & qui lui paroiſſoient dévoir méner à des formules inextricables. Le préſent mémoire contient une ſolution complette & très facile de cette queſtion intéreſſante.

En

En prolongeant les deux côtés opposés du quadrilatère, formé par la jonction des quatre points donnés, jusqu'à leur rencontre, l'auteur prend les abscisses x sur l'une de ces deux lignes depuis leur point d'intersection, & les ordonnées y parallèles à l'autre; & comme l'équation générale pour les lignes du second ordre est

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0,$$

il détermine tous les coéfficiens, excepté B, par la condition que la courbe doit passer par les quatre points donnés. Ensuite il cherche l'expression pour la surface entiere de l'ellipse, qui est déterminée par les quantités A, B, C, D, E, F & par l'obliquité des ordonnées. Cette expression devant être un *Minimum*, sa différentielle égalée à zéro, en regardant la seule B comme variable, méne à une équation du troisième degré, qui a toujours, pour le moins, une racine réelle, & qui donne par conséquent la valeur de B, moyennant quoi le Problème est parfaitement résolu. Quant aux deux autres valeurs que B obtient, lorsque l'équation cubique a trois racines réelles, l'auteur laisse à d'autres d'examiner, ce qu'elles signifient.

M. Euler fait l'application de cette solution générale au cas où les quatre points donnés forment un Parallélogramme, & à la fin au cas qu'il avoit déja traité autrefois, ou le Parallélogramme est rectangle, & il obtient une solution parfaitement conforme à celle qui se trouve dans les Actes de l'Académie pour l'an 1780. Part. II. page 4.

X.

X.

Solutio problematis maxime curioſi, quo inter omnes Ellipſes, quae circa datum triangulum circumſcribi poſſunt, ea quaeritur, cuius area ſit omnium minima.

Auctore *L. Eulero*, pag. 146.

En reprenant l'équation générale pour les ſections coniques rapportée dans l'extrait précédent, on trouve pour le cas préſent $F = 0$, $D = -\frac{1}{2}A\,a$, $E = -\frac{1}{2}C\,c$, où a & c ſont deux cotés du triangle donné, dont l'un eſt pris pour l'axe des abſciſſes & l'autre pour l'axe des ordonnées. L'expreſſion de la ſurface entiere de l'Ellipſe circonſcrite à ce triangle, en nommant l'obliquité des ordonnées ω, ſera

$$\tfrac{1}{4}\pi \text{ ſin. } \omega \left(\frac{A\,A\,C\,a\,a + A\,C\,C\,c\,c - A\,B\,C\,a\,c}{(A\,C - B\,B)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

ce qui doit être un *Minimum*. Cette condition ayant été remplie, on a $B = \frac{1}{2}\sqrt{A\,C}$, $A = c\,c$ & $C = a\,a$.

Après avoir ſubſtitué toutes ces valeurs tant dans l'équation de la courbe que dans l'expreſſion de ſa ſurface entiere, l'auteur parvient à démontrer les propriétés ſuivantes très rémarquables: 1°.) La ſurface entiere de la plus petite Ellipſe circonſcrite à un triangle donné eſt à la ſurface de ce triangle comme 4π eſt à $3\sqrt{3}$. 2°.) Le centre de cette Ellipſe tombe dans le centre de gravité du triangle. 3°.) Les tangentes de l'Ellipſe tirées par les angles du triangle ſont parallèles aux cotés oppoſés du triangle. Ces deux dernieres propriétés fourniſſent un moyen facile

de circonſcrire à un triangle donné l'Ellipſe, dont la ſurface eſt la plus petite poſſible.

XI.

De centro ſimilitudinis.

Auctore *L. Eulero*, pag. 154.

Deux figures ſemblables dont deux cotés homologues ſont A B & *a b*, étant tracées ſur un même plan, il y aura toujours dans ce plan un point Γ qui ſe rapportera ſemblablement à l'une & à l'autre figure, c'eſt-à-dire un point tel que les figures Γ A B & Γ *a b* ſoyent ſemblables. C'eſt ce point Γ que M. Euler appelle ici le centre de ſimilitude, en montrant dans ce mémoire comment il faut déterminer ce point dans chaque cas.

Ce Problème paroît appartenir à la Perſpective, entant que, l'image d'un objet quelconque ayant été tracé, on veut connoître le point, où il faut ſe placer pour voir les parties homologues de l'objet & de ſon image ſous des angles égaux. Car c'eſt ce même point que l'auteur a nommé ici centre de ſimilitude, & qu'il enſeigne à déterminer, quelle que ſoit la poſition de l'objet & de ſon image.

Un Problème de Géométrie qui facilite cette recherche & dont M. Euler donne une très belle conſtruction, termine ce mémoire; ſavoir: Trois points A, B, C, étant donnés dans un même plan, trouver un quatrième point O dans ce plan, tel que les triangles A O B & B O C ſoyent ſemblables.

XII.

XII.

Problemata e methodo tangentium inverſa.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 166.

Après avoir conſidéré quelques propriétés des courbes paraboliques & hyperboliques, l'auteur ſe propoſe le Problème de chercher les courbes dans lesquelles le rayon oſculateur eſt partout égal à la normale. Il en trouve deux ſolutions, ſelon que ces deux lignes tombent du même coté de la courbe, ou à des cotés oppoſés. Le premier cas appartient évidemment au cercle, mais l'autre donne une courbe tranſcendente dont la nature eſt définie par cette équation entre deux coordonnées orthogonales x & y: $2y = e^x + e^{-x}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt égal à l'unité. Cette courbe a deux branches qui s'étendent à l'infini, & un diamètre qui la diviſe en deux parties égales, à peu près comme la Parabole. Elle a pluſieurs propriétés remarquables, comme les ſuivantes. On trouve

$$y = \frac{\partial\,\partial y}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial^{2n} y}{\partial x^{2n}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4.} + \frac{x^6}{1.2.\ldots.6.} + \text{&c. \&}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial^{2n+1} y}{\partial x^{2n+1}} = x + \frac{x^3}{1.2.3.} + \frac{x^5}{1.2..5} + \text{etc.}$$

On trouve ſa rectification & quadrature par une conſtruction géometrique toute ſimple, pourvu que l'on ſoit en état de décrire la courbe. Enfin elle peut être regardée comme un cercle negatif: car on parvient à elle en donnant

nant au rayon oſculateur du cercle une valeur négative ou oppoſée à la normale; & ſa rectification eſt donnée par le nombre e, c'eſt à dire par les logarithmes réels, tandis que les arcs circulaires peuvent être exprimés par des logarithmes imaginaires; enfin l'aire eſt égale à l'arc multiplié par une conſtante, comme dans le cercle.

XIII.

Solutio dubii circa rectificationem curvarum.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 190.

Toutes les courbes, dans leſquelles le rayon vecteur mené d'un point fixe à un point de la courbe quelconque eſt égal au rayon oſculateur de la courbe dans ce même point, ont cette propriété, qu'elles peuvent être rectifiées algébraiquement. Mais puiſque le cercle ſatisfait évidemment à ce problème, on pourroit en conclure que le cercle peut être rectifié. M. Schubert tâche de réſoudre cette difficulté ou ce paradoxe de la maniere ſuivante. Après avoir remarqué, que les problèmes de cette eſpèce ne ſont réſolus pour la plûpart qu'en introduiſant ou ſubſtituant de nouvelles quantités inconnues, que cette méthode demande une précaution extraordinaire & des recherches raiſonnées, ſi telle ſubſtitution s'accorde bien avec la nature du problème ou non? & qu'en cas qu'elle ſoit en contradiction avec la nature du problème, il n'eſt pas étonnant que la ſolution, fondée ſur des ſuppoſitions contradictoires, entraine des abſurdités: l'auteur fait voir, que toutes les méthodes par leſquelles on eſt parvenu à la rectification des courbes dont il eſt queſtion, ſont fondées ſur des

des ſubſtitutions & éliminations qui ne ſauroient être appliquées au cercle, parcequ'elles contrediſent ouvertement à la nature de cette courbe.

XIV.

Obſeruationes circa ſeries, quibus ſinus et coſinus angulorum multiplorum exprimi ſolent.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 205.

La méthode que M. Euler a employée dans le mémoire No. IV. pour corriger les ſéries qui expriment le ſinus & le coſinus de l'angle multiple $n\Phi$ & dont nous avons donné le précis ci-deſſus page 168. ayant paru à M. Fuſs trop indirecte, ſon intention dans le mémoire préſent eſt de trouver les mêmes doubles ſéries que feu M. Euler avoit données dans le mémoire mentionné par une voye plus directe, ce qui paroît être d'autant plus utile que dans la méthode de M. Euler la détermination des conſtantes introduites par la double intégration eſt fondée ſur la valeur infinie d'un coſinus.

M. Fuſs met cof. $\Phi = y$ & ſin. $\Phi = x$, enſuite $p = y + \sqrt{(yy-1)}$ & $q = y - \sqrt{(yy-1)}$, pour avoir

$$\text{cof. } n\Phi = \frac{p^n + q^n}{2} \text{ \& ſin. } n\Phi = \frac{x(p^n - q^n)}{2v}$$

où $v = \sqrt{(yy-1)}$. Il transforme les puiſſances p^n, q^n, $\frac{p^n}{2v}$ & $\frac{q^n}{2v}$ en ſéries ſelon les puiſſances deſcendantes de y; & après avoir déterminé les coëfficiens, il trouve les mêmes

mes expreſſions que M. Euler avoit données dans le mémoire cité.

L'Auteur donne enſuite la démonſtration de deux autres ſéries, dont les termes montent, l'une ſelon les puiſſances paires, & l'autre ſelon les puiſſances impaires de la tangente de l'angle ſimple, & qui expriment, la premiere le coſinus & l'autre le ſinus de l'angle multiple, en déduiſant de ces deux expreſſions pluſieurs ſommations remarquables.

XV.

De tempore oſcillationis Pendulorum, dum arcus datae amplitudinis cuiuscunque deſcribunt.

Auctore *W. L. Krafft*, pag. 225.

Les expériences ſur le tems d'oſcillation des pendules ſimples d'une longueur donnée ſervent de baſe à des recherches également importantes & pour l'Aſtronomie & pour la Géographie mathématique; le calcul de ce tems n'a pas la moindre difficulté dès qu'on eſt en droit de conſidérer les oſcillations comme infiniment petites, mais il n'eſt point permis de faire toujours une pareille ſuppoſition. Dans ces ſortes de recherches, même dans la pratique de l'horlogerie, il y a des cas, où il faut néceſſairement tenir compte de l'amplitude des oſcillations, & par conſéquent il importe en général, de pouvoir déterminer le tems qu'un pendule emploie à parcourir un arc d'une amplitude donnée qeulconque; mais non ſeulement ce Problème eſt intéreſſant dans ſon application, où d'ailleurs

leurs il ne s'agit ordinairement que d'assés petites amplitudes; il l'est aussi par les difficultés de la solution qu'on y rencontre lorsqu'il est question des oscillations d'une grande amplitude & qu'il en faut déterminer le tems avec un certain degré de précision.

M. Euler en a donné une solution dans les Actes de l'Académie pour l'an 1777; mais à l'aveu même de son illustre auteur, elle laisse encore bien de choses à désirer; non seulement pour la trouver, il falloit passer par des sommations très-compliquées des séries infinies, & avoir recours à des artifices particuliers du calcul infinitesimal; la solution même est encore donnée par une série infinie, qui n'est pas très-convergente & dont les termes suivent une loi de progression si abstraite, qu'il n'y a pas moyen de la continuer seulement jusqu'au quatrième terme, ni d'en abréger le calcul par aucune voye analytique.

M. Krafft expose dans ce mémoire une solution du même Problème, à la quelle il est parvenu par des procédés assés simples & qui a l'avantage de donner le tems de l'oscillation par une série infinie dont la loi de progression est si évidente qu'on peut la continuer à volonté à un aussi grand nombre de termes qu'on voudra, & qui est en même tems fort convergente, au point, que tout au plus quatre ou cinq termes suffisent pour donner le tems de l'oscillation avec la précision d'une partie millieme d'une seconde.

XVI.

XVI.

Solutio quaeſtionis quot modis Polygonum *n* laterum in Polygona *m* laterum per diagonales reſolui queat.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 243.

Quand il s'agit de décompoſer un Polygone de *n* cotés par des diagonales en Polygones de *m* cotés, le nombre *n* doit être de la forme $i\,m - (2\,i - 2)$, *i* étant un nombre entier poſitif qui indique le nombre de *m*gones dont le Polygone de $i\,m - (2\,i - 2)$ cotés ſera compoſé.

En mettant le nombre des réſolutions d'un *n*gone en *m*gones.

Pour le *m*gone $= A$
—— $(2\,m - 2)$ gone $= B$
—— $(3\,m - 4)$ gone $= C$
—— $(4\,m - 6)$ gone $= D$
— — — —
— — — —

Pour le $[(i - 3)\,m - (2\,i - 8)]$ gone $= W$
—— $[(i - 2)\,m - (2\,i - 6)]$ gone $= X$
—— $[(i - 1)\,m - (2\,i - 4)]$ gone $= Y$
—— $[i\,m - (2\,i - 2)]$ gone $= Z$.

M. Fuſs trouve par une énumeration facile

$$Z = \frac{i\,m - (2\,i - 2)}{2\,i - 2}\,[2\,A\,Y + 2\,B\,X + 2\,C\,W + \&c.]$$

nombre qui eſt le coefficient du terme x^{i-1} dans le polynome

$$1 + A\,x + B\,x^2 + C\,x^3 + D\,x^4 + \text{- - - -} + Z\,x^i$$

élévé à la puiſſance $m - 1$.

XVII.

XVII.

De la déscente d'un corps ſur un plan incliné, dont une extrémité eſt appuyée ſur un fond élaſtique.

Par M. *Nicolas Fuſs*, pag. 252.

L'extrémité élevée d'un plan incliné repoſe ſur un fond élaſtique, & l'autre extrémité eſt garnie d'une charniere fixée dans un point du plan horizontal qui lui ſert d'appuy, àfin que le plan incliné ſoit mobile autour de ce point. En chargeant l'extrémité élevée d'un poids qui la faſſe baiſſer, ce poids étant abandonné aux effets de ſa péſanteur, déscendra, en gliſſant ſur le plan incliné, qui ſe relévera, à meſure que le corps déscend, par la force du reſſort qui eſt ſuppoſée agir en raiſon inverſe de ſa longueur. C'eſt la nature de ce mouvement du plan & du corps que M. Fuſs s'eſt propoſé de déterminer dans ce mémoire.

La ſolution complette de ce Problème eſt contenue dans deux équations différentielles du ſecond degré qui ne renferment que deux variables, ſavoir l'inclinaiſon du plan, & l'eſpace que le corps a encore à parcourir ſur le plan incliné. Mais ces équations étant de nature à ſe refuſer à l'intégration, M. Fuſs a recours à l'approximation, en examinant les phénomènes de ce double mouvement dans un cas déterminé.

CLASSE DE PHYSIQUE.

I.

De Ordine fibrarum muscularium cordis. Dissertatio X. De strato secundo fibrarum ventriculi sinistri. Pars III.

Auctore *C. F. Wolff*, pag. 271.

L'auteur poursuivant ses recherches, expose spécialement le troisieme ordre de la seconde couche des fibres du ventricule gauche du coeur. Il fait voir leur origine & direction à la surface supérieure du ventricule, ainsi que les fibres entrelassées de la même surface, ses colonnes & faisceaux charnus, surtout celui qui est analogue au parcourant plus mince, enfin le faisceau annulaire à la même surface supérieure: Ensuite il décrit le progrés des fibres du troisieme ordre à la surface inférieure du ventricule, ses insertions & variétés: il fait voir la différence considérable entre la couche extérieure & la seconde du troisieme ordre, qui nonobstant ne trouble en aucune maniere l'analogie entre les deux couches des fibres du troisieme ordre. A quoi il fait succéder la déscription du quatrieme ordre des fibres du sillon, les faisceaux terminals supérieur & moyen, savoir ceux qui s'étendent jusqu'à la pointe du coeur. A la fin il rapporte les différentes productions des faisceaux terminals distribués par les différentes couches. Toutes ces observations sont illustrées par des figures dessinées d'après nature par l'auteur même, avec le plus grand soin & la plus scrupuleuse exactitude. M. Wolff aussi grand Physiologue qu'habile

bile anatomiſte s'eſt immortaliſé entr'autres par cet ouvrage excellement approfondi, où il a repandu tant de nouvelles lumières touchant le merveilleux méchanisme du coeur humain.

II.

Tentamina de nitri crudi per carbones depuratione.

Auctore *Tob. Lowitz*, pag. 290.

Comme la dépuration du ſalpètre crud eſt un objet très important, il valoit bien la peine d'éſſaier, ſi la force dépurative & décolorante des charbons, que M. Lowitz a découverte & dont il a trouvé les effets ſi avantageux en tant d'autres cas, puiſſe auſſi être employée avec ſuccès à l'égard de ce ſel. Les reſultats des expèriences que M. le Prof. Gadolin en Suede & lui ont faites ſur cet objet, ſatisfirent pleinement leur attente. C'eſt à dire, ils trouverent qu'aucun moyen dépuratif dont on s'eſt ſervi jusqu'ici pour raffiner le ſalpétre, ni même l'alun, n'agit avec autant de force que les charbons de bois bien pillés. Quoique l'alun diminue la couleur brune rougeatre de la ſolution du ſalpètre crud, il n'eſt cependant pas en état de la détruire entièrement quelque quantité qu'on en employe, tandis que le ſeul charbon y étant mélé en une quantité requiſe, en ôte ſi complettement la couleur, que cette ſolution en dévient tout de ſuite auſſi claire & exempte de couleur que l'eau des puits la plus pure. Voi-ci en abrégé ce que notre Académicien a trouvé.

Une partie de charbon en poudre jointe à 10 parties d'une ſolution de nitre crud, produit la décoloration de la leſſive au même degré que l'alun.

Une partie de charbon en poudre cuite une ſeule fois avec cinq parties de ſalpetre crud, donne déja à la premiere cryſtalliſation un ſalpètre parfaitement blanc.

Mais l'avantage devient encore plus frappant, quand on prend avec le charbon en poudre un peu d'alun, parceque alors on n'a béſoin que de peu de charbon en poudre. Suivant les nombreuſes expériences de notre auteur la proportion la plus avantageuſe eſt de 5 à 10 parties de charbon en poudre & 2 parties d'alun ſur 100 parties de ſalpetre crud. Comme la dépuration s'opère en ce cas-ci ſubitement dans le moment même du mélange, il ne faut diſſoudre le ſalpetre que dans autant d'eau qu'il ſuffit pour que le tout ſe cryſtalliſe après la premiere cuite & la filtration achevée.

III.

Lapidis cornei lamelloſi nova ſpecies.

Auctore *Baſil. Sewergin*, pag. 307.

Comme les Minéralogues n'étoient pas d'accord ſur la nature de la ſubſtance qui fait l'objet de cette diſſertation, l'auteur jugea à propos de l'examiner de plus près, pour en fixer les caractères & déterminer exactement la claſſe & l'eſpéce auxquelles cette pierre puiſſe appartenir dans le ſyſtème du regne minéral. Cette ſubſtance nouvelle vient des environs du lac de Baikal, ce qui lui a auſſi fait donner entr'autres le nom de Baikalite. Suivant l'analyſe chymique qui en a été fourni à l'auteur par M. le Prof. Lowitz ſon confrère, elle contient 44 parties de terre ſiliceuſe, 30 de terre talcqueuſe, 20 de terre calcaire & 6 de chaux

chaux de fer, par cent. Toutes ces propriétés chymiques jointes à ſes qualités extérieures portent enfin notre auteur à croire, que la pierre en queſtion eſt une eſpèce de Hornblende, qu'il déſigne par le nom de Hornblende prismatique.

IV.

Experimenta nova cryſtalliſationem alcalium cauſticorum ſpectantia.

Auctore *Tob. Lowitz*, pag. 311.

Jusqu'à préſent on a presque généralement douté de la faculté des ſels alcalis cauſtiques de ſe cryſtalliſer. M. Lowitz a cependant trouvé que ces ſels donnent des cryſtaux très réguliers & bien exprimés, lorsqu'ils ſont traités ſans l'aide de l'eſprit de vin, par la ſeule évaporation opérée avec précaution par la leſſive cauſtique parfaitement privée de tout air fixe. Par cette ſolution & cryſtalliſation repétée de ce ſel, on obtient enfin des beaux cryſtaux blancs, qui diſſous de nouveau dans de l'eau donnent une leſſive parfaitement claire & très cauſtique, ce que l'on n'a pu obtenir jusqu'à préſent en aucune maniere: elle eſt par préférence recommandable dans les épreuves chymiques qui doivent être faite avec une grande exactitude.

L'alcali végétal produit dans le froid des cryſtaux octaëdres, & dans la chaleur de très grand cryſtaux tétraëdres en tablettes.

L'alcali minéral donne auſſi des tables tétraëdres mais à coins émouſſés. La cryſtalliſation de cet alcali eſt ſu-

jette à un peu plus de difficulté que celle de l'alcali végétal & ne peut s'opérer qu'en hyver, vû que ſes cryſtaux ſe fondent dans leur propre eau de cryſtalliſation par la moindre temperature naturelle. Même l'alcali cauſtique volatil, c'eſt à dire, l'eſprit de ſalmiac le plus fort préparé avec de la chaux, paſſe par le moyen du froid artificiel en une maſſe cryſtalline.

V.

Deſcriptio Pleuronectoris Fleſi & Paſſeris Linnei hiſtorico anatomica.

Auctore *Joſ. Theophil. Koelreuter*, pag. 327.

La déſcription des parties externes de cette eſpece de poiſſons nommée turbot ou plie, a été faite d'après un exemplaire gélé & ſeche. La figure, ſi l'on en retranche le muffle & la queue eſt ovale, le corps même eſt très plat, & les deux yeux ſe trouvent placés ſur la ſurface droite. L'auteur donne les méſures exactes de toutes ſes parties & en décrit les couleurs & les proportions. Il paſſe enſuite à la déſcription anatomique ou des parties internes du poiſſon, & il la fait ſuivre des obſervations faites ſur ſix autres pleuronectes transportés gélés d'Archangel à St. Pétersbourg dont quatre étoient laités ou des mâles, & deux oeuvés ou des femelles: trois en avoient les yeux placés ſur la ſurface droite & les trois autres ſur la ſurface gauche. L'auteur avoit auſſi reçu en même temps pluſieurs poiſſons de cette eſpèce de l'isle Oeſel connus ſous le nom de *Curländiſche Butten* de l'un & l'autre ſexe, ayant les uns leurs yeux placés ſur la ſurface droite, les autres ſur la ſurface gauche, & après les avoir examinés & comparés avec les plies d'Archan-

changel, il a trouvé que malgré la différence conſidérable qu'on y remarque, ils appartiennent tous quant aux caractères eſſentiels à une ſeule & même eſpèce du ſyſtème de la nature.

CLASSE ASTRONOMIQUE ET MÉTÉOROLOGIQUE.

I.

Eſſay de perfectionner une méthode de trouver ſur mer la latitude géographique du vaiſſeau.

Par M. *W. L. Krafft*, pag. 353.

Il y a, comme on le ſçait, pluſieurs manieres différentes de déterminer ſur mer la latitude géographique du vaiſſeau, & il en eſt une, qui l'emporte peut-être ſur toutes les autres par la facilité des obſervations qu'elle demande, & qui à cet égard eſt plus propre qu'aucune des autres, à la pratique des marins. Dans l'emploi de cette méthode il ne s'agit que de prendre deux hauteurs d'un aſtre dont la déclinaiſon ſoit connue, & d'obſerver le tems qui s'écoule entre elles; ces obſervations ne ſont point, comme celles des hauteurs méridiennes, bornées à des inſtans déterminés, elles ne ſuppoſent point qu'on en connoiſſe le tems vrai, & elles permettent à l'obſervateur la commodité de mettre d'avance ſon ſecteur de Hadley à la hauteur qu'il ſe propoſe de prendre. Les deux hauteurs de l'aſtre & le tems qui s'eſt écoulé entre elles, étant connus par l'obſervation, la trigonométrie ſphérique enſeigne les regles d'en conclure la latitude géographique du lieu de l'obſervation; mais ce calcul eſt

eſt trop compliqué pour être propre à la pratique de la marine, & ſujet à trop de précaution pour écarter toute mépriſe dangereuſe de la part du marinier. Il y a long-tems, que M. Douwes a établi dans ce calcul un procédé fort ingénieux à cet égard, qui en abrége & facilite conſidérablement les opérations; auſſi cette méthode de M. Douwes eſt-elle très en vogue dans la marine angloiſe & hollandoiſe; mais elle eſt ſujette à deux inconveniens; d'abord pourque le reſultat en ſoit ſûr, il faut que pluſieurs conditions différentes aient eu lieu dans les tems où l'on prend les hauteurs de l'aſtre; or quant à l'état du ciel, il n'eſt pas toujours au pouvoir du marinier de les remplir. Enſuite pour que l'application de la regle de M. Douwes ſoit promte & expéditive, il faut que le marin connoiſſe déja la latitude de ſon vaiſſeau à un certain degré de préciſion; or il peut ſouvent ſe trouver dans le cas de ne la connoître que très-groſſierement; & enfin cette regle n'eſt qu'une approximation à la vérité. M. Krafft préſente donc dans ce mémoire une autre ſolution de cet important Problème nautique, qui eſt rigoureuſe & auſſi facile dans la prâtique que celle de M. Douwes; qui a de plus l'avantage d'être plus générale, n'étant bornée à aucune condition & ne démandant qu'une connoiſſance préalable bien peu préciſe de la latitude du vaiſſeau, & qui par conſéquent doit mériter à cet égard l'attention des mariniers; au moins dans les cas où la regle de M. Douwes ne ſeroit pas d'une application auſſi ſûre & expéditive qu'il eſt à déſirer.

II.

Mémoire ſur la différence en longitude des obſervatoires de Paris & de Greenwich, avec les obſervations d'où elle a été déduite, & une critique raiſonnée de celle que M. le Général-Major Roy a conclue de ſes opérations géodéſiques.

Par M. *le Comte de Brühl*, pag. 363.

L'auteur rapporte d'abord les obſervations qu'il a faites à la fin de 1785 à Paris avec un excellent chronomètre d'Emery, & il trouve la différence en longitude entre Greenwich & Paris de 9′, 19″, 40 de temps: enſuite il expoſe les obſervations de M. Méchain faites avec le chronomètre de M. le Préſident de Saron, qui donne cette longitude de 9′, 19″, 75. Ces reſultats comparés avec la longitude que M. le Général-Major Roy a déduite de ſes opérations géodéſiques donne une différence en défaut de 0, 77 ſecondes. Or en comparant les obſervations faites pour déterminer la longitude des obſervatoires à Richmond & à Highboury avec les déterminations de M. le Général-Major Roy, M. le Comte de Brühl trouve une différence en excès, pour le premier endroit de 0″, 72 & pour le ſecond de 0″, 77, d'où il ſoupçonne que ces discordances proviennent des réfractions terreſtres, dont les effets très variables ont influé ſur la chaine des triangles, qui lient la baſe méſurée par M. le Général: ce qui le fait conclure que l'emploi des chronomètres pour perfectionner la Géographie doit être préferé aux opérations géodéſiques tant à l'égard de la préciſion qu'à celui de la durée du temps & des ſoins fatigans qu'elles démandent. M. le Comte de Brühl communique à la fin de ſon mémoire intéreſſant quelques obſervations de la chèvre au deſſus & au deſſous du

du Pole, d'où il deduit la latitude de ſon obſervatoire de 51°. 36′. 9″, 585, qui s'accorde à $\frac{6}{100}$ de ſeconde près avec celle qu'il avoit conclue de ſes obſervations de l'année paſſée: enfin la quantité de la réfraction à environ 7°. 30′ de hauteur, qu'il a trouvé le 27 Juin de 7′. 0″, 47. Barom. 30. 90. Thermom. 60° & le 28 Juin de 6′. 46″, 51. Barom. 29. 75. Therm. 60 $\frac{1}{2}$, dont l'accord avec les tables de Bradley & de Maskelyne offrent une nouvelle confirmation de l'exactitude avec laquelle ces célébres aſtronomes ont conſtruit leurs tables.

III.

Extrait des Obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg, en 1791 d'après le nouveau ſtile.

Par M. *J. A. Euler*, pag. 372.

La plus grande hauteur du Baromètre 28. 90 pouces de France, le 28 Février. Sa plus petite hauteur 26. 96 le 29 Novembre. Sa hauteur moyenne 28. 086.

Le plus grand froid n'a été que de 12 $\frac{1}{3}$ degrés de Réaumur, le 7 & le 22 Décembre.

La plus grande chaleur 22 $\frac{1}{2}$ dégrés le 15 Juin.

Le froid moyen pendent l'hyver de 1790 à 1791, a été depuis le 1 Novembre jusqu'au 1 Mai, de 3 $\frac{1}{4}$ d. & depuis le 1 Décembre jusqu'au 1 Avril de 4 $\frac{1}{4}$ degrés, ce qui pour St. Pétersbourg eſt un hyver extraordinairement doux.

La chaleur moyenne pendant l'été de 1791, a été
depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre de 11 degrés
depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de $13\frac{2}{3}$ degrés.

Il y a eu en 1791, 88 jours de calme, 170 jours de vent médiocre, 98 jours de vent fort & 9 jours de vent trés fort. Enſuite 65 jours de ciel entièrement ſerein, 124 jours de ciel entièrement couvert, 114 jours de pluie, 93 jours de neige, 11 jours de grèle, & 14 orages. L'auteur n'a obſervé pendant toute cette année aucune aurore boréale. La riviere Néva debacla le 20 Avril & elle fut repriſe en trois fois, le 8 Novembre, le 13 Novembre & le 6 Décembre. Ce qui eſt un phénomène dont on n'a pas eu d'exemple jusqu'ici.

IV.

Réſumé des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg, depuis 1772 jusqu'à 1792 comprennant un intervalle de vingt ans.

Par M. *J. A. Euler*, pag. 393.

Ce mémoire eſt intéreſſant, mais il n'eſt gueres ſuſceptible d'extrait. Les amateurs de la Météorologie aimeront mieux le lire en entier dans les Actes mêmes. L'Auteur après avoir décrit ſes inſtrumens, leur expoſition & la méthode qu'il a choſie d'annoter ſes obſervations & d'en déduire des concluſions, expoſe d'abord ſéparement l'état météorologique moyen pour chaque mois de l'année: l'état météorologique moyen pour l'année entiere, qu'il fait ſuivre 1.) de celui pour les ſix mois d'été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre comprenant un intervalle de 184 jours, enſuite 2.) de celui pour

pour les ſix mois d'hyver depuis le 1 Novembre d'une année jusqu'au 1 Mai de l'année ſuivante, comprenant un intervalle de 181 jours: où ſe trouvent enfin jointes les obſervations ſur la premiere & derniere gelée, ſur la premiere & derniere neige, & finalement ſur la priſe & la débacle de la Néva.

L'auteur ayant pendant l'impreſſion de ce mémoire refait une partie de ſes calculs pour vingt autres années depuis 1775 jusqu'à 1794 incluſivement, il a trouvé les reſultats ſuivans qui s'accordent aſſés bien avec ceux de ſon mémoire, & qui par conſéquent en en confirmant la juſteſſe méritent d'être rapportés ici. Ils ne regardent que le froid & la chaleur.

I. Le nombre moyen des jours où il géle continuellement eſt de

111 à 112 pour l'année complette, depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre incluſivement: ce nombre eſt de

100 en hyver, ou depuis la priſe de la riviere en automne jusqu'à ſon debacle au printems prochain, qui pour les vingt années 1775 — 1794 donne un intervalle moyen de 147 jours. Parmi ces 100 jours de gelée continuelle, on peut compter 46 où le froid ſurpaſſe 170 degrés de Délisle, ou $10\frac{3}{4}$ degrés de Réaumur. Enfin de

11 à 12 en été, depuis la débacle de la riviere au printems jusqu'à ſa repriſe en automne, ce qui pour les vingt années ſusdites fait un intervalle moyen de 218 jours.

II. Le nombre moyen des jours, où il ne gèle que le matin ou le soir, & où il degèle à midi, est pour les mêmes intervalles de

59 à 60 pour l'année complette, de

33 en hyver & de

25 à 26 en été

III. Le nombre moyen des jours où il ne gèle point du tout, est encore pour les mêmes intervalles, de

194 à 195 pour l'année complette, de

14 en hyver, & de

180 en été. Parmi ces 180 jours, où il ne gèle point du tout, il y a 120 où la chaleur surpasse 130 degrés de Délisle, qui font $10\frac{3}{4}$ degrés de chaleur d'après Réaumur.

MA-

MATHEMATICA.

ET

PHYSICO-MATHEMATICA.

DE
SINGVLARI GENERE
QVAESTIONVM DIOPHANTEARVM
ET METHODO MAXIME RECONDITA EAS RESOLVENDI.

Auctore
L. EVLERO.

Conuentui exhibit die 13 Ianuar. 1777.

§. 1.

Notum eſt omnes poteſtates numerorum huius formae: $a\,a + n\,b\,b$ ſemper eſſe ſimilis formae, ſcilicet $x\,x + n\,y\,y$; vnde ſi proponatur numerus $N = a\,a + n\,b\,b$, eius poteſtas quaecunque N^λ ſemper exprimi poterit per talem formulam: $N^\lambda = x\,x + n\,y\,y$, vbi pro ſingulis poteſtatibus numeri N tam x quam y certos valores ſortientur. Erit enim

$N^2 = (a\,a - n\,b\,b)^2 + n\,(2\,a\,b)^2$;

$N^3 = (a^3 - 3\,n\,a\,b\,b)^2 + n\,(3\,a\,a\,b - n\,b^3)^2$;

$N^4 = (a^4 - 6\,n\,a\,a\,b\,b + n\,n\,b^4)^2 + n\,(4\,a^3\,b - 4\,n\,a\,b^3)^2$;

vnde lex progreſſionis iam ſatis elucet, et facile poteſtates, quovsque lubuerit, continuari poterunt, ope huius Lemmatis, quod ſi fuerit

$$N = aa + nbb \text{ et } M = cc + n\partial\partial$$

ſemper ſit

$$MN = (ac - nb\partial)^2 + n(a\partial + bc)^2.$$

§. 2. Cum igitur, ſi fuerit $N = aa + nbb$, omnes eius poteſtates eandem habeant formam, ita vt ſit $N^\lambda = xx + nyy$, nouum genus quaeſtionum, quas hic tractare inſtitui, in hoc conſiſtit, vt eae poteſtates ipſius N inueſtigentur, in quibus vel numerus x vel y euadat minimus, ſeu ipſi vnitati aequalis. Quoniam enim hi numeri nunquam euaneſcunt, in integris etiam minorem valorem quam 1 recipere non poterunt; manifeſtum autem eſt in methodo Diophantea nullam reperiri viam huiusmodi quaeſtiones reſolvendi.

§. 3. Quo indoles huiusmodi quaeſtionum clarius percipiatur, conſideremus omnes poteſtates binarii, quae ſemper in hac forma $xx + 7yy$ contineri deprehenduntur, ſi modo pro prima et ſecunda poteſtate etiam fractiones admittantur, ſi quidem habebitur

$$2 = (\tfrac{1}{2})^2 + 7(\tfrac{1}{2})^2 \text{ et } 4 = (\tfrac{3}{2})^2 + 7(\tfrac{1}{2})^2;$$

altiores vero poteſtates omnes in integris tali forma exhiberi poſſunt, quemadmodum ex ſequentibus exemplis elucet:

$2^3 = 8 = (1)^2 + 7(1)^2$, ergo $x = 1$ et $y = 1$,
$2^4 = 16 = (3)^2 + 7(1)^2$, ergo $x = 3$ et $y = 1$,
$2^5 = 32 = (5)^2 + 7(1)^2$, ergo $x = 5$ et $y = 1$,
$2^6 = 64 = (1)^2 + 7(3)^2$, ergo $x = 1$ et $y = 3$,
$2^7 = 128 = (11)^2 + 7(1)^2$, ergo $x = 11$ et $y = 1$,
$2^8 = 256 = (9)^2 + 7(5)^2$, ergo $x = 9$ et $y = 5$,
$2^9 = 512 = (13)^2 + 7(7)^2$, ergo $x = 13$ et $y = 7$,
$2^{10} = 1024 = (31)^2 + 7(3)^2$, ergo $x = 31$ et $y = 3$.

Vbi

Vbi imprimis moneri oportet, in his reſolutionibus pro x et y alios numeros non eſſe admittendos, niſi qui inter ſe ſint primi, ſi quidem numeri compoſiti nulla difficultate laborant; namque ſi in genere fuerit $N^\lambda = xx + nyy$, erit quoque $N^{\lambda+2} = (Nx)^2 + n(Ny)^2$, hanc ob cauſam hic perpetuo numeros x et y inter ſe primos aſſumi conueniet.

§. 4. Quodſi ergo in caſu allato $2^\lambda = xx + 7yy$ quantitas y debeat eſſe minima, ea manifeſto vnitati debet eſſe aequalis, ideoque quaeſtio huc reducitur, quinam numeri pro x accipi queant, vt formula $xx + 7$ exhibeat poteſtatem binarii. Ex exemplis autem ſuperioribus patet, id fieri caſibus $x = 3$, $x = 5$, $x = 11$, dehinc autem alius caſus non occurrit, vsque ad $x = 181$, hinc enim prodit $(181)^2 + 7 = 2^{15}$, ſicque requiritur methodus hos caſus a priori inveſtigendi. His praemiſſis vis ſequentis problematis haud difficulter perſpicietur.

Problema generale.

Si fuerit $N = aa + nbb$, *eas inueſtigare poteſtates ipſius* N, *quibus fiat* $N^\lambda = xx + n$, *quo caſu vtique valor ipſius* y *in formula generali* $xx + nyy$ *euadit omnium minimus.*

Solutio.

§. 5. Hic plurimum iuuabit, formulam $aa + nbb$ in ſuos factores imaginorios reſoluiſſe, quippe quae reſolutio iam ſummum vſum in Analyſi praeſtitit; erit igitur

$$N = (a + b\sqrt{-n})(a - b\sqrt{-n}),$$

vnde quaelibet poteſtas in genere hoc modo exprimetur:

$$N^\lambda = (a + b\sqrt{-n})^\lambda (a - b\sqrt{-n})^\lambda.$$

Talium autem formularum poteſtates ſemper ſimili ratione

exprimuntur, vnde si fuerit $(a + b\sqrt{-n})^\lambda = A + B\sqrt{-n}$, erit $(a - b\sqrt{-n})^\lambda = A - B\sqrt{-n}$, hincque facta multiplicatione habebitur $N^\lambda = A^2 + nB^2$; sicque quaestio huc redit, quibusnam casibus valor litterae B vnitati euadat aequalis; quodsi forte fieri nequeat, ii saltem casus quaerantur, quibus littera B minimum accipiet valorem.

§. 6. Quo autem hoc minimum litterae B perscrutari queamus, recurramus ad formulam notissimam imaginariorum, cui vniuersa theoria angulorum plerumque innititur, scilicet $\cos.\Phi + \sqrt{-1}.\sin.\Phi$, quippe cuius omnes potestates simili modo exprimi possunt, cum sit

$$(\cos.\Phi + \sqrt{-1}\sin.\Phi)^\lambda = \cos.\lambda\Phi + \sqrt{-1}\sin.\lambda\Phi.$$

Hunc in finem statuamus

$$a + b\sqrt{-n} = p(\cos.\Phi + \sqrt{-1}\sin.\Phi),$$

atque esse oportebit $a = p\cos.\Phi$; $b\sqrt{n} = p\sin.\Phi$, vnde colligitur $\text{tang.}\,\Phi = \frac{b\sqrt{n}}{a}$, hincque porro

$$\sin.\Phi = \frac{b\sqrt{n}}{\sqrt{(aa+nbb)}} \text{ et } \cos.\Phi = \frac{a}{\sqrt{(aa+nbb)}}.$$

Inuento autem angulo Φ factor ille realis p colligitur fore $p = \sqrt{(aa+nbb)}$. Quare cum sit $N = aa + nbb$, quaeratur angulus Φ, vt sit $\text{tang.}\,\Phi = \frac{b\sqrt{n}}{a}$, siue

$$\sin.\Phi = \frac{b\sqrt{n}}{\sqrt{N}} \text{ et } \cos.\Phi = \frac{a}{\sqrt{N}};$$

et quia tum erit $p = \sqrt{N}$, ista transformatio nobis praebet

$$(a + b\sqrt{-n}) = \sqrt{N}(\cos.\Phi + \sqrt{-1}\sin.\Phi),$$

ideoque etiam

$$a - b\sqrt{-n} = \sqrt{N}(\cos.\Phi - \sqrt{-1}\sin.\Phi).$$

§. 7. His iam formulis introductis erit potestas quaecunque ipsius N, scilicet

N^λ

$N^\lambda = N^{\frac{\lambda}{2}} (\text{cof.}\,\lambda\Phi + \sqrt{-1}\,\text{fin.}\,\lambda\Phi)\,.\,N^{\frac{\lambda}{2}} (\text{cof.}\,\lambda\Phi - \sqrt{-1}\,\text{fin.}\,\lambda\Phi)$, vnde facta euolutione prodit aequatio identica $N^\lambda = N^\lambda$. At vero si ponamus, vti fecimus, $N^\lambda = (A + B\sqrt{-n})\,(A - B\sqrt{-n})$, litterae A et B ita definientur, vt sit

$$A = N^{\frac{\lambda}{2}} \text{cof.}\,\lambda\Phi \text{ et } B = \frac{N^{\frac{\lambda}{2}} \text{fin.}\,\lambda\Phi}{\sqrt{n}},$$

hincque erit $N^\lambda = A^2 + n\,B^2$.

§. 8. Cum igitur ii casus quaerantur, quibus littera B minimum fortitur valorem, quaestio huc redit, vt pro λ ii inuestigentur numeri integri, quibus haec formula $\frac{N^{\frac{\lambda}{2}} \text{fin.}\,\lambda\Phi}{\sqrt{n}}$ minimum adipiscatur valorem, quod manifesto eueniet, si $\text{fin.}\,\lambda\Phi$ minimum valorem accipiet, quod vtique eueniret, si angulus $\lambda\Phi$ fieret vel π, vel 2π, vel 3π, vel 4π, etc. vel in genere $i\pi$ denotante i numerum quemcunque integrum, π vero angulum duobus rectis aequalem, tum enim adeo prodiret $\text{fin.}\,\lambda\Phi = 0$, ideoque etiam $B = 0$. Quoniam autem plerumque angulus Φ cum peripheria circuli est incommensurabilis, fieri nequit, vt euadat $\lambda\Phi = i\pi$. In eos igitur casus inquirere debemus, quibus angulus $\lambda\Phi$ quam minime discrepet ab $i\pi$. Quodsi enim fuerit $\lambda\Phi = i\pi + \omega$, denotante ω angulum valde paruum, tum vtique erit $\text{fin.}\,\lambda\Phi = \pm\,\text{fin.}\,\omega$. His ergo casibus formula nostra $B = \frac{N^{\frac{\lambda}{2}} \text{fin.}\,\lambda\Phi}{\sqrt{n}}$ vtique eo minorem accipiet valorem, quo minor fuerit angulus ω; vbi quidem probe perpendi oportet, quando λ fuerit numerus satis magnus, tum valorem litterae B vnitatem excedere posse, etiamsi angulus ω fuerit

fuerit quam minimus. Interim tamen perſpicuum eſt, hac methodo omnes valores exponentis λ prodire debere, quibus littera B minimos adipiſcitur valores, etiamſi non omnes ſint $= 1$, ſimul vero hoc modo omnes caſus, quibus ſit $B = 1$, certe reperiri debere.

§. 9. Cum igitur proxime eſſe oporteat $\lambda \Phi = i \pi$ proxime quoque erit $\frac{\lambda}{i} = \frac{\pi}{\Phi}$. Quamobrem ſi methodo iam ſatis nota omnes fractiones quaerantur, quae proxime accedant ad fractionem $\frac{\pi}{\Phi}$, harum fractionem numeratores dabunt valores exponentis λ, denominatores vero ipſius i; et quo accuratius iſtae fractiones cum fractione $\frac{\pi}{\Phi}$ conuenient, eo minores valores pro littera B reſultabunt, quorum omnium minimi erunt ii, quibus fit $B = 1$.

Exemplum 1.

§. 10. Euoluamus ſecundum haec praecepta caſum, quo $a = 1$; $b = 1$ et $n = 2$, ita vt numerus noſter propoſitus ſit $N = 3$, atque $3^\lambda = A^2 + 2 B^2$, ſicque eae poteſtates ternarii inueſtigari debeant, quibus fiat $3^\lambda = A^2 + 2$, quod euenit caſu $B = 1$. Praeterea vero ſimul eos caſus inueſtigemus, quibus B ſit numerus ſatis paruus, veluti 2 vel 4, vel 5 etc., propterea quod caſus $B = 3$ hinc excluduntur. Hic quidem ſtatim iſti caſus ſe offerunt: $3^1 = (1)^2 + 2$; $3^3 = (3)^2 + 2$; vnde quaeritur, an tales caſus etiam in maioribus poteſtatibus exiſtant.

§. 11. Cum igitur ſit $a = 1$; $b = 1$ et $n = 2$; quaeri oportet angulum Φ, vt ſit tang. $\Phi = \sqrt{2}$, ideoque l tang. $\Phi = 10,1505150$, vnde colligitur $\Phi = 54^0, 44', 8'', 19$, quem angulum in minuta ſecunda conuertamus, quo facilius eum cum π comparare queamus, eritque $\Phi = 197048'', 19$. Quare cum ſit

$\pi =$

$\pi = 648000''$, erit fractio noſtra reſoluenda $\frac{\pi}{\Phi} = \frac{64800000}{19704819}$, cuius numerator per denominatorem diuidatur, tum vero reſiduum dabit diuiſorem pro ſequente diuiſione, in qua praecedens diuiſor fiet diuidendus, hocque modo eaedem operationes inſtituantur, quibus vulgo maximus communis diuiſor quaeri ſolet, vbi imprimis quoti ex ſingulis diuiſionibus oriundi ſollicite notentur:

5685543	19704819	64800000	3
	17056629	59114457	3
389163	2648190	5685543	2
	2334978	5296380	6
75951	313212	389163	1
	303804	313212	4
687	9408	75951	8
	8931	75264	13
210	477	687	1
	420	477	9
39	57	210	3
	39	171	1
3	18	39	2
	18	36	6
	0	3	

§. 12. Iam ex his quotis ordine dispoſitis formentur more ſolito fractiones, dum continuo tam numeratores quam denominatores per indices ſupraſcriptos multiplicantur et praecedentes adduntur, prouti hic videre licet:

$3; 3; 2; 6; 1; 4; 8; 13; 1;$

$\frac{1}{0}, \frac{3}{1}, \frac{10}{3}, \frac{23}{7}, \frac{148}{45}, \frac{171}{52}, \frac{832}{253}, \frac{6827}{2076}, \frac{89583}{27241}$.

Hae enim fractiones continuo propius ad ipſam fractionem propoſitam $\frac{\pi}{\Phi}$ accedent; vbi imprimis notari oportet, quod eae fractiones, quae maioribus indicibus reſpondent, caeteris paribus, quam minime a veritate aberrent. Has igitur fractiones, quousque licuerit, percurramus. Prima quidem $\frac{1}{0}$ ſtatim dat $\lambda = 1$, vnde fit $3^1 = (1)^2 + 2$. Secunda fractio $\frac{3}{1}$ praebet $\lambda = 3$, vnde fit $3^3 = 5^2 + 2$, quae ergo, aeque ac prima, exacte quaeſito ſatisfacit, propterea quod indices 3 et 3 iam ſatis ſunt notabiles. Ex tertia vero fractione $\frac{10}{3}$ oritur $\lambda = 10$, eritque $3^{10} = 59049 = A^2 + 2B^2$, vbi foret $B = 0$ et $A = 243$, quam reſolutionem autem hic reiicimus. At vero mox patet eſſe $59049 = (241)^2 + 2(22)^2$, vbi igitur eſt $B = 22$, neque autem hic valor tam paruus eſt quam deſideratur; cuius rei ratio eſt, quod index ſupraſcriptus 2 non ſatis eſt magnus. Idem autem iſte valor pro B inuentus ex ipſis formulis noſtris elici poteſt. Cum enim inuenerimus $B = \frac{N^{\frac{\lambda}{2}} \text{ fin. } \lambda\Phi}{\sqrt{n}}$, ob $\lambda = 10$, $N = 3$, $n = 2$ et $\Phi = 54^0, 44', 8'', 19$, erit $\lambda\Phi = 547^0, 21', 22''$, hinc auferendo 360^0, erit $\lambda\Phi = 187^0, 21', 22' = \pi + 7^0, 21', 22''$; ex quo angulo calculus ſequenti modo per logarithmos inſtituatur:

$$\begin{array}{r} l \text{ fin. } \lambda\Phi = 9,1073310 \\ l\, 3^5 = 2,3856063 \\ \hline \text{Summa} = 1,4929373 \\ \text{Subtr. } l\sqrt{2} = 0,1505150 \\ \hline l\, B = 1,3424223, \text{ ergo } B = 22. \end{array}$$

Quin

Quin etiam ex noſtris formulis valor litterae $A = N^{\lambda/2} \text{ cof. } \lambda\Phi$ definiri poteſt hoc modo:

$$l \text{ cof. } \lambda\Phi = 9,9964108$$
$$l\, 3^5 = 2,3856063$$
$$l\, A = 2,3820171, \text{ ergo } A = 241.$$

§. 13. Simili modo euoluamus ſequentem fractionem $\frac{23}{7}$, quae, quia reſpondet indici ſatis magno 6, promittit notabilem ſolutionem. Hic igitur erit $\lambda = 23$, vnde colligitur $\lambda\Phi = 1258^0, 55', 8''$ et peripheriam auferendo, quoties fieri poteſt $\lambda\Phi = 178^0, 55', 8'' = \pi - 1^0, 4', 52''$, vnde litterae A et B ſequenti modo computentur:

$l \text{ cof. } \lambda\Phi = 9,9999276$	$l \text{ ſin. } \lambda\Phi = 8,2757219$
$l\, N^{23/2} = 5,4868944$	$l\, N^{23/2} = 5,4868944$
$l\, A = 5,4868220$	Summa $= 3,7626163$
ideoque $A = 306773$	$l \sqrt{2} = 0,1505150$
	$l\, B = 3,6121013$
	ideoque $B = 4093$.

Hinc ergo fit $3^{23} = (306773)^2 + 2(4093)^2$, vbi igitur valor litterae B valde prodit magnus, etiamſi index 6 ſit ſatis notabilis. Hinc igitur iam tuto concludi poteſt, ex ſequentibus fractionibus multo adhuc maiores valores pro B eſſe prodituros, quos adeo hac methodo, ob inſufficientiam tabularum logarithmicarum definire haud licebit.

Exemplum 2.

§. 14. Quoniam omnes poteſtates binarii, vti vidimus, in forma $xx + nyy$ continentur, quaeramus eas poteſtates, pro quibus valor ipſius y ſit quam minimus, atque adeo vnitati aequalis. Hic ergo erit $N = 2$; $n = 7$; tum vero $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$, vnde ergo quaeri debet angulus Φ, vt ſiat tang. $\Phi = \frac{b\sqrt{n}}{a} = \sqrt{7}$, ideoque l tang. $\Phi = 10,4225490$, conſequenter ipſe angulus $\Phi = 69^0, 17' 42'', 67$. Quare ſi ponamus $2^\lambda = A^2 + 7B^2$, erit

$$A = 2^{\frac{\lambda}{2}} \text{ cof. } \lambda\Phi \text{ et } B = \frac{2^{\frac{\lambda}{2}} \text{ ſin. } \lambda\Phi}{\sqrt{7}}.$$

§. 15. Vt iam valor ipſius B prodeat quam minimus, in eos caſus inquirere debemus, quibus ſinus anguli $\lambda\Phi$ minimus euadit. Totum ergo negotium redit ad euolutionem fractionis $\frac{\pi}{\Phi}$, cui fractio $\frac{\lambda}{i}$ proxime debet eſſe aequalis. At vero in minutis ſecundis habebimus $\Phi = 249462'', 67$, ita vt ob $\pi = 648000''$ euolui oporteat hanc fractionem: $\frac{\pi}{\Phi} = \frac{64800000}{24946267}$, vnde ſequentes quoti orientur: 2, 1, 1, 2, 16, 6, 1, 2, 7, 1, 6, 1, 9, 11, 2, ex quibus ſequentes fractiones continuo propius ad verum valorem accedentes formantur:

$$2; 1; 1; 2; 16; 6; 1; 2;$$
$$\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{13}{5}, \frac{213}{82}, \frac{1291}{497}, \frac{1504}{579}.$$

Ex harum fractionum primis ſtatim prodeunt caſus notiſſimi, veluti ex quarta fit $\lambda = 5$, vnde colligitur $\lambda\Phi = 2\pi - 1^0, 31', 26'', 65$, ex quo angulo litterae A et B hunc in modum deriuantur:

l cos. $\lambda\Phi = 9,9877885$	l sin. $\lambda\Phi = 9,3689443$
$l N^{\frac{5}{2}} = 0,7525750$	$l N^{\frac{5}{2}} = 0,7525750$
$l A = 0,7403635$	Summa $= 0,1215193$
ideoque $A = 5,5.$	$l \sqrt{7} = 0,4225490$
	$l B = 9,6989703$
	ideoque $B = 0,5.$

vnde sequitur fore $2^5 = (5\frac{1}{2})^2 + 7\,(\frac{1}{2})^2$, ideoque per 4 multiplicando erit $2^7 = (11)^2 + 7\,(1)^2$.

§. 16. Quinta autem fractio $\frac{13}{5}$ hic est memorabilis, quia habet indicem 10, ideoque valde paruum valorem pro B pollicetur. Sit igitur $\lambda = 13$, eritque $13\,\Phi = 900^0, 50', 14'', 71$, siue binis rectis, quoties fieri potest, subductis, erit $13\,\Phi = 0^0, 50', 14'', 71$, vnde litterae A et B sequenti modo definientur:

l cos. $\lambda\Phi = 9,9999536$	l sin. $\lambda\Phi = 8,1648107$
$l\, 2^{\frac{13}{2}} = 1,9566949$	$l\, 2^{\frac{13}{2}} = 1,9566949$
$l A = 1,9566485$	Summa $= 0,1215056$
$A = 90,5$	$l \sqrt{7} = 0,4225490$
	$l B = 9,6989566$
	ideoque $B = 0,49999 = 0,5$

vnde sequitur fore $2^{13} = (90\frac{1}{2})^2 + 7\,(\frac{1}{2})^2$, siue per 4 multiplicando erit $2^{15} = (181)^2 + 7\,(1)^2$; vbi valor ipsius B tam paruus prodiit, quoniam index respondens 16 est praemagnus.

§. 17. Hinc iam satis intelligitur, ex sequentibus fractionibus tales casus, quibus B fiat vel $\frac{1}{2}$ vel 1, resultare non posse, nisi indices suprascripti adhuc multo fuerint ma-

iores, quod cum non eueniat, satis tuto affirmare licet, in maioribus potestatibus binarii nullas amplius occurrere, quae sint formae $A^2 + 7$. Quod quo facilius perspiciatur, consideremus sequentem fractionem $\frac{213}{82}$, indici 6 subscriptam, vnde fit $\lambda = 213$. Hinc cum sit $13\,\Phi = 900^0, 50', 14'', 71$ et $200\,\Phi = 13859^0, 2' 14''$, erit $213\,\Phi = 14759^0, 52', 28'', 71$, vnde totam peripheriam, quadragies sumtam, subtrahendo remanet $213\,\Phi = 359^0, 52', 28'', 71$, cuius complementum ad totam peripheriam est $0^0, 7', 31'', 29$. Calculus ergo ita se habebit;

cos. $213\,\Phi = 9,9999990$	sin. $213\,\Phi = 7,3400396$
$l\, 2^{\frac{213}{2}} = 32,0596943$	$l\, 2^{\frac{213}{2}} = 32,0596943$
$l\, A = 42,0596933$	Summa $= 39,3997339$
	$l\sqrt{7} = 0,4225490$
	$l\, B = 38,9771849$

§. 18. Hinc igitur patet hoc casu numerum A ex triginta tribus figuris constare, quas ergo ex tabulis ne quidem reperire licet; at vero alter numerus B, etiamsi respective sit minimus, hic tamen adhuc vsque ad 29 figuras excurrit, quae ergo pariter per tabulas inueniri nequeunt; cuius rei ratio in eo manifesto est sita, quod potestas $2^{\frac{\lambda}{2}}$ tam enormiter magna euasit; ex quo perspicuum est, multo minus in altioribus potestatibus minores valores pro B exspectari posse. His igitur missis aliud problema huic affine subiungamus, quo ii casus quaeruntur, quibus littera A minimum sortitur valorem.

Pro-

Problema.

Si fuerit $N = aa + nbb$, *quoniam omnes eius poteſtates* N^λ *eandem formam* $A^2 + nB^2$ *accipiunt, inueſtigare eas poteſtates, pro quibus littera* A *minimum adipiſcatur valorem.*

Solutio.

§. 19. Hoc problema ſimili ratione, ac praecedens, reſolui poterit. Quaeratur ſcilicet angulus Φ, vt ſit tang. $\Phi = \frac{b\sqrt{n}}{a}$, vnde erit vt ante

$$A = N^{\frac{\lambda}{2}} \text{ cof. } \lambda\Phi \text{ et } B = \frac{N^{\frac{\lambda}{2}} \text{ ſin. } \lambda\Phi}{\sqrt{n}}.$$

Quare vt littera A minimum acquirat valorem, neceſſe eſt vt cof. $\lambda\Phi$ euadat minimus, id quod eueniet, ſi fiat proxime $\lambda\Phi = \frac{\pi}{2}$; vel $\frac{3\pi}{2}$ vel $\frac{5\pi}{2}$ etc. ideoque generaliter $\lambda\Phi = \frac{(2i+1)\pi}{2}$, vnde debet eſſe proxime $\lambda = \frac{2i+1}{2} \cdot \frac{\pi}{\Phi}$, ſiue $\frac{2\lambda}{2i+1} = \frac{\pi}{\Phi}$.

§. 20. Totum ergo negotium huc redit, vt omnes fractiones quaerantur ipſi $\frac{\pi}{\Phi}$ proxime aequales, quemadmodum iam fecimus pro ſuperiore problemate; at vero ex his fractionibus eae tantum hic adhiberi poterunt, quarum numeratores ſint numeri pares, denominatores vero impares; ac ſi talis fractio occurrat, quae ſit $\frac{2f}{2g+1}$, ſumi oportebit $\lambda = f$; tum enim, ob cof. $\lambda\Phi$ minimum, numerus A minimum valorem obtinebit, qui ergo erit vel 1 vel etiam vnitate maior, quando ſcilicet minores valores locum habere nequeunt; contra vero euidens eſt his caſibus alterum numerum B maximum eſſe adepturum valorem.

§. 21.

§. 21. Applicemus hoc ad binos caſus ſupra tractatos, ac primo quidem pro priore erat $N = 3$, $a = 1$, $b = 1$ et $n = 2$, vnde prodiit tang. $\Phi = \sqrt{2}$ et $\Phi = 54^0, 44', 8'', 19$; hinc autem fractiones ipſi $\frac{\pi}{\Phi}$ proxime aequales repertae ſunt:

$$3,\ 3,\ 2,\ 6,\ 1,\ 4,\ 8,\ 13,\ 1,$$
$$\frac{1}{0},\ \frac{3}{1},\ \frac{10}{3},\ \frac{23}{7},\ \frac{148}{45},\ \frac{171}{52},\ \frac{832}{253},\ \frac{6827}{2076},\ \frac{89583}{27241},$$

inter quas occurrit fractio numeratorem parem habens $\frac{10}{3}$, vnde fit $\lambda = 5$, ideoque poteſtas $3^5 = 243$, quae manifeſto eſt $(1)^2 + 2(11)^2$, ita vt hic ſit $A = 1$ et $B = 11$, quos valores etiam formulae ſupra datae praebent. Cum enim ſit $\lambda = 5$, erit $\lambda\Phi = 273^0, 40', 40'', 95$, ſiue $\lambda\Phi = 93^0, 40', 40'', 95$, ſiue eius complementum ad 180^0, $86^0, 19', 19'', 05$, vnde calculus ita ſe habet;

l coſ. $\lambda\Phi = 8,8071973$	ſin. $\lambda\Phi = 9,9991046$
$l\ 3^{\frac{5}{2}} = 1,1928032$	$l\ 3^{\frac{5}{2}} = 1,1928032$
$l\ A = 0,0000005$	Summa $= 1,1919078$
ideoque $A = 1$	$l\sqrt{2} = 0,1505150$
	$l\ B = 1,0413928$
	ideoque $B = 11$.

§. 22. Hactenus quidem tantum fractiones principales ipſi $\frac{\pi}{\Phi}$ proxime aequales exhibuimus, dantur vero etiam huiusmodi fractiones minus principales, quae oriuntur ex indicibus ſupraſcriptis, ſi vnitate vel minuantur vel augeantur. Cum enim indices ſint quoti ex diuiſione oriundi, facile intelligitur, vbi quotus fuerit $= 9$, ibi quoque ſumi potuiſſe ſiue $9 - 1$ ſiue $9 + 1$. Hoc obſeruato ſubſcribamus ſeriei illarum fractionum principalium etiam minus principales, ſequenti modo;

3;

$$3;\ 3;\ 2;\ 6;\ 1;$$
$$\frac{1}{0};\ \frac{3}{1};\ \frac{10}{3};\ \frac{23}{7};\ \frac{148}{45};$$
$$\frac{2}{1};\ \frac{7}{2};\ \frac{13}{4};\ \frac{85}{38};$$
$$\frac{4}{1};\ \frac{13}{4};\ \frac{33}{10};\ \frac{171}{52}.$$

Hic igitur occurrunt numeratores pares 2 et 4, vnde fit vel $\lambda = 1$, vel $\lambda = 2$; priore casu est $3^1 = (1)^2 + 2(1)^2$; altero vero $3^2 = (1)^2 + 2(2)^2$, sicque vtroque casu $A = 1$, quod quidem tantum euenit in fractionibus initialibus.

§. 23. Simili modo pro altero casu, quo erat $N = 2$; $n = 7$; $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$, prodiit angulus $\Phi = 69^0, 17', 42'', 67$, et fractio $\frac{\pi}{\Phi}$ dederat quotos 2, 1, 1, 2, 16, 6, 1, vnde sequentes formantur fractiones tam principales, quam minus principales:

$$\frac{1}{0};\ \frac{2}{1};\ \frac{3}{1};\ \frac{5}{2};\ \frac{13}{5};$$
$$\frac{1}{1};\ \ \ \frac{8}{3};$$
$$\frac{3}{1};\ \frac{5}{2};\ \frac{8}{3};\ \frac{18}{7};$$

vnde numeratores pares praebent vel $\lambda = 1$, vel $\lambda = 4$, vel $\lambda = 9$. Ex primo valore $\lambda = 1$ fit $2^1 = (\frac{1}{2})^2 + 7(\frac{1}{2})^2$, siue $2^3 = (1)^2 + 7(1)^2$. Ex secundo valore fit $2^4 = (\frac{1}{2})^2 + 7(\frac{3}{2})^2$, siue $2^6 = (1)^2 + 7(3)^2$. Tertio habemus $\lambda = 9$, pro quo casu calculum nostrum instituamus, et ob $\lambda\Phi = 623^0, 39', 24'', 03 = 3\pi + 83^0, 39', 24'', 03$, erit

l cos. $\lambda\Phi = 9,0433074$	l sin. $\lambda\Phi = 9,9973329$
$l\, N^{\frac{9}{2}} = 1,3546350$	$l\, N^{\frac{9}{2}} = 1,3546350$
$l\, A = 0,3979424$	Summa $= 1,3519679$
ideoque $A = 2,5$	$l \sqrt{7} = 0,4225490$
	$l\, B = 0,9294189$
	ideoque $B = 8,5$.

ficque erit $2^9 = (\frac{5}{2})^2 + 7(\frac{17}{2})^2$, ſiue per 4 multiplicando erit $2^{11} = (5)^2 + 7(17)^2$. Atque hinc tuto concludere licet, pro maioribus exponentibus λ valores litterae A continuo multo maiores eſſe prodituros. Caeterum quia hic calculi genus prorſus ſingulare occurrit, ſperamus hanc ſpeculationem Geometris non eſſe displicituram.

DE

DE RADICIBVS AEQVATIONIS INFINITAE

$$0 = 1 - \frac{xx}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{x^6}{n\ldots(n+5)} + \text{etc.}$$

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhibit die 16 Ianuar. 1777.

§. 1.

In hac aequatione generali ſingulare phaenomenon ſe contemplandum offert, quod caſibus, quibus eſt vel $n = 1$, vel $n = 2$, vel $n = 3$, ea habeat omnes ſuas radices infinitas reales, quas adeo aſſignare licet; ſtatim autem ac numerus n ternarium ſuperat, omnes eius radices fiant imaginariae. Si enim ponamus $n = 1$, vt prodeat iſta aequatio:

$$0 = 1 - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \text{etc.}$$

quoniam huius ſeriei ſumma eſt cof. x, omnes eius radices ſequenti modo progredientur:

$$\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \pm\frac{9\pi}{2}, \text{ etc.}$$

quae ergo progreſſionem arithmeticam conſtituunt, cuius differentia $= \pi$, ita vt, ſi quaepiam radix fuerit $x = r$, etiam radix futura ſit $x = r \pm \pi$.

§. 2. Conſideremus nunc etiam caſum quo $n = 2$, et aequatio propoſita:

$$0 = 1 - \frac{xx}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3, 4 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \ldots 7} + \frac{x^8}{2 \ldots 9} - \text{etc.}$$

quae ſeries ducta in x exhibet valorem ſin. x, hincque vtique euaneſcet omnibus caſibus, quibus ſin. $x = 0$, excepto ſolo caſu $x = 0$, (nam quia ſeriei ſumma eſt $\frac{\text{ſin. } x}{x}$, caſu $x = 0$ eius ſumma erit $= 1$), vnde omnes radices huius aequationis erunt:

$$\pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \pm 5\pi, \text{ etc.}$$

quae pariter progreſſionem arithmeticam conſtituunt, cuius differentia $= \pi$, ita vt, ſi quaepiam radix fuerit $x = r$, etiam radix futura ſit $x = r \pm \pi$, ſolo caſu excepto quo fieret $x = 0$.

§. 3. Statuamus nunc etiam $n = 3$, vt prodeat iſta aequatio:

$$0 = 1 - \frac{xx}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{x^6}{3 \ldots 8} + \text{etc.}$$

et quoniam eſt

$$\text{cof. } x = 1 - \frac{xx}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \ldots 6} + \text{etc.}$$

euidens eſt ſeriei propoſitae ſummam eſſe $\frac{2(1 - \text{cof. } x)}{xx}$, quae ergo formula, quoties euaneſcit, praebebit radicem iſtius aequationis. Hoc autem euenit, quoties litterae x ſequentes valores tribuuntur:

$$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \pm 10\pi, \text{ etc.}$$

ideoque in genere $\pm 2i\pi$, denotante i numerum integrum quemcunque, ſi modo excipiatur caſus $i = 0$, ſiquidem poſito $x = 0$ fit $\frac{2(1 - \text{cof. } x)}{xx} = 1$. Hoc igitur caſu radices ipſius x etiam progreſſionem arithmeticam conſtituunt, ſed cuius differentia non amplius eſt π, ſed 2π.

§. 4.

§. 4. Hinc igitur concludere licet, numerum omnium radicum huius poſtremae aequationis duplo eſſe minorem quam in binis caſibus antecedentibus, ex quo ſtatui poſſe videtur in hoc poſtremo caſu binas radices in vnam coaleſcere. Nouimus autem ex Analyſi perpetuo binas radices aequationum inter ſe euadere aequales in ipſis limitibus inter radices reales et imaginarias; vnde iam ratio intelligi poteſt, cur, ſi litterae n maiores valores quam 3 tribuantur, omnes radices ſubito fiant imaginariae.

§. 5. Quod quo clarius appareat, ſumamus $n = 4$, vt iam aequatio habeatur

$$0 = 1 - \frac{xx}{4.5} + \frac{x^4}{4.5.6.7} - \frac{x^6}{4\ldots9} + \text{etc.}$$

et quoniam eſt

$$\text{ſin. } x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \text{etc.}$$

manifeſtum eſt, iſtius ſeriei propoſitae ſummam fore $\frac{6(x-\text{ſin. }x)}{x^3}$. Conſtat autem ſemper eſſe $x > \text{ſin. } x$, ita vt iſta expreſſio plane nunquam fieri poſſit $= 0$, ne caſu quidem excepto $x = 0$. Interim tamen quia iſta expreſſio reuera euaneſcit, ſumto $x = \infty$, hinc vna ſaltem radix realis ſtatui poſſe videtur, ſiquidem quantitates infinitas admittere velimus.

§. 6. Hinc iam pro certo affirmari poſſe videtur, aequationem generalem propoſitam ſemper habituram eſſe infinitas radices reales tam poſitiuas quam negatiuas, quando numerus n ternarium non ſuperauerit; ſimul ac vero maior ternario accipiatur, tum ſubito omnes plane radices abituras eſſe in imaginarias. Interim tamen nulla methodus adhuc patet, cuius ope omnes illas radices reales aſſignare liceret, praeter caſus iam memoratos, quibus eſt vel $n = 1$,

vel $n = 2$, vel $n = 3$. Quod ſi enim pro n accipiatur fractio quaecunque minor quam 3, formula ſummam ſeriei propoſitae exprimens tantopere ſit transcendens et intricata, vt nullo modo caſus, quibus euaneſcit, elici queant.

§. 7. Quae difficultates quo clarius perſpiciantur, inueſtigemus generatim ſummam ſeriei propoſitae, quam ſtatuamus $= \frac{s}{x^n - 1}$, vt ſiat

$$s = x^n - 1 - \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{x^{n+3}}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \text{etc.}$$

cuius valorem quo facilius indagare queamus, ſtatuamus porro $s = x^n - 1 - z$, vt ſit

$$z = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{x^{n+3}}{n \ldots (n+3)} + \frac{x^{n+5}}{n \ldots (n+5)} - \text{etc.}$$

quae aequatio bis differentiata, ſumto elemento ∂x conſtante, praebet

$$\frac{\partial \partial z}{\partial x^2} = x^n - 1 - \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{x^{n+3}}{n \ldots (n+3)} - \text{etc.} = s,$$

quamobrem habebimus $\frac{\partial \partial z}{\partial x^2} + z = x^n - 1$, ſicque totum negotium huc redit, vt iſta aequatio differentialis ſecundi gradus reſoluatur.

§. 8. Hanc iam aequationem attentius conſideranti facile patebit eam integrabilem duplici modo reddi, ſi ſcilicet vel per $\partial x \cos. x$ vel per $\partial x \sin. x$ multiplicetur. Cum enim per reductiones conſuetas ſit

$$\frac{\int \partial \partial z \cos. x}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos. x + \int \partial z \sin. x,$$

tum vero $\int \partial z \sin. x = z \sin. x - \int z \, \partial x \cos. x$, manifeſtum eſt fore

fore

$$\frac{\int \partial \partial z \cos. x}{\partial x} - \int z \partial x \cos. x = \frac{\partial z}{\partial x} \cos. x + z \sin. x.$$

Ex quo perſpicuum eſt, ſi noſtra aequatio in $\partial x \cos. x$ ducatur et integretur, prodire hanc aequationem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cos. x + z \sin. x = \int x^{n-1} \partial x \cos. x,$$

huius enim differentiatio manifeſto ad aequationem propoſitam deducit.

§. 9. Eodem modo cum ſit

$$\frac{\int \partial \partial z \sin. x}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \sin. x - \int \partial z \cos. x,$$

tum vero $\int \partial z \cos. x = z \cos. x + \int z \partial x \sin. x$, hinc colligitur

$$\frac{\int \partial \partial z}{\partial x} \sin. x + \int z \partial x \sin. x = \frac{\partial z}{\partial x} \sin. x - z \cos. x;$$

ita vt aequatio noſtra in $\partial x \sin. x$ ducta et integrata fiat

$$\frac{\partial z}{\partial x} \sin. x - z \cos. x = \int x^{n-1} \partial x \sin. x,$$

huius enim differentiatio itidem ad aequationem propoſitam perducit.

§. 10. Quanquam autem hae aequationes tantum ſint differentiales primi gradus, tamen, quoniam duas ſumus aſſecuti, ex earum combinatione, ſine vlteriori integratione, valorem ipſius z elicere poterimus. Si enim a priore aequatione per $\sin. x$ multiplicata, ſubtrahamus poſteriorem in $\cos. x$ ductam, ſtatim colligitur fore

$$z = \sin. x \int x^{n-1} \partial x \cos. x - \cos. x \int x^{n-1} \partial x \sin. x,$$

ſicque z per binas formulas integrales determinatur, in quibus binae conſtantes arbitrariae per integrationes ingreſſae contineri ſunt cenſendae; vnde ſi ambo integralia ita accipiamus, vt euaneſcant poſito $x = 0$, integrale completum ita

ex-

exhibebitur:

$$z = \text{fin.}\, x \int x^{n-1} \partial x \,\text{cof.}\, x + A \,\text{fin.}\, x - \text{cof.}\, x \int x^{n-1} \partial x \,\text{fin.}\, x - B \,\text{cof.}\, x.$$

Cum iam fit

$$z = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{x^{n+3}}{n \ldots (n+3)} + \frac{x^{n+5}}{n \ldots (n+5)} - \text{etc.}$$

euidens eſt ſumto $x = 0$ fieri $z = 0$, ſi modo fuerit $n+1 > 0$, id quod ſemper ſupponere licet, quandoquidem etiam ipſe numerus n nihilo maior aſſumi debet. Ponamus igitur, ad conſtantes determinandas, $x = 0$, et quia etiam fit $z = 0$, prodibit $0 = -B$, ideoque $B = 0$. Pro altera autem conſtante A definienda contemplemur ſeriem valorem ipſius $\frac{\partial z}{\partial x}$ exprimentem, quae eſt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+2}}{n \ldots (n+2)} + \frac{x^{n+4}}{n \ldots (n+4)} - \text{etc.}$$

quae pariter euaneſcit poſito $x = 0$, ſi modo fuerit $n > 0$. At ſi aequatio integralis completa differentietur, ob $B = 0$ reperietur:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \,\text{cof.}\, x + \text{cof.}\, x \int x^{n-1} \partial x \,\text{cof.}\, x + \text{fin.}\, x \int x^{n-1} \partial x \,\text{fin.}\, x.$$

Quare cum ambae formulae integrales euaneſcant poſito $x = 0$, ob $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, hinc fiet $0 = A$, ideoque etiam conſtans $A = 0$. Sicque formula integralis ad noſtrum caſum accommodata erit

$$z = \text{fin.}\, x \int x^{n-1} \partial x \,\text{cof.}\, x - \text{cof.}\, x \int x^{n-1} \partial x \,\text{fin.}\, x,$$

ſi modo ambo integralia ita capiantur, vt euaneſcant poſito $x = 0$. Tum vero pro ipſa ſeriei propoſitae ſumma erit $s = x^{n-1} - z$, quae per x^{n-1} diuiſa dabit ipſam ſummam ſeriei propoſitae.

§. 11.

§. 11. Cum igitur quaeſtio noſtra in eo verſetur, vt pro quouis numero n valores ipſius x aſſignentur, quibus noſtra ſeries

$$1 - \frac{xx}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n\ldots(n+3)} - \frac{x^6}{n\ldots(n+5)} + \text{etc.}$$

euaneſcat, id quod euenit, quoties fuerit $s = 0$, reſolutio huius aequationis:

$$x^n - 1 = \text{ſin. } x \int x^{n-1} \partial x \text{ coſ. } x - \text{coſ. } x \int x^{n-1} \partial x \text{ ſin. } x$$

omnes dabit radices quaeſitas x.

§. 12. Euidens autem eſt, reſolutionem huius aequationis vires Analyſeos aeque ſuperare atque ipſam quaeſtionem propoſitam, exceptis iis ſolis caſibus, quos iam ſupra euoluimus, qui ſunt $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$; vnde operae pretium erit ſolutionem modo inuentam ad hos caſus applicare. Sit igitur primo $n = 1$, ideoque $x^{n-1} = 1$, et formula integralis prior dabit $\int \partial x \text{ coſ. } x = \text{ſin. } x$, poſterior vero $\int \partial x \text{ ſin. } x = 1 - \text{coſ. } x$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra erit

$$1 = \text{ſin. } x^2 - \text{coſ. } x + \text{coſ. } x^2 = 1 - \text{coſ. } x,$$

ideoque coſ. $x = 0$, vti per ſe eſt manifeſtum.

§. 13. Pro caſu ſecundo ſit $n = 2$, ideoque $x^{n-1} = x$, et formula integralis prior dabit

$$\int x \partial x \text{ coſ. } x = x \text{ ſin. } x - \int \partial x \text{ coſ. } x = x \text{ ſin. } x + \text{coſ. } x - 1,$$

poſterior vero

$$\int x \partial x \text{ ſin. } x = -x \text{ coſ. } x + \int \partial x \text{ coſ. } x = -x \text{ coſ. } x + \text{ſin. } x,$$

quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra fit

$$x = x \text{ ſin. } x^2 + x \text{ coſ. } x^2 - \text{ſin. } x = x - \text{ſin. } x,$$

ideoque ſin. $x = 0$, prorſus vti ſupra habuimus.

§. 14. Pro casu tertio faciamus $n=3$, vt sit $x^{n-1}=xx$, et formula integralis prior dabit

$$\int x\,x\,\partial x \cos. x = x\,x \sin. x + 2\,x \cos. x - 2 \sin. x,$$

posterior vero praebet

$$\int x\,x\,\partial x \sin. x = -x\,x \cos. x + 2\,x \sin. x + 2 \cos. x - 2,$$

quibus inuentis aequatio nostra pro hoc casu erit

$$x\,x = x\,x \sin. x^2 + 2\,x \sin. x \cos. x - 2 \sin. x^2 + 2 \cos. x + x\,x \cos. x^2 - 2\,x \sin. x \cos. x - 2 \cos. x^2,$$

siue $xx = xx - 2 + 2\cos. x$, sicque esse oportet $1 - \cos. x = 0$, prorsus vti supra iam notauimus.

§. 15. Talis reductio autem succedit, quoties n fuerit numerus integer positiuus, ad quod ostendendum sit adhuc $n=4$ et $x^{n-1}=x^3$, ac prior formula integralis dabit

$$\int x^3 \partial x \cos. x = x^3 \sin. x - 3\int x\,x\,\partial x \sin. x, \text{ siue}$$

$$\int x^3 \partial x \cos. x = x^3 \sin. x + 3\,x\,x \cos. x - 6\,x \sin. x - 6 \cos. x + 6,$$

posterior vero

$$\int x^3 \partial x \sin. x = -x^3 \cos. x + 3\int x\,x\,\partial x \cos. x, \text{ siue}$$

$$\int x^3 \partial x \sin. x = -x^3 \cos. x + 3\,x\,x \sin. x + 6\,x \cos. x - 6 \sin. x,$$

ex quibus conficitur

$$x^3 = x^3 \sin. x^2 + 3\,x\,x \sin. x \cos. x - 6\,x \sin. x^2 - 6\,x \sin. x \cos. x + 6 \sin. x + x^3 \cos. x^2 - 3\,x\,x \sin. x \cos. x - 6\,x \cos. x^2 + 6\,x \sin. x \cos. x,$$

siue $x^3 = x^3 - 6\,x + 6 \sin. x$, ita vt esse debeat $x - \sin. x = 0$ prorsus vt supra. Huiusmodi autem expressiones pro casibus quibus n est numerus integer, facillime ex notissimis seriebus ipsius $\sin. x$ et $\cos. x$ deriuare licet.

§. 16. Quoniam igitur satis certi sumus, casibus quibus $n < 3$ aequationem propositam infinitas habere radices rea-

reales, maxime optandum esset, vt etiam istae radices, quando n non est numerus integer, assignari possent; verum in hoc negotio vires Analyseos deficiunt, atque nos contentos esse oportet, si modo has radices vero proxime exhibere valeamus. Consideremus igitur casum $n = \frac{1}{2}$, et aequatio nostra hanc induet formam:

$$0 = 1 - \frac{4xx}{1.3} + \frac{16x^4}{1.3.5.7} - \frac{64x^6}{1\ldots11} + \text{etc.}$$

siue posito breuitatis gratia $4xx = z$, aequatio resoluenda erit

$$0 = 1 - \frac{z}{1\,3} + \frac{zz}{1\ldots7} - \frac{z3}{1\ldots11} + \frac{z^4}{1\ldots15} - \text{etc.}$$

vbi ii ipsius z valores requiruntur, qui summam huius seriei nihilo aequalem reddant.

§. 17. Hic primum notasse iuuabit, quoties fuerit $z < 3$, summam seriei semper esse positiuam, et quidem maiorem quam $\frac{1}{2}$, minorem vero quam $\frac{3}{4}$. Nam si series habeatur $1 - a + b - c + d - e +$ etc. cuius omnes termini 1, a, b, c, d, etc. continuo decrescant, notum est, si ponatur $1 - a = \alpha$; $1 - 2a + b = \beta$; $1 - 3a + 3b - c = \gamma$; etc. tum summam fore $= \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} + \frac{\gamma}{16} +$ etc. Vnde si tantum duo primi termini sumantur, summa maior erit quam $\frac{1}{2} + \frac{1-a}{4} = \frac{3-a}{4}$. Ex quo perspicuum est, nostram seriem nihilo aequalem fieri non posse, nisi fit $z > 3$. Hanc ob rem aequatio nostra ita repraesentetur:

$$0 = 1 - \frac{z}{3}\left(1 - \frac{z}{5.7} + \frac{zz}{5.7.9} - \frac{z3}{5\ldots11} + \text{etc.}\right)$$

§. 18. Quod si iam fuerit $z < 5.7$, in hac postrema serie omnes termini continuo decrescunt, ideoque eius summa proxime erit $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}.\frac{z}{5.7}$. Ponamus igitur, vt fractiones euitentur, $\frac{z}{5.7} = v$, et habebimus hanc aequationem:

$$1 = \frac{z}{3} \cdot \frac{3-v}{4} = \frac{35\,v\,(3-v)}{12},$$

hinc ergo erit $\frac{12}{35} = 3\,v - v\,v$, siue $-\frac{12}{35} = v\,v - 3\,v$. Addamus vtrinque $\frac{9}{4}$ et habebimus $\frac{9}{4} - \frac{12}{85} = (v - \frac{3}{2})^2$, vnde extracta radice in fractionibus decimalibus erit $v - \frac{3}{2} = \pm 1,380$, cuius minor valor praebet $v = 0,120$. Hinc ergo erit $z = 4,20 = 4xx$, vnde porro erit $2x = 2,05$, ideoque $x = 1,025$. Hunc autem valorem a vero multum aberrare mox videbimus, si rem accuratius definire velimus.

§. 19. In hunc finem autem commode adhiberi poterit methodus Celeb. *Bernoullii*, radicem minimam huiusmodi aequationum per seriem recurrentem definiendi. Si enim in genere habeatur huiusmodi aequatio:

$$1 = \alpha z - \beta z z + \gamma z^3 - \text{etc.}$$

indeque formetur series recurrens ex scala relationis $\alpha, -\beta, +\gamma, -\delta$, etc. quae sit $1, A, B, C, D, E$, etc. ita vt sit

$$A = \alpha;$$
$$B = \alpha A - \beta;$$
$$C = \alpha B - \beta A + \gamma;$$
$$D = \alpha C - \beta B + \gamma A - \delta;$$
$$\text{etc.}$$

tum sequentes fractiones $\frac{1}{A}, \frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \frac{C}{D}$, etc. continuo propius ad verum valorem ipsius z accedunt, vnde patet hac methodo nostram aequationem in genere resolui posse.

§. 20. Cum igitur pro nostro casu, quo $n = \frac{1}{2}$ et $4xx = z$, sit

$$\alpha = \frac{1}{3},\ \beta = \frac{1}{3.5.7},\ \gamma = \frac{1}{3.5.7.9.11},\ \delta = \frac{1}{3 \ldots 15},\ \text{etc.}$$

in fractionibus decimalibus erit

$$A = 0,33333,$$

$B =$

$B = 0,\overline{11111} - 0,00952 = 0,10159,$

$C = 0,03386 - 0,00317 + 0,00010 = 0,\overline{03079},$

vlterius progredi foret fuperfluum. Hinc fractiones continuo propius ad z accedentes erunt:

I. $z = 3,000$, II. $z = 3,281$, III. $z = 3,291$.

§. 21. Sin autem vlterius progredi velimus, reperiemus

$D = 0,01029 - 0,00097 = 0,00932,$

hinc ergo quartus valor pro z erit $\frac{C}{D} = 3,304$; vnde fatis tuto concludere poffumus, verum valorem ipfius z effe tantillo maiorem, quamobrem fumamus $z = 3,31$, et cum fit $z = 4xx$, extracta radice erit $2x = 1,819$, ideoque $x = 0,909$.

§. 22. Satis audacter igitur affirmare poffumus, cafu quo $n = \frac{1}{2}$ minimam noftrae aequationis radicem effe $x = 0,909$, quae ergo notabiliter minor eft quam pro cafu $n = 1$, vbi erat minima radix $x = \frac{\pi}{2} = 1,571$; attamen maior eft quam huius femiffis. Videamus igitur, quamnam rationem hi duo numeri $0,909$ et $1,571$ inter fe proxime teneant. Diuidamus ergo maiorem per minorem, et continuo per refiduum praecedentem diuiforem, et quoti refultantes erunt ordine $1, 1, 2, 1, 2, 8$, vnde fractiones continuo propius ad verum accedentes funt $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{11}{19}$. Hinc colligimus numerum inuentum $0,909$ fe habere ad $\frac{\pi}{2}$ vti $11 : 19$, fiue fatis prope vt 4 ad 7, quae ratio cum fatis exacte accedat ad rationem $1 : \sqrt{3}$, hinc fuspicari merito licet, verum valorem ipfius x effe $x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

§. 23. Quo autem certiores reddamur circa hanc fuspicionem, euoluamus fimili modo alium cafum, quo $n = \frac{1}{4}$, examinaturi, num minimus valor ipfius x etiam ad tam fim-

 plicem

plicem formam reduci queat. Tum autem, posito breuitatis gratia $16xx = z$, aequatio resoluenda erit

$$1 - \frac{z}{1.5} + \frac{zz}{1.5.9.13} - \frac{z^4}{1.\ldots.21} + \text{etc.}$$

cuius radix minima vt methodo Bernoulliana inuestigetur, erit $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{1}{5.9.13}$, $\gamma = \frac{1}{5.9.13.17.21}$, vnde series recurrens in fractionibus decimalibus erit

$A = 0,2000000,$

$B = 0,0400000 - 0,0017094 = 0,0382906,$

$C = 0,0076581 - 0,0003419 + 0,0000048 = 0,0073210,$

$D = 0,0014642 - 0,0000655 + 0,0000010 = 0,0013997.$

Hinc ergo fractiones continuo propius ad fractionem z appropinquantes erunt

I. $z = 5,0000$; II. $z = 5,2232$; III. $z = 5,2302$;
IV. $z = 4,2304$.

Vnde patet satis tuto concludi posse $z = 5,2305 = 16xx$, hinc extracta radice fit $4x = 2,2870$, ideoque $x = 0,5717$.

§. 25. Vt iam exploremus, vtrum iste valor pro x inuentus simplicem quandam teneat rationem ad π, id commodius in quadratis dispicietur, quaerendo valorem $\frac{\pi\pi}{xx}$, cuius logarithmus est $= 1,4798764$, cui respondet numerus $30,191$; vnde suspicari licet verum valorem fortasse esse $= 30$, ita vt sit $xx = \frac{\pi\pi}{30}$, ideoque $x = \frac{\pi}{\sqrt{30}}$. At vero numerus 30 satis est notatu dignus et suspicionem nostram ideo augere videtur, quod in omnibus huiusmodi casibus radices x satis commode per peripheriam circuli π repraesentare liceat. Operae pretium igitur erit adhuc alios casus huius generis examinasse.

§. 26.

§. 26. Sumamus igitur $n = \frac{1}{3}$, et posito $9xx = z$, aequatio resoluenda erit

$$0 = 1 - \frac{z}{1.4} + \frac{zz}{1.4.7.10} - \frac{z3}{1.\ldots.16} + \text{etc.}$$

vnde fit

$$\alpha = \frac{1}{4},\ \beta = \frac{1}{4.7.10},\ \gamma = \frac{\beta}{13.16},\ \delta = \frac{\gamma}{19.22},\ \text{etc.}$$

Hinc termini seriei recurrentis erunt

$A = 0,2500000,$

$B = 0,0625000 - 0,0035714 = 0,0589286,$

$C = 0,0147321 - 0,0008928 + 0,0000172 = 0,0138565$

$D = 0,0034641 - 0,0002105 + 0,0000043 = 0,0032579.$

Hinc igitur pro z oriuntur sequentes valores:

I. $z = 4,0000;$

II. $z = 4,2424;$

III. $z = 4,2528;$

IV. $z = 4,2532;$

vnde tuto statuere licet $z = 4,2534.$

§. 27. Cum igitur sit $z = 9xx$, erit $3x = 2,0624$, ideoque $x = 0,6875$. At pro ratione huius numeri ad peripheriam circuli π detegenda consideretur fractio $\frac{\pi\pi}{xx}$, cuius logarithmus est $= 1,3198060$, ideoque $\frac{\pi\pi}{xx} = 20,883$ qui numerus ita est comparatus, vt omnem spem euertat, quempiam ordinem in his valoribus detegendi, qui ergo ad quantitates magis transcendentes erunt referendi.

§. 28. Ex his exemplis patet, quo minor fractio pro n accipiatur, eo promptius seriem recurrentem dare verum valorem ipsius z, ita vt sufficiat statuisse $z = \frac{A}{B}$, si modo

modo fuerit $n < \frac{1}{3}$. Statuamus igitur in genere $n = \frac{1}{\nu}$, et posito $\nu\nu xx = z$ aequatio nostra erit

$$1 - \frac{x}{1+\nu} + \frac{zz}{(1+\nu)(1+2\nu)(1+3\nu)} - \frac{z3}{(1+\nu)\ldots(1+5\nu)},$$

vnde fit $\alpha = \frac{1}{1+\nu}$, $\beta = \frac{\alpha}{(1+2\nu)(1+3\nu)}$, hincque

$$A = \alpha = \frac{1}{1+\nu} \text{ et}$$
$$B = \alpha A - \frac{\alpha}{(1+2\nu)(1+3\nu)}.$$

Quia igitur $\alpha = A$, erit $B = \alpha A - \frac{A}{(1+2\nu)(1+3\nu)}$, vnde statim elicitur

$$z = \frac{A}{B} = \frac{(1+\nu)(1+2\nu)(1+3\nu)}{(1+2\nu)(1+3\nu)-(1+\nu)}, \text{ siue}$$
$$z = \frac{(1+\nu)(1+2\nu)(1+3\nu)}{4\nu+6\nu\nu}.$$

§. 29. Cum igitur sit $z = \nu\nu xx$, erit

$$xx = \frac{(1+\nu)(1+2\nu)(1+3\nu)}{2\nu^3(2+3\nu)}$$

ex quo valore manifestum est fieri non posse vt fractio $\frac{\pi\pi}{xx}$ praebeat numerum integrum, quemadmodum sumus suspicati, sed potius valores ipsius x ad altiora genera quantitatum transcendentium esse referendos; quemadmodum etiam valores ipsius seriei, casibus quibus n est numerus fractus, quantitates transcendentes altioris ordinis inuoluunt.

§. 30. Quando autem numerus n non est fractio tam parua, vti hic assumsimus, atque adeo si n superet vnitatem, seriem recurrentem ad multo plures terminos continuari necesse erit. Quod quo clarius perspiciatur, euoluamus casum quo $n = 3$, qui est extremus, qui adhuc radices reales implicat, quarum minimam nouimus esse $x = 2\pi$. Cum igitur aequatio nostra, posito $xx = z$, sit

$$0 =$$

$$0 = 1 - \frac{z}{3.4} + \frac{zz}{3.4.5.6} - \frac{z3}{3.\ldots.8} + \text{etc.}$$

ideoque habebimus

$$\alpha = \frac{1}{3.4},\ \beta = \frac{\alpha}{5.6},\ \gamma = \frac{\beta}{7.8},\ \delta = \frac{\gamma}{9.10},\ \text{etc.}$$

vnde in fractionibus decimalibus termini serici recurrentis post primum, qui est $= 1$, erunt

$$A = 0,0833333,$$
$$B = 0,0069444 - 0,0027777 = 0,0041667,$$
$$C = 0,0003472 - 0,0002315 + 0,0000496 = 0,0001653$$
$$D = 0,0000138 - 0,0000116 + 0,0000041 - 0,0000005 = 0,0000058$$
$$E = 0,0000005 - 0,0000004 + 0,0000002 - 0,0000000 = 0,0000003.$$

§. 31. His terminis inuentis fractiones pro numero z erunt sequentes:

I. $z = \frac{1}{A} = 12,000$
II. $z = \frac{A}{B} = 20,000$
III. $z = \frac{B}{C} = 25,206$
IV. $z = \frac{C}{D} = 28,400,$
V. $z = \frac{D}{E} = 19,333,$
maxime incerta.

Quoniam autem constat reuera esse $z = x\,x = 4\,\pi\,\pi$, verus valor erit $z = 39,478$. Valores igitur inuenti nimis lente ad veritatem accedunt, ita vt hoc modo, etiamsi calculus ad plures terminos continuetur, nunquam satis prope verum valorem inuenire licuisset.

§. 32. Quoniam autem casus $n = 3$ est extremus eorum qui radicem realem admittunt, necesse est vt pro omnibus casibus, quibus $n > 3$, valores ex serie recurrente formati non solum non conuergant, sed adeo diuergant. In-

terim tamen, quoniam caſibus, quibus n erat numerus integer, omnes radices tam concinne per quadraturam circuli exhibere licuit, ſuſpicari poterimus, ſi modo n fuerit numerus integer, etiam radices imaginarias per circulum fortaſſe exhiberi poſſe, id quod vnico caſu examinaſſe non erit alienum, propterea quod nulla via patet factores trinomiales inueſtigandi.

§. 33. Euoluamus igitur caſum quo $n = 4$ et aequatio euoluenda haec:

$$0 = 1 - \frac{xx}{4.5} + \frac{x^4}{4.5.6.7} - \frac{x^6}{4.\ldots.9} + \text{etc.}$$

quam ad hanc ſimpliciorem formam reuocari ſupra vidimus: $x = \text{ſin. } x$, cui aequationi cum manifeſto nulla radix realis ſatisfaciat, omnes autem quantitates imaginariae in forma $a + b\sqrt{-1}$ comprehendi queant, ſtatuamus $x = a + b\sqrt{-1}$, et quaeſtio huc redit, quomodo etiam ſin. x per talem formam exprimi poſſit. Ad hoc praeſtandum confugiamus ad formulas exponentiales, quibus eſt

$$\text{ſin. } x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Cum igitur ſit

$$e^{x\sqrt{-1}} = e^{a\sqrt{-1}} \cdot e^{-b} \text{ et}$$
$$e^{-x\sqrt{-1}} = e^{-a\sqrt{-1}} \cdot e^{+b}.$$

viciſſim erit

$$e^{a\sqrt{-1}} = \text{coſ. } a + \sqrt{-1}\ \text{ſin. } a \text{ et}$$
$$e^{-a\sqrt{-1}} = \text{coſ. } a - \sqrt{-1}\ \text{ſin. } a,$$

quibus valoribus ſubſtitutis colligimus fore

$$\text{ſin. } x = \frac{\text{coſ. } a\,(e^{-b} - e^{+b}) + \sqrt{-1}\ \text{ſin. } a\,(e^{-b} + e^{+b})}{2\sqrt{-1}}.$$

§. 34. Cum igitur per hypotheſin eſſe debeat $\text{ſin.}\, x = x = a + b\sqrt{-1}$, erit $2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\, x = 2a\sqrt{-1} - 2b$, quae ergo expreſſio ſuperiori debet eſſe aequalis, id quod fieri nequit, niſi partes reales et imaginariae ſeorſim inter ſe aequentur, vnde ſequentes duae aequationes emergunt:

$$2a\,\text{ſin.}\, a\,(e^{-b} + e^{+b}) \text{ et } 2b = \text{coſ.}\, a\,(e^{+b} - e^{-b}),$$

vnde concludimus

$$\text{coſ.}\, a = \frac{2b}{e^{b} - e^{-b}} \text{ et } \text{ſin.}\, a = \frac{2a}{e^{b} + e^{-b}}.$$

Hinc autem primo eliminare poterimus $\text{ſin.}\, a$ et $\text{coſ.}\, a$: additis enim quadratis prodit

$$1 = \frac{4bb}{(e^{b} - e^{-b})^2} + \frac{4aa}{(e^{b} + e^{-b})^2}.$$

Deinde etiam quantitates exponentiales eliminari poſſunt. Cum enim ſit

$$e^{b} + e^{-b} = \frac{2a}{\text{ſin.}\, a} \text{ et } e^{b} - e^{-b} = \frac{2b}{\text{coſ.}\, a},$$

ſubtrahatur quadratum poſterioris aequationis a quadrato prioris, ac remanebit $1 = \frac{aa}{\text{ſin.}\, a^2} - \frac{bb}{\text{coſ.}\, a^2}$, vnde fit $bb = aa\,\text{cot.}\, a^2 - \text{coſ.}\, a^2$; ex priore autem quantitas a per alteram b definiri poſſet hoc modo:

$$4aa = (e^{b} + e^{-b})^2 - \frac{4bb\,(e^{b} + e^{-b})^2}{(e^{b} - e^{-b})^2}.$$

§. 35. Ex binis autem formulis primo inuentis, quae erant: $\text{coſ.}\, a = \frac{2b}{e^{b} - e^{-b}}$ et $\text{ſin.}\, a = \frac{aa}{e^{b} + e^{-b}}$, intelligitur, eas non mutari, etiamſi loco b ſcribatur $-b$; deinde vero etiam nulla variatio oritur, etiamſi loco a ſcribatur $-a$; vnde ſi fuerit $x = a + b\sqrt{-1}$, ſimul tres alii

valores imaginarii locum habebunt, qui omnes in hac forma dupliciter ambigua continentur: $x = \pm a \pm b\sqrt{-1}$.

§. 36. Sufficiet igitur ſolos valores poſitiuos pro a conſideraſſe, ac primo quidem patet, hinc omnes angulos excludi, quorum vel ſinus vel coſinus eſt negatiuus; vnde nulli alii relinquuntur, niſi qui continentur in hac forma: $2i\pi + \gamma$, exiſtente $\alpha < 90^0$, denotante i numerum integrum quemcunque. Ex caſu quidem $i = 0$ ſtatim ſe prodit caſus $a = 0$ et $b = 0$, qui autem inſtituto noſtro eſt alienus, vnde nobis a caſu $i = 1$ erit inchoandum, ponendo $a = 2\pi + \alpha$, ſicque aequationes noſtrae erunt

$$\text{cof. } \alpha = \frac{2b}{e^b - e^{-b}} \text{ et } \text{fin. } \alpha = \frac{4\pi + 2\alpha}{e^b + e^{-b}},$$

vbi cum ſit $4\pi + 2\gamma > 12$, multo magis formula $e^b + e^{-b}$ ſuperare debet numerum 12, vnde b notabiliter maius eſſe debet quam $\frac{1}{2}$, ac fortaſſe non multum a ternario differt. Tum autem ob $e^b > 12$ ex priori formula certe erit $\text{cof. } \alpha < \frac{2b}{12} < \frac{1}{2}$; vnde ſequitur angulum γ excedere debere 60^0; quamobrem ponamus $\alpha = 90^0 - \omega$, ſiue $a = \frac{5}{2}\pi - \omega$, et iam noſtrae aequationes erunt $\text{fin. } \omega = \frac{2b}{e^b - e^{-b}}$ et $\text{cof. } \omega = \frac{5\pi - 2\omega}{e^b + e^{-b}}$. Quaeruntur igitur valores litterarum ω et b, vt his ambabus aequationibus ſatisfiat; verum ad hoc nulla alia via patet, niſi vt tentando continuo propius ad earum valores progrediamur.

§. 37. Ne autem formulae exponentiales nobis calculum perturbent, ſtatuamus $e^b = n$, vt ſit $e^{-b} = \frac{1}{n}$; tum autem, logarithmis hyperbolicis ſumendis, erit $b = l\,n$. Quo igitur

igitur logarithmis vulgaribus vti queamus, fiet

$$b = 2,30258509\, l\, n,$$

quippe qui numerus eſt logarithmus hyperbolicus denarii, vnde ex numero n facile colligitur b per logarithmos, cum ſit $l\, b = l\, l\, n + 0,3622156$. Hinc vero ſimul patet, ſi numerus n exiguum capiat incrementum ∂n, tum incrementum litterae b futurum eſſe $= \frac{\partial n}{n}$, et ſi accuratius deſideremus hoc incrementum, erit

$$= \frac{\partial n}{n} - \frac{\partial n^2}{2 n n} + \frac{\partial n^3}{3 n^3} - \text{etc.}$$

§. 38. Quod autem ad angulum ω attinet, ſi eum in minutis ſecundis expreſſum habeamus, quorum numerus ſit N, tum idem angulus ω in partibus radii expreſſus reperietur, ſi ad l N addatur iſte logarithmus conſtans 4,0855749; numerus enim reſpondens dabit quaeſitum.

§. 39. Nunc tentamen incipiamus, ponendo $n = 20$, vnde primo quaeramus b hoc modo:

$l\, n = 1,30103,$

$l\, l\, n = 0,1142873,$

add. $0,3622156,$

$l\, b = 0,4765029,$

ergo $b = 2,9957.$

Cum iam prior aequatio ſit ſin. $\omega = \frac{2\, b}{n - \frac{1}{n}}$, altera vero cof. $\omega = \frac{5\, \pi - 2\, \omega}{n + \frac{1}{n}}$, pro priore erit $n - \frac{1}{n} = 19,950$, eiusque ſemiſſis $= 9,9750$, vnde colligimus l ſin. $\omega = 9,4775900$,

ergo angulus $\omega = 17^0. 28'$, ideoque in minutis secundis $\omega = 62880''$, consequenter in partibus radii $\omega = 0,30485$. Hinc pro altera aequatione habebitur $l \cos. \omega = 9,9794991$. Pro parte dextra vero est primo numerator $5\pi - 2\omega = 15,098216$, eiusque logarithmus $= 1,1789256$, at denominator erit $n + \frac{1}{n} = 20,050$, vnde logarithmus partis dextrae erit $9,8768112$, qui minis est paruus; vnde concludimus denominatorem minorem esse debere, ideoque $n < 20$.

§. 40. Tribuamus igitur numero n minorem valorem, puta 18, atque totum calculum in sequenti schemate adiiciamus:

	$n = 18$	$n = 16$	$n = 15,9333$
$l\,n$	1,2552725	1,2041200	1,2022985
$l\,l\,n$	0,0987379	0,0806699	0,0800125
add.	0,3622156	0,3622156	0,3622156
$l\,b$	0,4609535	0,4428855	0,4422281
$\frac{1}{n}$	0,05555	0,06250	0,06276
$n - \frac{1}{n}$	17,94444	15,93750	15,87057
$n + \frac{1}{n}$	18,05555	16,06250	15,99609
$l\,2\,b$	0,7619835	0,7439155	0,7432581
$l\,n - \frac{1}{n}$	1,2539300	1,2024202	1,2005925
l fin. ω	1,5080535	9,5414953	9,5426656
ω	$18^0, 47'$	$20^0. 22'$	$20^0. 25'. 6''.$
N	67620	73320	73506
$l\,N$	4,8300752	4,8652225	4,8663228
add.	4,6855749	4,6855759	4,6855749
$l\,\omega$	9,5156501	9,5507974	9,5518977

ω	0,32783	0,35547	0,35637
2ω	0,65566	0,71094	0,71274
2ω	0,65566	0,71094	0,71274
5π	15,70796	15,70796	15,70796
$5\pi - 2\omega$	15,05230	14,99702	14,99522
$l(5\pi - 2\omega)$	1,1770029	1,1760050	1,1759529
$l(n + \frac{1}{n})$	1,2565975	1,2058131	1,2040138
. . . . .	9,9210054	9,9701919	9,9719391
l cos. ω	9,9762321	9,9719642	9,9718186
error	0,0552267 —	0,0017723 —	0,0001205 +

§. 41. In prima ergo columna error prodiit $-0,0552267$, qui casu $n = 2$ erat $+0,1026879$, vnde conclusimus valorem ipsius n adhuc esse nimis magnum, ideoque secundam columnam adiunximus, ponendo $n = 16$. At ex secunda columna prodiit error $-0,0017723$; quare cum prima columna dediffet errorem $-0,0552267$, et differentia $0,0534544$ orta sit ex differentia hypothesium 14, fiat vt $53445 : 2 = 1771 : x$, 66, et tanta fractione numerus $n = 16$ diminui debebit. Ponatur ergo pro tertia columna $n = 15,9338$, fiatque calculus vt in prioribus, atque error inde resultans reuera pro nihilo haberi potest, ita vt iam certi simus esse $a = 7,49761$ et $b = 2,76840$.

§. 42. Inuentis igitur litteris a et b nulla ratio simplex inter eas deprehenditur, neque vero etiam ad peripheriam π notabilem rationem tenent. Consideremus autem

tem ipſum factorem trinomialem, ex quo haec radix imaginaria eſt nata, qui eſt

$$yy + 2ay + aa + bb,$$

et ex valoribus inuentis reperitur

$$aa + bb = 63,87821,$$

qui numerus cum neque inſigni proprietate gaudeat, neque etiam ad $\pi\pi$ rationem teneat ſimplicem, omnis ſpes euaneſcit, factores trinomiales aequationis propoſitae ſimplici modo exprimendi, qui ergo etiam ſine dubio altiores quantitates tranſcendentes inuoluunt. Interim tamen confido, tractationem huius argumenti, in quo nonnulla egregia artificia occurrunt, Geometris non eſſe displicituram.

EX-

EXERCITATIO ANALYTICA;

VBI IMPRIMIS SERIEI MAXIME GENERALIS SVMMATIO TRADITVR.

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 3 Febr. 1777.

§. 1.

Cum nuper oſtendiſſem, naturam linearum curuarum maxime adaequate per relationem inter ipſum curuae arcum eiusque amplitudinem exprimi poſſe, in mentem mihi venit, hanc rationem ad hyperbolam aequilateram, hac aequatione expreſſam: $yy = xx - 1$, accommodare. Sit igitur C B axis huius hyperbolae, punctum C eius centrum et A vertex, voceturque ſemiaxis C A $= 1$. Iam pro puncto curuae quocunque M, ducta applicata M P, vocetur abſciſſa C P $= x$ et applicata P M $= y$, eritque $y = \sqrt{(xx-1)}$. Sit porro recta C V huius hyperbolae aſſymptota, cum axe angulum ſemirectum conſtituens, vnde producta applicata P M vsque ad aſſymptotam in S, erit P S $=$ C P $= x$ et C S $= x\sqrt{2}$. Tab. I. Fig. 1.

§. 2. Vocetur nunc inſuper arcus hyperbolae A M $= s$, et ducta ad curuam normali M N, vocetur amplitudo arcus A M, ſeu angulus A N M $= \Phi$. Cum nunc ſit $y\partial y = x\partial x$,

erit subnormalis $PN = x = CP$, hincque tang. $\Phi = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{(xx-1)}}{x}$; vnde per amplitudinem quantitas x ita exprimetur, vt fit $xx = \frac{cos.\,\Phi^2}{cos.\,\Phi^2 - sin.\,\Phi^2}$, ideoque $x = \frac{cos.\,\Phi}{\sqrt{cos.\,2\Phi}}$, ex quo colligitur fore

$$\partial x = \frac{\partial\Phi\,(cos.\,\Phi\,sin.\,2\Phi - sin.\,\Phi\,cos.\,2\Phi)}{cos.\,2\Phi\,\sqrt{cos.\,2\Phi}} = \frac{\partial\Phi\,sin.\,\Phi}{cos.\,2\Phi\,\sqrt{cos.\,2\Phi}}.$$

Quoniam igitur est $\frac{\partial x}{\partial s} = sin.\,\Phi$, erit $\partial s = \frac{\partial x}{sin.\,\Phi}$, ideoque $\partial s = \frac{\partial\Phi}{cos.\,2\Phi\,\sqrt{cos.\,2\Phi}}$, quae est aequatio differentialis inter arcum curuae s eiusque amplitudinem Φ.

§. 3. Quo nunc facilius longitudinem arcus s per eius amplitudinem Φ exprimere valeamus, statuamus

$$s = \frac{z}{\sqrt{cos.\,2\Phi}},$$ eritque $\partial s = \frac{\partial z\,cos.\,2\Phi + z\,\partial\Phi\,sin.\,2\Phi}{cos.\,2\Phi\,\sqrt{cos.\,2\Phi}}$,

vnde quantitatem z ex hac aequatione elici oportebit:

$$\partial\Phi = \partial z\,cos.\,2\Phi + z\,\partial\Phi\,sin.\,2\Phi,$$

pro cuius integratione fingamus hanc seriem:

$$z = A\,sin.\,2\Phi + B\,sin.\,6\Phi + C\,sin.\,10\Phi + etc.$$

Calculum enim tentanti mox patebit angulos per 4Φ continuo augeri debere. Quoniam igitur esse debet

$$1 = \frac{\partial z}{\partial\Phi}\,cos.\,2\Phi + z\,sin.\,2\Phi,$$

habebimus primo

$$\frac{\partial z}{\partial\Phi} = 2\,A\,cos.\,2\Phi + 6\,B\,cos.\,6\Phi + 10\,C\,cos.\,10\Phi + etc.$$

vnde cum in genere sit

$$cos.\,2\Phi\,cos.\,n\Phi = \tfrac{1}{2}cos.\,(n-2)\Phi + \tfrac{1}{2}cos.\,(n+2)\Phi,$$ erit

$$\frac{\partial z}{\partial\Phi}\,cos.\,2\Phi = A + A\,cos.\,4\Phi + 3\,B\,cos.\,8\Phi + 5\,C\,cos.\,12\Phi \text{ etc.}$$
$$+3\,B \qquad +5\,C \qquad +7\,D$$

Simili modo cum sit

$$sin.\,2\Phi\,sin.\,n\Phi = \tfrac{1}{2}cos.\,(n-2)\Phi - \tfrac{1}{2}cos.\,(n+2)\Phi,$$

repe-

reperietur

$$z \text{ fin. } 2\Phi = \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}A \text{ cof. } 4\Phi - \tfrac{1}{2}B \text{ cof. } 8\Phi - \tfrac{1}{2}C \text{ cof. } 12\Phi \text{ etc.}$$
$$+\tfrac{1}{2}B \qquad +\tfrac{1}{2}C \qquad +\tfrac{1}{2}D$$

his igitur ſeriebus coniunctis prodibit ſequens aequatio:

$$1 = \tfrac{3}{2}A + (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{7}{2}B) \text{ cof. } 4\Phi + (\tfrac{5}{2}B + \tfrac{11}{2}C) \text{ cof. } 8\Phi$$
$$+ (\tfrac{9}{2}C + \tfrac{15}{2}D) \text{ cof. } 12\Phi + (\tfrac{13}{2}D + \tfrac{19}{2}E) \text{ cof. } 16\Phi + \text{etc.}$$

§. 4. Aequalitate igitur rite conſtituta ſequentes colligentur coëfficientium determinationes:

$$A = \tfrac{2}{3},\ B = -\tfrac{1}{7}A,\ C = -\tfrac{5}{11}B,\ D = -\tfrac{9}{15}C,\ E = -\tfrac{13}{19}D, \text{ etc.}$$

quibus valoribus ſubſtitutis nanciscemur hinc valorem:

$$z = A(\text{fin. } 2\Phi - \tfrac{1}{7}\text{fin. } 6\Phi + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11}\text{fin. } 10\Phi - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11}\cdot\tfrac{9}{15}\text{fin. } 14\Phi + \text{etc.})$$

exiſtente $A = \frac{2}{3}$, quae ſeries pro euaneſcente amplitudine Φ praebet $z = 0$, ideoque etiam $s = 0$, vti natura rei poſtulat. Quod ſi autem curua in infinitum producatur, quoniam tum curua cum aſſymptota confunditur, fiet amplitudo $\Phi = 45^0$, vnde ob fin. $2\Phi = 1$, fin. $6\Phi = -1$, fin. $10\Phi = +1$, fin. $14\Phi = -1$, et ita porro, pro hoc caſu valor ipſius z erit:

$$z = A(1 + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11}\cdot\tfrac{9}{15} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11}\cdot\tfrac{9}{15}\cdot\tfrac{13}{19} + \text{etc.})$$

cuius ſeriei ſumma manifeſto eſt finita, nihilo tamen minus ipſe arcus s fiet vtique infinite magnus, quemadmodum euidens eſt ex aequatione $s = \frac{z}{\sqrt{\text{cof. } 2\Phi}}$, ob cof. $2\Phi = \text{cof. } 90^0 = 0$.

§. 5. Referat nunc in figura punctum E terminum infinite remotum in hyperbola, cui in aſſymptota reſpondeat punctum V, ita vt totus arcus $AE = \frac{z}{\sqrt{\text{cof. } 2\Phi}}$, exiſtente $2\Phi = 90^0$; tum igitur, cum ſit in aſſymptota ſpatium indefinitum $CS = x\sqrt{2} = \frac{\text{cof. } \Phi \sqrt{2}}{\sqrt{\text{cof. } 2\Phi}}$, facto pariter $\Phi = 45^0$, erit longitudo

infinita $CV = \frac{1}{\sqrt{cos.\,2\Phi}}$. Conſtat autem differentiam inter curuam AME et rectam CV eſſe finitam, quandoquidem curua AE manifeſto eſt minor quam recta CV, at [ſi ex A in CV ducatur perpendicularis AD] maior quam recta VD. Sit igitur $CV - AE = \Delta$, vbi ſufficit noſſe, Δ eſſe quantitatem finitam. Hinc igitur erit $\frac{1-z}{\sqrt{cos.\,2\Phi}} = \Delta$, ideoque $z = 1 - \Delta\sqrt{cos.\,2\Phi}$, conſequenter, ob $\sqrt{cos.\,2\Phi} = 0$, erit $z = 1$; ex quo concludimus, ſummam ſeriei pro z inuentae, caſu $\Phi = 45^0$, praeciſe vnitati eſſe aequalem; vnde per $\frac{3}{2}$ multiplicando habebimus

$$1 + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11}\cdot\tfrac{9}{15} + \text{etc.} = \tfrac{3}{2},$$

ablata igitur vtrinque vnitate erit

$$\tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11}\cdot\tfrac{9}{15} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2},$$

quae ſummatio mihi eo magis memorabilis eſt viſa, quod non memini, eam vsquam conſignatam inueniſſe.

§. 6. Quo igitur certior fierem de ſummationis huius veritate, eam ſequenti modo mihi familiari ſum perſcrutatus. Pono

$$s = \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11}x^{11} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11}\cdot\tfrac{9}{15}x^{15} + \text{etc.}$$

ita vt poſito $x = 1$ ſumma quaeſita reſultet. Hinc ergo erit differentiando:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = x^6 + \tfrac{1}{7}\cdot 5\,x^{10} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11}\cdot 9\,x^{14} + \text{etc.}$$

Deinde vero cum ſit

$$\frac{s}{x\,x} = \tfrac{1}{7}x^5 + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11}x^9 + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11}\cdot\tfrac{9}{15}x^{13} + \text{etc.}$$

erit itidem differentiando

$$\tfrac{1}{\partial x}\cdot\partial\cdot\frac{s}{x\,x} = \tfrac{5}{7}x^4 + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11}\cdot 9\,x^8 + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{5}{11}\cdot\tfrac{9}{15}\cdot 13\,x^{12} + \text{etc.}$$

quae ſeries, ducta in x^6 et a priore ſerie differentiali ablata, relinquit

quit $\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{x^6}{\partial x} \cdot \partial \cdot \frac{s}{x\,x} = x^6$, ficque habetur aequatio finita, ex qua valorem ipfius s erui oportet.

§. 7. Facta igitur euolutione deducti fumus ad hanc aequationem differentialem:

$$\partial s - x^4 \partial s + 2 x^3 s \partial x = x^6 \partial x.$$

Diuidatur haec aequatio per $s(1 - x^4)$, vt prodeat

$$\frac{\partial s}{s} + \frac{2 x^3 \partial x}{1 - x^4} = \frac{x^6 \partial x}{s(1 - x^4)},$$

cuius aequationis membrum prius fponte eft integrabile. Integrale enim eft

$$l s - \tfrac{1}{2} l (1 - x^4) = l \frac{s}{\sqrt{(1 - x^4)}},$$

vnde aequatio hoc modo referatur:

$$\partial \cdot l \frac{s}{\sqrt{(1 - x^4)}} = \frac{x^6 \partial x}{s(1 - x^4)}.$$

Manebit igitur haec aequatio integrabilis, fi multiplicetur per $\frac{s}{\sqrt{(1 - x^4)}}$, quo pacto fimul membrum dextrum integrationem admittet. Sic enim erit

$$\frac{s}{\sqrt{(1-x^4)}} \partial \cdot l \frac{s}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{x^6 \partial x}{(1 - x^4)^{\frac{3}{2}}},$$

quae aequatio, pofito breuitatis gratia $\frac{s}{\sqrt{(1 - x^4)}} = v$, induet hanc formam:

$$v \partial \cdot l v = \partial v = \frac{x^6 \partial x}{(1 - x^4)^{\frac{3}{2}}},$$

vnde ergo colligitur

$$v = \frac{s}{\sqrt{(1 - x^4)}} = \int \frac{x^6 \partial x}{(1 - x^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 8. Facile autem patet hanc poſtremam formam integrationem algebraice non admittere. Interim tamen haec reductio ad formam ſimpliciorem cum ſucceſſu adhiberi poterit. Ponatur ſcilicet

$$\int \frac{x^6 \partial x}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha x^3}{\sqrt{1-x^4}} + \beta \int \frac{x x \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

et ſumtis differentialibus erit

$$\frac{x^6 \partial x}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\alpha x x \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} + \frac{2\alpha x^6 \partial x}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\beta x x \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

quae aequatio per $(1-x)^{\frac{3}{2}}$ multiplicata praebet

$$x^6 = (3\alpha + \beta) x x - (\alpha + \beta) x^6,$$

vnde patet capi debere $\alpha + \beta = -1$ et $3\alpha + \beta = 0$, ſicque erit $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{3}{2}$, hocque pacto fiet

$$\int \frac{x^6 \partial x}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3}{2\sqrt{(1-x^4)}} - \frac{3}{2} \int \frac{x x \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

ideoque

$$s = \frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{2} \sqrt{(1-x^4)} \int \frac{x x \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}.$$

§. 9. Quanquam autem hic poſtremum integrale $\int \frac{x x \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$ expediri nequit: tamen facile perſpicitur, iſtud integrale, caſu $x = 1$, finitum valorem eſſe habiturum, id quod ad praeſens noſtrum inſtitutum ſufficit. Sit igitur iſte valor finitus formulae $\int \frac{x x \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \Delta$, et aequatio inuenta, poſito $x = 1$, dabit $s = \frac{1}{2}$, quae eſt ea ipſa ſumma, quam nobis praecedens ſummatio ſuppeditauit.

§. 10.

§. 10. Similis igitur operatio nos ad plures alias ſummationes huiusmodi ſerierum magis generalium perducere valebit, vnde ſequens Problema ſuscipiamus:

Problema.

Inuenire ſummam huius ſeriei in infinitum excurrentis:

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+\theta}{b+\theta} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+\theta}{b+\theta}\cdot\frac{a+2\theta}{b+2\theta} + \text{etc.}$$

Solutio.

§. 11. Statuamus igitur vt ante

$$s = \frac{a}{b}x^b + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+\theta}{b+\theta}x^{b+\theta} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+\theta}{b+\theta}\cdot\frac{a+2\theta}{b+2\theta}x^{b+2\theta} + \text{etc.}$$

cuius ergo valor quaeritur caſu $x = 1$. Nunc vero haec ſeries differentiata dabit

$$\frac{\partial s}{\partial x} = a x^{b-1} + \frac{a}{b}\cdot(a+\theta)x^{b+\theta-1} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+\theta}{b+\theta}\cdot(a+2\theta)x^{b+2\theta-1} + \text{etc.}$$

Iam ipſa ſeries propoſita ducatur in $x^{a-b+\theta}$, eritque

$$x^{a-b+\theta}\cdot s = \frac{a}{b}x^{a+\theta} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+\theta}{b+\theta}x^{a+2\theta} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+\theta}{b+\theta}\cdot\frac{a+2\theta}{b+2\theta}x^{a+3\theta} + \text{etc.}$$

quae etiam differentiata praebet:

$$\frac{1}{\partial x}\partial\cdot x^{a-b+\theta}\cdot s = \frac{a}{b}(a+\theta)x^{a+\theta-1} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+\theta}{b+\theta}(a+2\theta)x^{a+2\theta-1} + \text{etc.}$$

quae ſeries ducta in x^{b-a} et a ſuperiore ſubtracta deſtruet omnes terminos poſt primum; eritque

$$\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{x^{b-a}}{\partial x}\partial\cdot x^{a-b+\theta}\cdot s = a x^{b-1},$$

quae ergo eſt aequatio finita, vnde incognitam s erui oportet.

§. 12. Facta igitur euolutione deducimur ad hanc aequationem differentialem:

$$\partial s(1-x) - (a-b+\theta)s x^{\theta-1}\partial x = a x^{b-1}\partial x,$$

quam per $s(1-x^\theta)$ diuidamus, vt obtineamus

$$\partial s$$

$$\frac{\partial s}{s} - \frac{(a-b+\theta)\, x^{\theta-1}\partial x}{1-x^{\theta}} = \frac{a\, x^{b-1}\partial x}{s(1-x^{\theta})},$$

vbi prioris membri integrale eſt

$$l\, s + \tfrac{a-b+\theta}{\theta}\, l(1-x^{\theta}), \text{ ſiue}$$
$$l\, s - \tfrac{b-a-\theta}{\theta}\, l(1-x^{\theta}).$$

Mox enim videbimus ſummam ſeriei finitam non eſſe, niſi ſit $b > a+\theta$. Hanc ob rem ſtatuamus

$$\frac{s}{(1-x^{\theta})^{\frac{b-a-\theta}{\theta}}} = v,$$

vt membrum finiſtrum ſit $\partial . l\, v$, et aequatio erit

$$\partial . l\, v = \frac{a\, x^{b-1}\partial x}{s(1-x^{\theta})},$$

quae per v multiplicata euadet integrabilis; prodit enim

$$v . \partial . l\, v = \partial v = \frac{a\, x^{b-1}\partial x}{(1-x^{\theta})^{\frac{b-a}{\theta}}},$$

cuius integrale eſt

$$v = \frac{s}{(1-x^{\theta})^{\frac{b-a-\theta}{\theta}}} = a\int \frac{x^{b-1}\partial x}{(1-x^{\theta})^{\frac{b-a}{\theta}}}.$$

§. 13. Ponamus breuitatis gratia $\frac{b-a-\theta}{\theta} = n$, vt ſit $b = n\theta + a + \theta$, ſiue $a = b - \theta - n\theta$, ſicque aequatio noſtra erit

$$\frac{s}{(1-x^{\theta})^{n}} = a\int \frac{x^{b-1}\partial x}{(1-x^{\theta})^{n+1}}.$$

Iam adhibeamus reductionem ſupra vſurpatam, ponendo

$$\int \frac{x^{b-1}\partial x}{(1-x^\theta)^{n+1}} = \frac{\alpha x^{b-\theta}}{(1-x^\theta)^n} + \beta \int \frac{x^{b-\theta-1}\partial x}{(1-x^\theta)^n},$$

vnde facta euolutione prodit

$$\frac{x^{b-1}}{(1-x^\theta)^{n+1}} = \frac{\alpha(b-\theta)x^{b-\theta-1}}{(1-x^\theta)^n} + \frac{n\alpha\theta x^{b-1}}{(1-x^\theta)^{n+1}} + \frac{\beta x^{b-\theta-1}}{(1-x^\theta)^n},$$

quae aequatio, ducta in $(1-x^\theta)^{n+1}$, praebet:

$$x^{b-1} = [\alpha(b-\theta)+\beta]\, x^{b-\theta-1} - [\alpha(b-\theta) - n\alpha\theta + \beta]\, x^{b-1},$$

vnde sequitur sumi debere $\alpha = \frac{1}{n\theta}$ et $\beta = -\frac{b-\theta}{n\theta}$. Hinc igitur aequatio nostra x, per $(1-x^\theta)^n$ multiplicata, dabit

$$s = \frac{a}{n\theta} x^{b-\theta} - \frac{a(b-\theta)}{n\theta}(1-x^\theta)^n \int \frac{x^{b-\theta-1}\partial x}{(1-x^\theta)^n}.$$

§. 14. Quod autem hic ad postremum membrum attinet, etsi summatio institui nequit, tamen, quia in differentiali habetur denominator $(1-x^\theta)^n$, certum est, in integrali, si exhiberi posset, denominatorem tantum fore $(1-x^\theta)^{n-1}$, quippe cuius potestas vnitate minor est quam praecedentis. Hinc tuto assumere licebit, hoc integrale tantum habere formam $\frac{Q}{(1-x^\theta)^{n-1}}$, vbi nosse sufficiet in Q non amplius contineri denominatorem $1-x^\theta$; quo valore substituto habebimus:

$$s = \frac{a}{n\theta} x^{b-\theta} - \frac{a(b-\theta)}{n\theta}(1-x^\theta)\, Q.$$

§. 15. Inuenta iam summa seriei generalis tractatae, inde summam seriei propositae eliciemus, si faciamus $x = 1$; tum autem prodibit $s = \frac{a}{n\theta}$, ita vt formula incognita Q prorsus e calculo excesserit. Quoniam igitur breuitatis gratia

posuimus $n = \frac{b-a-\theta}{\theta}$, erit summa nostrae seriei $= \frac{a}{b-a-\theta}$, vnde deducimus sequens

Theorema.

Quodsi proposita fuerit ista series infinita:

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+\theta}{b+\theta} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+\theta}{b+\theta}\cdot\frac{a+2\theta}{b+2\theta} + \text{etc.}$$

eius summa semper erit $= \frac{a}{b-a-\theta}$; *vnde sequitur, nisi fuerit* $b > a+\theta$, *hanc seriem summam finitam non habere, sed fore infinitam.*

§. 16. Cum igitur ista summatio latissime pateat, notasse iuuabit, in ea contineri series maxime cognitas, quae scilicet ex euolutione binomii nascuntur. Si enim potestatem binomialem $(1-x)^{\frac{a}{b}}$ euoluamus, ac fuerit $b > a$, sequens formabitur series:

$$(1-x)^{\frac{a}{b}} = 1 - \frac{a}{b}x + \frac{a(b-a)}{b\cdot 2b}x^2 - \frac{a(b-a)(2b-a)}{b\cdot 2b\cdot 3b}x^3 - \text{etc.}$$

Hinc igitur si ponamus $x = 1$, orietur ista summatio

$$1 = \frac{a}{b} + \frac{a}{b}\cdot\frac{b-a}{2b} + \frac{a}{b}\cdot\frac{b-a}{2b}\cdot\frac{2b-a}{3b} + \text{etc.}$$

quae egregie conuenit cum nostro theoremate. Si enim multiplicemus per $\frac{b}{a}$, fiet

$$\frac{b}{a} = 1 + \frac{b-a}{2b} + \frac{b-a}{2b}\cdot\frac{2b-a}{3b} + \text{etc.},$$

ideoque

$$\frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{2b} + \frac{b-a}{2b}\cdot\frac{2b-a}{3b} + \text{etc.}$$

Si haec series cum nostra generali comparetur, quod nobis erat a, hic est $b-a$, quod nobis erat b, hic est $a\,b$, at quod nobis erat θ, hic est b. Vnde cum summa fuisset $\frac{a}{b-a-\theta}$, praesenti casu summa erit $\frac{b-a}{a}$, id quod pulcherrime congruit.

§. 17.

§. 17. Quin etiam ſumma aſſignari poterit ſerierum multo magis generalium, in quibus adeo innumerabiles litterae arbitrariae occurrunt, quemadmodum in ſequente Theoremate plenius ſum oſtenſurus.

Theorema generale.

Si litterae a, b, c, d, etc. cum θ pro lubitu numeros quoscunque denotent, huius progreſſionis, ſiue in infinitum excurrentis, ſiue alicubi terminatae:

$$\frac{a}{b+\theta} + \frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta} + \frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta}\cdot\frac{c}{d+\theta} + \text{etc.}$$

ſumma ſemper eſt $\frac{a}{\theta}$.

Hanc veritatem neutiquam methodo ſupra adhibita per Analyſin Infinitorum oſtendere licet; at vero ex principiis Algebrae communis geminam demonſtrationem ſum traditurus: priore ſcilicet ex ipſa ſummae expreſſione $\frac{a}{\theta}$ ſeriem propoſitam deriuare docebo, altera vero ex conſideratione ipſius ſeriei eius ſummam.

Demonſtratio prior.

§. 18. Iſta demonſtratio per ſequentes conſiderationes planiſſimas abſoluetur. Ponatur ſcilicet:

I°. $\frac{a}{\theta} = \frac{a}{b+\theta} + \frac{p}{\theta}$, eritque $p = \frac{ab}{b+\theta}$,

II°. $\frac{p}{\theta} = \frac{p}{c+\theta} + \frac{q}{\theta}$, eritque $q = \frac{cp}{c+\theta}$,

III°. $\frac{q}{\theta} = \frac{q}{d+\theta} + \frac{r}{\theta}$, eritque $r = \frac{dq}{d+\theta}$,

etc.

hocque modo quovsque libuerit procedere licet.

§. 19. Quod ſi iam ſtatim in ipſa littera p ſubſiſtamus, habebimus hanc aequationem: $\frac{a}{\theta} = \frac{a}{b+\theta} + \frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{\theta}$.

Sin autem in littera q ſubſiſtamus, quia $\frac{p}{\theta} = \frac{p}{c+\theta} + \frac{cp}{(c+\theta)\theta}$, erit

$$\frac{a}{\theta} = \frac{a}{b+\theta} + \frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta} + \frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta}\cdot\frac{c}{\theta}.$$

Sin autem demum in r ſubſiſtamus erit:

$$\frac{a}{\theta} = \frac{a}{b+\theta} + \frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta} + \frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta}\cdot\frac{c}{d+\theta} + \frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta}\cdot\frac{c}{d+\theta}\cdot\frac{d}{\theta}$$

et ita porro. Vnde patet iſtam ſummationem ſemper locum habere, ad quotcunque terminos progreſſio continuetur, id quod adeo in infinitum valebit. Id tantum hic eſt monendum, quoniam poſtremus terminus a forma reliquorum aliquantillum discrepat, terminum infiniteſimum hic plane non in cenſum venire. Nam, quia omnes factores numeratoris minores ſunt factoribus denominatoris, euidens eſt, valorem termini infiniteſimi prorſus euaneſcere.

Altera demonſtratio.

§. 20. Hic igitur ipſam ſeriem tanquam datam ſpectemus atque in eius ſummam, quae ſit $= s$, inquiramus. Ad hoc ſingulorum terminorum factores poſtremos in duas partes discerpamus, ſequenti modo:

I°. $\frac{a}{b+\theta} = \frac{a}{\theta} - \frac{ab}{(b+\theta)\theta}$,

II°. $\frac{b}{c+\theta} = \frac{b}{\theta} - \frac{bc}{(c+\theta)\theta}$,

III°. $\frac{c}{d+\theta} = \frac{c}{\theta} - \frac{cd}{(d+\theta)\theta}$,

etc.

§. 20. Quod ſi iam hos valores introducamus, loco cuiusque factoris vltimi ſinguli termini noſtrae ſeriei in binas partes diuidentur, quas ſequenti modo ſibi inuicem ſubſcribamus:

$s =$

$$s = \frac{a}{\theta} + \frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{\theta} + \frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta}\cdot\frac{c}{\theta} \text{ etc.}$$
$$- \frac{ab}{(b+\theta)\theta} - \frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{bc}{(c+\theta)\theta} - \frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta}\cdot\frac{cd}{(d+\theta)\theta}$$

vbi euidens eſt quemlibet terminum negatiuum a ſequenti poſitiuo deſtrui, ita vt tandem primus poſitiuus et vltimus negatiuus relinquantur. Quodſi autem haec ſeries in infinitum continuetur, modo obſeruauimus, terminum vltimum negatiuum in nihilum abire, propterea quod eius numerator infinities minor erit quam denominator; quo notato tota ſumma manifeſto redigitur ad $s = \frac{a}{\theta}$.

§. 22. Hanc vltimam ſummationem iam olim in adverſariis meis conſignatam reperio: non autem memini, eius mentionem vnquam publice feciſſe. In commercio quidem epiſtolico quod iam ante quadraginta annos cum Ill. *Goldbachio* beatae mem. colui, plurima huc pertinentia occurrunt, quamobrem non dubito, quin Geometrae hanc euolutionem benigne ſint accepturi.

DILVCIDATIONES SVPER FORMVLIS, QVIBVS SINVS ET COSINVS ANGVLORVM MVLTIPLORVM EXPRIMI SOLENT, VBI SIMVL INGENTES DIFFICVLTATES DILVVNTVR.

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 6 Mart. 1777.

§. 1.

Propoſito angulo quocunque Φ, ſi eius coſinus vocetur $= \frac{1}{2}x$, vt ſit $2 \text{ cof. } \Phi = x$, conſtat tam ſinus quam coſinus angulorum multiplorum conſtituere progreſſionem recurrentem, cuius ſcala relationis eſt $x, -1$; erit enim

$$\text{fin. } (n+1)\Phi = x \text{ fin. } n\Phi - \text{fin. } (n-1)\Phi,$$
$$\text{cof. } (n+1)\Phi = x \text{ cof. } n\Phi - \text{cof. } (n-1)\Phi.$$

Incipiamus a poſteriori formula, et quoniam dupla coſinuum eandem legem ſeruant, hinc ſequens tabula conſtruatur:

2 cof.

$$2\cos.0\Phi = 2,$$
$$2\cos.1\Phi = x,$$
$$2\cos.2\Phi = xx - 2,$$
$$2\cos.3\Phi = x^3 - 3x,$$
$$2\cos.4\Phi = x^4 - 4xx + 2,$$
$$2\cos.5\Phi = x^5 - 5x^3 - 5x,$$
$$2\cos.6\Phi = x^6 - 6x^4 + 9xx - 2,$$
$$2\cos.7\Phi = x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x,$$
$$2\cos.8\Phi = x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + 2,$$
$$2\cos.9\Phi = x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x,$$
etc. etc.

§. 2. In his formulis manifeſtum eſt primos terminos eſſe poteſtates ipſius x eiusdem exponentis, cuius multiplum proponitur; hinc vero exponentes continuo binario decreſcere; tum vero ſigna terminorum alternari; praeterea vero coëfficiens ſecundi termini ſemper aequalis eſt ipſi multiplo; quod autem ad ſequentes coëfficientes attinet, lex, qua progrediuntur, ita ſe habet, vti ſequens forma oſtendit:

$$2\cos.n\Phi = x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)x^{n-4}}{1.\ 2} - \frac{n(n-4)(n-5)x^{n-6}}{1.\ 2.\ 3.}$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)x^{n-8}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} - \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)x^{n-10}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} \text{ etc.}$$

cuius formulae ſummus eſt vſus in coſinibus angulorum multiplorum quantumuis magnorum expedite aſſignandis. Veluti ſi proponatur duodecuplum anguli Φ, hinc ſtatim obtinetur ſequens expreſſio:

2 cos.

$$2 \text{ cof. } 12\,\Phi = x^{12} - 12\,x^{10} + 54\,x^8 - 112\,x^6 + 105\,x^4 - 36\,xx + 2,$$

cuius veritas facile comprobatur, cum ſit

$$2 \text{ cof. } 12\,\Phi = (2 \text{ cof. } 6\,\Phi)^2 - 2.$$

§. 3. Quanquam autem haec formula maximum praeſtat vſum in multiplicatione angulorum, tamen ſecundum rigorem geometricum neutiquam affirmari poteſt, eam generaliter veritati eſſe conſentaneam, quandoquidem pluribus caſibus maxime a veritate recedit. Quodſi enim ſumamus $n = 0$, iſta formula praebet $2 \text{ cof. } 0\,\Phi. = 1$, cum tamen eius valor ſit 2. Multo magis formula aberrare deprehenditur, ſi indici n valores negatiui tribuantur: poſito enim $n = -1$, inde prodiret

$$2 \text{ cof. } -\Phi = \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x^3} + \tfrac{2}{x^5} + \tfrac{5}{x^7} + \tfrac{14}{x^9} + \tfrac{42}{x^{11}} + \text{etc.}$$

in infinitum, quae expreſſio manifeſto eſt falſiſſima, cum ſit

$$2 \text{ cof. } -\Phi = 2 \text{ cof. } \Phi = x,$$

illius vero ſeriei ſumma $= \frac{x}{2} - \sqrt{(\frac{xx}{4} - 1)}$, quae igitur plurimum a veritate diſcrepat, ſicque aberratio formulae inuentae pro omnibus numeris negatiuis clariſſime in oculos incurrit.

§. 4. Non ſolum autem haec formula pro numeris negatiuis fallit, ſed etiam pro poſitiuis, ſiquidem tota expreſſio euoluatur, ſumto enim $n = 1$, hinc nanciſcemur iſtam ſeriem:

$$2 \text{ cof. } \Phi = x - \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x^3} - \tfrac{2}{x^5} - \tfrac{5}{x^7} - \tfrac{14}{x^9} - \text{etc.}$$

quae ergo omnibus terminis poſt primum ſequentibus a veritate recedit: vera autem ſumma huius expreſſionis eſt

$\frac{x}{2} +$

$\frac{x}{2} + \sqrt{(\frac{xx}{4} - 1)}$. Simili modo pro caſu $n = 2$ iſta formula praebet

$$2 \text{ cof. } 2\Phi = xx - 2 - \frac{1}{xx} - \frac{2}{x^4} - \frac{5}{x^6} - \frac{14}{x^8} - \frac{42}{x^{10}} - \text{etc.}$$

vbi duo tantum primi termini veritati ſunt conformes, ſequentes omnes vero ſuperflui atque adeo veritati contrarii. Hinc igitur intelligitur formulam illam pro $2 \text{ cof. } n\Phi$ datam, ſiquidem in infinitum continuetur, ſemper in immanes errores praecipitare; ſicque omnis eius vſus tantum reſtringitur ad numeros integros poſitiuos, vbi inſuper caueri debet, ne ſeries vltra terminos integros continuetur, quandoquidem nulli termini, vbi x in denominatores ingreditur, locum habere poſſunt.

§. 5. Quod autem ad numeros fractos attinet, nullo plane modo iſta ſeries cum veritate conciliari ſe patitur. Quodſi enim ponamus $n = \frac{1}{2}$, iſta formula nobis praebebit

$$2 \text{ cof. } \tfrac{1}{2}\Phi = \sqrt{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{5}{8x\sqrt{x}} - \frac{21}{16x^3\sqrt{x}} - \text{etc.}$$

Cum vero ſit

$$\text{cof. } \tfrac{1}{2}\Phi = \sqrt{\frac{1 + \text{cof. } \Phi}{2}} = \sqrt{\frac{2+x}{4}},$$

erit $2 \text{ cof. } \frac{1}{2}\Phi = \sqrt{(2+x)}$, quae autem expreſſio in ſeriem conuerſa ab illa plurimum differt, cum ſit

$$\sqrt{(x+2)} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{2xx\sqrt{x}} - \text{etc.}$$

Ex his iam manifeſtum eſt formulam inuentam, non obſtante ſummo eius vſu, nullo modo tanquam veritati conſentaneam admitti poſſe; vnde haec quaeſtio maximi momenti naſcitur: cur iſta formula a veritate ita aberret, vt certis tamen caſibus ad veritatem perducat?

§. 6. Idem prorſus euenit in formula generali pro ſinibus angulorum multiplorum tradi ſolita. Si enim ponamus $2 \text{ ſin.} \Phi = y$, quoniam etiamnunc eadem ſcala relationis $x, -1$ valet, ſinus angulorum multiplorum ſequenti modo progredientur:

$2 \text{ ſin.} \; 0\Phi = 0,$
$2 \text{ ſin.} \; 1\Phi = y,$
$2 \text{ ſin.} \; 2\Phi = y.x,$
$2 \text{ ſin.} \; 3\Phi = y(xx - 1),$
$2 \text{ ſin.} \; 4\Phi = y(x^3 - 2x),$
$2 \text{ ſin.} \; 5\Phi = y(x^4 - 3xx + 1),$
$2 \text{ ſin.} \; 6\Phi = y(x^5 - 4x^3 + 3x),$
$2 \text{ ſin.} \; 7\Phi = y(x^6 - 5x^4 + 6xx - 1),$
$2 \text{ ſin.} \; 8\Phi = y(x^7 - 6x^5 + 10x^3 - 4x),$
$2 \text{ ſin.} \; 9\Phi = y(x^8 - 7x^6 + 15x^4 - 10xx + 1),$
$2 \text{ ſin.} \; 10\Phi = y(x^9 - 8x^7 + 21x^5 - 20x^3 + 5x).$
etc. etc.

Hic ſcilicet y ab x ita pendet, vt ſit $y = \sqrt{(4 - xx)}$.

§. 7. Contemplatio harum formularum ſimili modo vt ante pro angulo indefinito $n\Phi$ ſequentem ſuppeditabit formulam generalem:

$$2 \text{ ſin.} \; n\Phi = y\left(x^{n-1} - \frac{(n-2)}{1}x^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.\;2}x^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\;2.\;3}x^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\;2.\;3.\;4}x^{n-9} - \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5}x^{n-11} + \text{etc.}\right)$$

Haec autem formula cum veritate conſiſtere nequit, niſi ita reſtringatur, vt primo tantum ad numeros integros poſitivos pro n aſſumendos applicetur; deinde vt termini non vlte-

vlterius continuentur, quam quoad ad exponentes negativos ipſius x perueniatur. Ita ſumendo $n = 12$ hinc reperietur:

$$2 \text{ ſin. } 12\Phi = y(x^{11} - 10x^9 + 36x^7 - 56x^5 + 35x^3 - 6x).$$

§. 8. Cum igitur ambae iſtae formulae generales tam pro ſinibus, quam coſinibus angulorum multiplorum dari ſolitae tam enormiter a veritate diſſentiant, hinc quaeſtio naſcitur maximi momenti: quomodo hi errores euitari atque eiusmodi ſeries erui debeant, quae cum veritate perpetuo, atque omnibus plane caſibus perfecte conſentiant? Tales igitur ſeries ex ipſis Analyſeos principiis hic inuoſtigare conſtitui. Vocabo igitur coſ. $\Phi = z$ et coſ. $n\Phi = s$, et in ſeriem per poteſtates ipſius z procedentem inquiram, quae verum valorem ipſius s exhibeat, quicunque numeri, ſiue poſitiui, ſiue negatiui, ſiue integri, ſiue fracti pro n ſubſtituantur.

§. 9. Cum igitur ſit $z = \text{coſ.}\Phi$, erit $\partial\Phi = \frac{-\partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$; ſimilique modo, cum ſit $s = \text{coſ. } n\Phi$, erit $n\partial\Phi = \frac{-\partial s}{\sqrt{(1-ss)}}$, vnde ſequitur fore $\frac{\partial s}{\sqrt{(1-ss)}} = \frac{n\partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$. Haec vero eadem aequatio prodiiſſet, ſi litterae z et s deſignaſſent ſinus angulorum Φ et $n\Phi$; ſi enim altera ſinum, altera coſinum ſignificaſſet, prodiiſſet $\frac{\partial s}{\sqrt{(1-ss)}} = \frac{-n\partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$. Hanc obrem ſi quadrata ſumamus, haec aequatio: $\frac{\partial s^2}{1-ss} = \frac{nn\partial z^2}{1-zz}$, omnes illas varietates in ſe complectetur. Conſideremus igitur hanc aequationem differentialem:

$$\partial s^2(1-zz) = nn\partial z^2(1-ss),$$

ex qua quo commodius ſeries pro s erui queat, eam denuo differentiemus, ſumto elemento ∂z conſtante, ſicque

nanciſcemur hanc aequationem differentialem ſecundi gradus:

$$\partial\partial s\,(1 - z\,z) - z\,\partial z\,\partial s + n\,n\,s\,\partial z^2 = 0,$$

quae latiſſimo ſenſu omnia in ſe complectitur, quae tam circa ſinus quam coſinus angulorum multiplorum deſiderari poſſunt. Hanc igitur aequationem omni cura pertractemus, ac primo quidem ſine vllo reſpectu ad doctrinam angulorum.

Problema 1.

Propoſita aequatione differentiali ſecundi gradus

$$\partial\partial s\,(1 - z\,z) - z\,\partial z\,\partial s + n\,n\,s\,\partial z^2 = 0,$$

eius integrale completum per duplicem integrationem inueſtigare.

Solutio.

§. 10. Hic ſtatim patet, hanc aequationem integrabilem fieri, ſi ducatur in ∂s; multiplicetur igitur in $2\,\partial s$ et integrale erit

$$\partial s^2\,(1 - z\,z) + n\,n\,s\,s\,\partial z^2 = C\,\partial z^2.$$

Ex hac aequatione deducimus $\partial s^2 = \frac{\partial z^2\,(C - n\,n\,s\,s)}{1 - z\,z}$, quae formula ita repraeſentetur: $\partial s^2 = \frac{\partial z^2\,(n\,n\,s\,s - C)}{z\,z - 1}$, ex qua eruitur:

$$\frac{\partial s}{\sqrt{(n\,n\,s\,s - C)}} = \frac{\partial z}{\sqrt{(z\,z - 1)}}.$$

Cum igitur ſit

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(z\,z - 1)}} = l\,[z + \sqrt{(z\,z - 1)}] \text{ et}$$

$$\int \frac{\partial s}{\sqrt{(n\,n\,s\,s - C)}} = \frac{1}{n}\,l\,[n\,s + \sqrt{(n\,n\,s\,s - C)}],$$

noſtra aequatio erit

$$\frac{1}{n}\,l\,[n\,s + \sqrt{(n\,n\,s\,s - C)}] = l\,[z + \sqrt{(z\,z - 1)}] + l\,D.$$

Multiplicemus per n et ad numeros aſcendendo reperiemus

$$n\,s + \sqrt{(n\,n\,s\,s - C)} = D\,[z + \sqrt{(z\,z - 1)}]^n.$$

§. 11.

§. 11. Quo nunc hinc valorem ipfius s eruamus, ponamus breuitatis gratia: $n s + \sqrt{(n n s s - C)} = Q - n s$, vt fit

$Q = D [z + \sqrt{(z z - 1)}]^n$, eritque

$\sqrt{(n n s s - C)} = Q - n s$, vnde elicitur:

$s = \frac{Q Q + C}{2 n Q} = \frac{Q}{2 n} + \frac{C}{2 n Q}$.

Quodfi iam forma conftantium arbitrariarum immutetur, valor integralis completus quantitatis s per variabilem z ita concinne exprimi poterit:

$$s = f [z + \sqrt{(z z - 1)}]^1 + g [z + \sqrt{(z z - 1)}]^n,$$

quae forma etiam hoc modo exhiberi poteft:

$$s = f [z + \sqrt{(z z - 1)}]^n + g [z - \sqrt{(z z - 1)}]^n.$$

Alia folutio fuccinctior.

§. 12. Quanquam hic integrale completum quaerimus, tamen fufficiet bina integralia particularia inueftigasfe. Quoniam enim in aequatione propofita variabilis s vbique vnicam tantum habet dimenfionem, fi ei fatisfaciant valores $s = p$ et $s = q$, etiam fatisfaciet valor $s = p + q$, atque adeo in genere $s = f p + g q$, denotantibus litteris f et g conftantes quascunque. Hoc obferuato negligatur conftans in prima integratione adiecta, eritque $\partial s^2 = \frac{n n s s \partial z^2}{z z - 1}$, ideoque $\frac{\partial s}{s} = \frac{n \partial z}{\sqrt{(z z - 1)}}$, hincque porro fit

$$s = [z + \sqrt{(z z - 1)}]^n.$$

§. 13. Quia in aequationem differentialem tantum quadratum n ingreditur, cuius radix aeque eft $-n$ ac $+n$, integrale quoque particulare erit

$$s = [z + \sqrt{(z z - 1)}]^n = [z - \sqrt{(z z - 1)}]^n,$$

ficque duo habemus integralia particularia, per litteras p et q defignata, ex iis igitur conflatur iftud integrale completum:

$$s = f[z + \sqrt{(zz-1)}]^n + g[z - \sqrt{(zz-1)}]^n.$$

Problema 2.

Eiusdem aequationis differentialis fecundi gradus:

$$\partial\partial s\,(1 - zz) - z\,\partial z\,\partial s + n n s\,\partial z^2 = 0,$$

integrale completum per feriem infinitam exprimere, cuius termini per poteftates ipfius z defcendendo progrediantur.

Solutio.

§. 14. Quaerimus igitur pro valore litterae s feriem, cuius finguli termini fint poteftates ipfius z, quarum exponentes continuo decrefcant. Ex ipfa autem aequationis propofitae forma facile concludere licet, iftos exponentes continuo binario diminui debere, propterea quod in hac aequatione variabilis z cum fuo differentiali ∂z in fingulis terminis vel nullam, vel duas habet dimenfiones; vnde fi primus terminus contineat poteftatem z^λ, fequentes termini poteftates $z^{\lambda-2}$; $z^{\lambda-4}$; $z^{\lambda-6}$; etc. continebunt, ita vt feries, quam quaerimus, talem fit habitura formam:

$$s = Az^\lambda - Bz^{\lambda-2} + Cz^{\lambda-4} - Dz^{\lambda-6} + Ez^{\lambda-8} - Fz^{\lambda-10} + \text{etc.}$$

vbi ergo totum negotium huc redit, vt valores fingulorum coëfficientium rite determinemus.

§. 15. Ante omnia autem hic inueftigari oportet primum exponentem λ, a quo haec feries fit incipienda, qui ita comparatus effe debet, vt facta fubftitutione coëfficientes primi termini fponte fe deftruant. Ad iftum exponentem inueniendum fufficiet tantum duos terminos prio-

res

res conſideraſſe, ſcilicet $s = A z^\lambda - B z^{\lambda-2}$, quae ſubſtitutio quo facilius fieri queat, ipſam aequationem propoſitam, per ∂z^2 diuidendo, ita referamus:

$$\frac{\partial\partial s}{\partial z^2} - \frac{z z \partial\partial s}{\partial z^2} - \frac{z \partial s}{\partial z} + n n s = 0,$$

et cum iam ſit

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \lambda A z^{\lambda-1} - (\lambda - 2) B z^{\lambda-3} \text{ et}$$

$$\frac{\partial\partial s}{\partial z^2} = \lambda(\lambda-1) A z^{\lambda-2} - (\lambda-2)(\lambda-3) B z^{\lambda-4},$$

facta ſubſtitutione fieri debebit:

$$\left.\begin{array}{lll} -\lambda(\lambda-1)Az^\lambda & +\lambda(\lambda-1)Az^{\lambda-2} & \\ -\lambda Az^\lambda & +(\lambda-2)(\lambda-3)Bz^{\lambda-2} & \\ +nnAz^\lambda & +(\lambda-2)Bz^{\lambda-2} & \\ & -nnBz^{\lambda-2} & \end{array}\right\} = 0.$$

Hic ergo ante omnia coëfficiens primi termini $A z^\lambda$ nihilo aequalis ſtatui debet, ſicque fiet $-\lambda(\lambda-1) - \lambda + n n = 0$, ideoque $\lambda\lambda = n n$, vnde duo valores pro λ obtinentur, ſcilicet vel $\lambda = +n$ vel $\lambda = -n$.

§. 16. Quoniam igitur pro λ geminum nacti ſumus valorem, hinc pro quantitate s duas eruemus ſeries infinitas, quae iunctim ſumtae valorem integralem completum expriment, namque verus iſte valor ita exhibebitur:

$$s = \left\{\begin{array}{l} A z^n - B z^{n-2} + C z^{n-4} - D z^{n-6} + E z^{n-8} - \text{etc.} \\ + \mathfrak{A} z^{-n} - \mathfrak{B} z^{-n-2} + \mathfrak{C} z^{-n-4} - \mathfrak{D} z^{-n-6} + \mathfrak{E} z^{-n-8} - \text{etc.} \end{array}\right.$$

et quoniam facta ſubſtitutione pro vtraque ſerie coëfficientes primorum terminorum $A z^n$ et $\mathfrak{A} z^{-n}$ ſponte ſe tollunt, binae litterae A et $\mathfrak{A}$ non determinabuntur, ſed penitus arbitrio noſtro relinquentur, ideoque vicem gerent binarum conſtantium, quae per duplicem integrationem ingredi ſunt cenſendae.

dae. Euidens porro eſt vtramque hanc ſeriem ſeorſim inueſtigari poſſe; vnde ſolutio noſtra duabus conſtabit partibus

I. Inueſtigatio ſeriei prioris

$$s = Az^n - Bz^{n-2} + Cz^{n-4} - Dz^{n-6} + Ez^{n-8} - \text{etc.}$$

§. 17. Quo commodius huius ſeriei coëfficientes determinemus, aequationem propoſitam mutatis ſignis ita repraeſentemus:

$$\frac{zz\partial\partial s}{\partial z^2} - \frac{\partial\partial s}{\partial z^2} + \frac{z\partial s}{\partial z} - nns = 0,$$

et cum ſit

$$\frac{\partial s}{\partial z} = nAz^{n-1} - (n-2)Bz^{n-3} + (n-4)Cz^{n-5} - (n-6)Dz^{n-7} \text{ etc.}$$

et

$$\frac{\partial\partial s}{\partial z^2} = n(n-1)Az^{n-2} - (n-2)(n-3)Bz^{n-4} + (n-4)(n-5)Cz^{n-6} \text{etc.}$$

ordinetur ſubſtitutio ſequenti modo:

$$\frac{zz\partial\partial s}{\partial z^2} = n(n-1)Az^n - (n-2)(n-3)Bz^{n-2} + (n-4)(n-5)Cz^{n-4} \text{ etc.}$$
$$-\frac{\partial\partial s}{\partial z^2} = \quad -(n)(n-1)Az^{n-2} + (n-2)(n-3)Bz^{n-4} \text{ etc.}$$
$$+\frac{z\partial s}{\partial z} = \quad nAz^n - (n-2)Bz^{n-2} + (n-4)Cz^{n-4} \text{ etc.}$$
$$-nns = -nnAz^n + nnBz^{n-2} - nnCz^{n-4} \text{ etc.}$$

$$0 = \left\{\begin{array}{l} -(n-2)^2Bz^{n-2} + (n-4)^2Cz^{n-4} - (n-6)^2Dz^{n-6} \\ +nnB - nnC + nnD \\ -n(n-1)A + (n-2)(n-3)B - (n-4)(n-5)C \end{array}\right\} \text{etc.}$$

§. 18. Nunc igitur quemlibet coëfficientem per ſuum antecedentem ſatis concinne determinare licebit; erit enim

$$B = \frac{n(n-1)A}{2\cdot 2(n-1)} = \frac{nA}{4};$$

$$C = \frac{(n-2)(n-3)B}{nn-(n-4)^2} = \frac{(n-2)(n-3)B}{4\cdot 2(n-2)} = \frac{(n-3)B}{8};$$

$$D =$$

$$D = \frac{(n-4)(n-5)C}{nn-(n-6)^2} = \frac{(n-4)(n-5)C}{12(n-3)};$$
$$E = \frac{(n-6)(n-7)D}{nn-(n-8)^2} = \frac{(n-6)(n-7)D}{16(n-4)};$$
$$F = \frac{(n-8)(n-9)E}{20(n-5)} \text{ etc.}$$

etc.

Hinc igitur omnes coëfficientes per primum A ſequenti modo determinantur:

$$B = \tfrac{n}{4}A;$$
$$C = \frac{n(n-3)}{4.8}A;$$
$$D = \frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}A;$$
$$E = \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4.8.12.16}A;$$
$$F = \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{4.8.12.16.20}A; \text{ etc.}$$

ſicque prior ſeries valorem ipſius s exhibens erit:

$$s = A\left(z^n - \tfrac{n}{4}z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{4.8}z^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}z^{n-6} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4.8.12.16}z^{n-8} - \text{etc.}\right)$$

II. Inueſtigatio ſeriei poſterioris.

$$\mathfrak{A}z^{-n} - \mathfrak{B}z^{-n-2} + \mathfrak{C}z^{-n-4} - \mathfrak{D}z^{-n-6} + \mathfrak{E}z^{-n-8} - \mathfrak{F}z^{-n-10} + \text{etc.}$$

§. 19. Determinatio coëfficientium huius ſeriei ſimili prorſus modo inſtitui poteſt, quo praecedentem elicuimus, neque tamen opus eſt omnes operationes hic repetere; nam quia totum diſcrimen harum duarum ſerierum in ſolo ſigno numeri n conſiſtit, quo ipſa aequatio propoſita non afficitur, ſingularum litterarum Germanicarum valores immediate ex Latinis deriuare licebit, ſi modo in iis loco n ſcribatur $-n$, ſicque obtinebimus:

$$\mathfrak{B} = -\tfrac{n}{4}\mathfrak{A};$$
$$\mathfrak{C} = +\frac{n(n+3)}{4.8}\mathfrak{A};$$
$$\mathfrak{D} = -\frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}\mathfrak{A};$$

$$\mathfrak{E} = +\frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4.8.12.16}\mathfrak{A};$$
$$\mathfrak{F} = -\frac{n(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)}{4.8.12.16.20}\mathfrak{A}; \text{ etc.}$$

§. 20. Ex his ergo valor integralis completus quantitatis s ex duabus sequentibus seriebus infinitis componetur:

$$s = \begin{cases} A\left(z^n - \frac{n}{4}z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{4.8}z^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}z^{n-6} + \text{etc.}\right) \\ +\mathfrak{A}\left(z^{-n} + \frac{n}{4}z^{-n-2} + \frac{n(n+3)}{4.8}z^{-n-4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}z^{-n-6} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

Problema 3.

Quoniam valorem completum ipsius s duplici modo expressum inuenimus, alterum scilicet per duplicem integrationem in problemate 1. alterum per duas series infinitas in problemate 2. constantes arbitrarias ita determinare, vt duae illae expressiones inter se consentiant.

Solutio.

§. 21. In problemate primo binas constantes arbitrarias per litteras f et g designauimus, vbi inuenimus hunc valorem:

$$s = f\left(z + \sqrt{[zz-1]}\right)^n + g\left(z + \sqrt{[zz-1]}\right)^{-n},$$

in praecedente vero problemate per binas series infinitas inuenimus esse:

$$s = \begin{cases} A\left(z^n - \frac{n}{4}z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{4.8}z^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}z^{n-6} + \text{etc.}\right) \\ +\mathfrak{A}\left(z^{-n} + \frac{n}{4}z^{-n-2} + \frac{n(n+3)}{4.8}z^{-n-4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}z^{-n-6} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

vbi binae constantes arbitrariae in litteris A et $\mathfrak{A}$ continentur. Quaeritur ergo, quomodo has litteras A et $\mathfrak{A}$ per f et g definiri oporteat, vt hae duae expressiones inter se consentientes reddantur?

§. 22. Perpetuo autem, quoties de constantibus arbitrariis definiendis quaestio mouetur, ad casum quempiam specialem est respiciendum, quo valor per seriem expressus euadat cognitus, quandoquidem, si constantes vnico casui spe-

ſpeciali ſatisfaciunt, eorum valor rite erit determinatus. Hanc ob rem diſpiciamus, an non quispiam caſus ſpecialis detur, quo bini valores innoteſcant. Conſideremus igitur primam formam finitam, ac manifeſtum quidem eſt, ibi caſum $z = 0$ in hunc finem adhiberi non poſſe, propterea quod iſte valor ad imaginaria rediret. Deinde vero etiam binae ſeries, poſito $z = c$, partim terminis euaneſcentibus, partim infinitis conſtabunt; ſicque ex hoc caſu nihil plane concludi poteſt.

§. 23. Caſus autem $z = 1$ aliquid polliceri videtur; tum enim prior forma finita praebebit $s = f + g$; at vero poſito $z = 1$ ambae ſeries nihilo minus in infinitum excurrunt, ita vt earum valores nobis neutiquam euadant cogniti; quamobrem eiusmodi caſu nobis erit opus, quo binae ſeries inuentae definant in infinitum excurrere, et omnes termini prae primis quaſi euaneſcant, ita vt terminos tantum primos conſideraſſe ſufficiat. Manifeſtum autem eſt in vtraque ſerie prae primo termino ſequentes omnes eſſe euanituros, ſi ipſi z valor infinite magnus tribuatur. Statuamus igitur $z = \infty$, atque ex binis ſeriebus valor ipſius s pro hoc caſu erit $s = A\,\omega^n + \frac{\mathfrak{A}}{\omega^n}$.

§. 24. Faciamus igitur etiam in priori forma finita $z = \omega$, et cum hoc caſu ſit $\sqrt{(z\,z - 1)} = \omega$, valor ipſius s hinc orietur:

$$s = f(2\,\omega)^n + g(2\,\omega)^{-n} = 2^n f\,\omega^n + \frac{g}{2^n\,\omega^n};$$

quam ergo expreſſionem cum ante inuenta, quae erat $A\,\omega^n + \frac{\mathfrak{A}}{\omega^n}$, congruere oportet, atque manifeſto ſequitur, hoc fieri, ſi ſtatuamus $A = 2^n f$ et $\mathfrak{A} = \frac{g}{2^n}$.

§. 25. Quodſi igitur valor completus finitus fuerit

$$s = f(z + \sqrt{[zz - 1]})^n + g(z + \sqrt{[zz - 1]})^{-n},$$

idem valor per duas ſequentes ſeries iunctim ſumtas exprimetur:

$$s = \begin{cases} f[(2z)^n - \frac{n}{1}(2z)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}(2z)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2z)^{n-6}\text{etc.}] \\ +g\left[\frac{1}{(2z)^n} + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{(2z)^{n+2}} + \frac{n(n+3)}{1.2}\cdot\frac{1}{(2z)^{n+4}} + \text{etc.}\right] \end{cases}$$

Problema 4.

Si z denotet coſinum cuiuspiam anguli Φ, vt ſit $z = \cos.\Phi$, inueſtigare ſeries pro coſinu anguli ncupli $n\Phi$.

Solutio.

§. 26. Supra vidimus, ſi fuerit $z = \cos.\Phi$, ac vocetur $\cos. n\Phi = s$, tum relationem inter s et z per eam ipſam aequationem differentio-differentialem exprimi, quam hactenus tractauimus (vid. §. 9.). Neceſſe igitur eſt vt valor quaeſitus $\cos. n\Phi$ in ſuperioribus expreſſionibus, tam in finita, quam in infinita contineatur, totumque negotium huc redit, vt binae conſtantes f et g rite pro hoc caſu definiantur. At vero pro expreſſione finita, ob $z = \cos.\Phi$ et $\sqrt{(zz-1)} = \sqrt{-1}\sin.\Phi$ habebimus

$$s = f(\cos.\Phi + \sqrt{-1}\sin.\Phi)^n + g(\cos.\Phi + \sqrt{-1}\sin.\Phi)^{-n}.$$

Conſtat autem eſſe

$$(\cos.\Phi + \sqrt{-1}\sin.\Phi)^n = \cos. n\Phi + \sqrt{-1}\sin.\Phi \text{ et}$$

$$(\cos.\Phi + \sqrt{-1}\sin.\Phi)^{-n} = \cos. n\Phi - \sqrt{-1}\sin. n\Phi,$$

ſicque habebimus

$$s = (f+g)\cos. n\Phi + (f-g)\sqrt{-1}\sin. n\Phi,$$

quamobrem, vt prodeat $s = \cos. n\Phi$, ſtatui oportet $f = g = \frac{1}{2}$.

§. 27.

§. 27. Nunc igitur cognitis binis litteris f et g, quibus euadit $s = \text{cof. } n\Phi$, etiam ambas illas ſeries infinitas exhibere poterimus, quibus coniunctis idem valor cof. $n\Phi$ exprimatur. Scilicet cum ſit $f = g = \frac{1}{2}$; multiplicemus vtrinque per 2, atque impetrabimus:

$$2\,\text{cof. } n\Phi = \left\{ \begin{array}{l} (2z)^n - \frac{n}{1}.(2z)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}.(2z)^{n-4} - \text{etc.} \\ + \frac{1}{(2z)^n} + \frac{n}{1}.\frac{1}{(2z)^{n+2}} + \frac{n(n+3)}{1.2}.\frac{1}{(2z)^{n+4}} + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

vbi eſt $z = \text{cof. } \Phi$. Hinc ſi, vti initio fecimus, vocemus $x = 2\,\text{cof. } \Phi$, vt ſit $2z = x$, vera expreſſio pro cof. $n\Phi$ erit:

$$2\,\text{cof. } n\Phi = \left\{ \begin{array}{l} x^n - \frac{n}{1}.x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}.x^{n-4} - \text{etc.} \\ + \frac{1}{x^n} + \frac{n}{1}.\frac{1}{x^{n+2}} + \frac{n(n+3)}{1.2}.\frac{1}{x^{n+4}} + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

§. 58. Omnes igitur defectus, quos ſupra circa formulam pro cof. $n\Phi$ tradi ſolitam recenſuimus, inde originem traxere, quod poſterior ſeries, quae poteſtates ipſius x in denominatoribus exhibet, neglegi ſolet: ea autem adiecta perpetuo pulcherrimus conſenſus cum veritate deprehendetur, quoscunque etiam numeros pro n, ſiue poſitiuos, ſiue negatiuos, ſiue integros ſiue fractos accipiamus. Ita ſi ponamus $n = 0$, hinc ſtatim conſequimur $2\,\text{cof. } 0\Phi = 2$. Deinde cum ſit cof. $-n\Phi = \text{cof. } n\Phi$, haec conuenientia ſtatim ex praeſente forma elucet, quippe quae eadem manet, etiamſi loco n ſcribatur $-n$.

§. 29. Examinemus nunc etiam aliquot caſus ſimpliciores, ac primo quidem ſumamus $n = 1$ reperieturque:

$$2\,\text{cof.}\,\Phi = \left\{\begin{matrix} x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^5} - \frac{5}{x^7} - \frac{14}{x^9} - \frac{42}{x^{11}} - \text{etc.} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^5} + \frac{5}{x^7} + \frac{14}{x^9} + \frac{42}{x^{11}} + \text{etc.} \end{matrix}\right\} = x,$$

vbi ſeries poſterior manifeſto terminos ſuperfluos prioris tollit, ita vt prodeat $2\,\text{cof.}\,\Phi = x$. Ponamus etiam $n = 2$ ac reperiemus:

$$2\,\text{cof.}\,2\Phi = \left\{\begin{matrix} xx - 2 - \frac{1}{xx} - \frac{2}{x^4} - \frac{5}{x^6} - \frac{14}{x^8} - \frac{42}{x^{10}} - \text{etc.} \\ \frac{1}{xx} + \frac{2}{x^4} + \frac{5}{x^6} + \frac{14}{x^8} + \frac{42}{x^{10}} + \text{etc.} \end{matrix}\right\} = xx - 2.$$

Sit etiam $n = 3$ ac reperiemus

$$2\,\text{cof.}\,3\Phi = \left\{\begin{matrix} x^3 - 3x + \frac{0}{x} - \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^5} - \frac{9}{x^7} - \frac{28}{x^9} - \text{etc.} \\ + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5} + \frac{9}{x^7} + \frac{28}{x^9} + \text{etc.} \end{matrix}\right\} = x^3 - 3x.$$

§. 30. Ex his exemplis ſatis manifeſtum eſt quoties numerus n fuerit integer poſitiuus, tum omnes terminos, quos ſupra tanquam inutiles reiicere iuſſimus, hic ſponte per ſeriem poſteriorem auferri. Praeterea vero hic nullum dubium ſupereſſe poteſt, quin etiam pro omnibus numeris fractis loco n aſſumtis veritas ſit proditura. Sit enim $n = \frac{1}{2}$ ac fiet:

$$2\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\Phi = \left\{\begin{matrix} \sqrt{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{5}{8x^3\sqrt{x}} - \frac{21}{16x^5\sqrt{x}} - \text{etc.} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2xx\sqrt{x}} + \frac{7}{8x^4\sqrt{x}} + \text{etc.} \end{matrix}\right\},$$

hae duae autem ſeries permixtae eam ipſam ſeriem producunt, quam ſupra §. 5. indicauimus.

Theorema.

Quoties n eſt numerus integer poſitiuus, tum omnes termini fracti prioris ſeriei a ſerie poſteriore deſtruuntur, ita vt tantum remaneant termini integri prioris ſeriei, quibus adeo valor ipſius $2\,\text{cof.}\,n\Phi$ exprimetur.

De-

Demonſtratio.

§. 31. Contemplemur accuratius priorem ſeriem a termino x^n incipientem, in qua cum ſigna $+$ et $-$ alternentur, ne hinc ſequens ratiocinium turbetur, hanc ſeriem hoc modo repraeſentemus:

$$x^n - \frac{n}{1} x^{n-2} - \frac{n(3-n)}{1.2} x^{n-4} - \frac{n(4-n)(5-n)}{1.2.3} x^{n-6} - \text{etc.}$$

Nunc autem breuitatis gratia ſingulos hos coëfficientes ſequentibus characteribus deſignemus:

$$x^n - [n-2]x^{n-2} - [n-4]x^{n-4} - [n-6]x^{n-6} - [n-8]x^{n-8} - \text{etc.}$$

ſicque erit

$$[n-2] = \frac{n}{1};$$
$$[n-4] = \frac{n(3-n)}{1.2};$$
$$[n-6] = \frac{n(4-n)(5-n)}{1.2.3};$$
$$[n-8] = \frac{n(5-n)(6-n)(7-n)}{1.2.3.4};$$
$$[n-10] = \frac{n(6-n)(7-n)(8-n)(9-n)}{1.2.3.4.5}; \text{ etc.}$$

§. 32. Hinc ergo in genere, ſi poteſtatis x^{n-2i} coëfficientem per $-[n-2i]$ deſignemus, erit

$$[n-2i] = \frac{n(i+1-n)(i+2-n)(i+3-n)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.} \cdot \cdots \cdot \frac{(2i-1-n)}{i}.$$

Scilicet iſta forma compoſita erit ex i factoribus, quorum primus ſemper eſt $\frac{n}{1}$; ſecundus $\frac{i+1-n}{2}$; tertius $= \frac{i+2-n}{3}$; quartus $= \frac{i+3-n}{4}$, donec perueniatur ad vltimum, qui eſt $\frac{2i-1-n}{i}$; vnde patet factorem quemlibet intermedium indici λ reſpondentem fore $\frac{i+\lambda-1-n}{\lambda}$, ſi modo fuerit $\lambda < i$; tum vero ſumto $\lambda = i$ prodibit factor vltimus $\frac{2i-1-n}{i}$. Hoc ergo modo pro qualibet poteſtate x^{n-2i}, eius coëfficientem, quem per $[n-2i]$ deſignamus, facile exhibere licebit. Ita poteſtatis x^{n-20} coëfficiens erit

$$[n-20] = \frac{n(11-n)(12-n)(13-n)(14-n)(15-n)(16-n)(17-n)(18-n)(19-n)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.\quad 7.\quad 8.\quad 9.\quad 10},$$

vnde

vnde patet, quoties n fuerit numerus integer, ſiue 11, ſiue 12, ſiue 13, vsque ad 19, iſtum coëfficientem ſemper fore $= 0$, atque hoc adeo in genere eueniet, quando n fuerit numerus integer, vel $i+1$, vel $i+2$, vel $i+3$, vsque ad $2i-1$.

§. 33. Sumamus nunc $i = n$, quae poſitio ergo locum habere nequit, niſi n ſit numerus integer, quandoquidem manifeſtum eſt loco i alios numeros praeter integros accipi non poſſe. Hoc igitur modo obtinebitur coëfficiens poteſtatis x^{-n}, quem deſignamus per $-[-n]$, eritque:

$$[-n] = \frac{n.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5 \cdot \ldots \cdot n-1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5 \ldots \ldots n},$$

cuius expreſſionis valor manifeſto eſt $= 1$, ita vt terminus hinc natus ſit $-1.x^{-n} = -\frac{1}{x^n}$, qui terminus primum in fractis occurrit. Si enim capiatur $i < n$, vt tamen ſit $n-2i$ numerus negatiuus, coëfficientes, vt ſupra vidimus, erunt $= 0$, namque ſumto $i = n-1$, iam factor ſecundus euaneſcit; ſumto autem $i = n-2$, tertius euaneſcit; quartus deinde ſi $i = n-3$ et ita porro, ſicque omnes termini hunc praecedentes erunt integri.

§. 34. Quaeramus nunc etiam terminos hunc: $-\frac{1}{x^n}$ ſequentes, ac pro ſecundo erit $i = n+1$, vnde poteſtatis x^{-n-2} coëfficiens erit

$$-\frac{n.\ 2.\ 3.\ 4,\ 5 \cdot \ldots \cdot n+1}{1.\ 2.\ 3.\ 4. \ldots \ldots n+1} = n,$$

ita vt poteſtatum negatiuarum ſecunda ſit $-\frac{n}{x^{n+2}}$. Simili modo pro tertio termino ſit $i = n+2$, et poteſtatis x^{-n-4} coëfficiens erit

$$-\frac{n.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6 \cdot \ldots \cdot n+3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5 \ldots \ldots n+2} = -\frac{n(n+3)}{1.\ 2.}.$$

Sit

Sit nunc $i = n+3$, ac potestatis x^{-n-6} coëfficiens erit

$$-\frac{n.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7\ .\ .\ .\ .\ (n+5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ .\ .\ .\ .\ (n+3)} = -\frac{n(n+4)(n+5)}{1.\ 2.\ 3}.$$

Eodem modo euidens est potestatis x^{-n-8} coëfficientem fore

$$-\frac{n.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8\ .\ .\ .\ .\ (n+7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ .\ .\ .\ .\ (n+4)} = -\frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.$$

§. 35. Ex his igitur manifestum est terminos fractos, ad quos prima series perducit, fore

$$-\frac{1}{x^n} - \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{x^{n+2}} - \frac{n(n+3)}{1.\ 2}\cdot\frac{1}{x^{n+4}} - \frac{n(n+4)(n+5)}{1.\ 2.\ 3}\cdot\frac{1}{x^{n+6}} - \text{etc.}$$

Cum igitur altera series pro $2\cos. n\Phi$ adiicienda sit

$$\frac{1}{x^n} + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{x^{n+2}} + \frac{n(n+3)}{1.\ 2}\cdot\frac{1}{x^{n+4}} + \frac{n(n+4)(n+5)}{1.\ 2.\ 3}\cdot\frac{1}{x^{n+6}} + \text{etc.}$$

nunc firmiter a nobis est euictum, omnes terminos fractos prioris seriei per seriem posteriorem penitus tolli, ita vt ex serie priore termini tantum integri relinquantur, quibus valor ipsius $2\cos. n\Phi$ exprimatur. Ex ipsa autem demonstratione apparet, hanc destructionem locum habere non posse, nisi exponens n fuerit numerus integer. Pro exponentibus igitur fractis ambas illas series in infinitum continuari oportet, quippe quae iunctim sumtae demum valorem pro $2\cos. n\Phi$ exhibebunt; sicque omnia sunt perspicua, quae initio circa necessarias restrictiones formulae pro cosinibus datae sunt tradita.

§. 36. Hic autem imprimis notasse iuuabit, valorem vtriusque seriei seorsim sumtae reuera esse imaginarium. Vidimus enim priorem seriem natam esse ex euolutione formulae $[z+\sqrt{(zz-1)}]^n$, posteriorem vero ex euolutione huius: $[z-\sqrt{(zz-1)}]^n$, posito $z = \cos. \Phi$; tum autem prior formula transformatur in hanc: $\cos. n\Phi + \sqrt{-1}\ \text{sin.}\ n\Phi$, po-

ſterior vero in hanc: cof. $n\Phi - \sqrt{-1}$ ſin. $n\Phi$, quarum vtraque manifeſto eſt imaginaria, earum tamen ſumma praebet 2 cof. $n\Phi$; ſin autem poſteriorem a priore auferamus, relinquetur $2\sqrt{-1}$ ſin. $n\Phi$, cui formulae ergo aequaretur differentia noſtrarum ſerierum; vnde patet ſinum anguli multipli $n\Phi$ hoc modo per ſeries realiter exprimi non poſſe, cui incommodo autem remedium afferemus in ſequente problemate.

Problema 5.

Propoſita aequatione differentio-differentiali

$$\partial\partial s(zz-1) + z\,\partial z\,\partial s - n\,n\,s\,\partial z^2 = 0,$$

ſi ponatur $s = v\sqrt{(zz-1)}$, *valorem huius quantitatis* v *per ſeriem exprimere.*

Solutio.

§. 37. Quod ad expreſſionem finitam huius quantitatis v attinet, ea ſponte patet ex valore finito pro ipſa quantitate s inuento, cum ſit

$$v\sqrt{(zz-1)} = f[z+\sqrt{(zz-1)}]^n + g[z-\sqrt{(zz-1)}]^n.$$

Nunc autem nobis propoſitum eſt valorem ipſius v per eiusmodi ſeriem inueſtigare, cuius termini etiam per poteſtates ipſius z pariter deſcendentes progrediantur, quam ergo ſeriem ex ipſa aequatione propoſita deduci oportet, poſtquam ſcilicet loco s valor $v\sqrt{(zz-1)}$ fuerit introductus.

§. 38. Quo autem hanc ſubſtitutionem facilius facere queamus, ſumamus logarithmos $ls = lv + \frac{1}{2}l(zz-1)$, vnde differentiando nanciſcimur $\frac{\partial s}{s} = \frac{\partial v}{v} + \frac{z\,\partial z}{zz-1}$, quae aequatio denuo differentiata praebet:

$$\frac{s\,\partial\partial s - \partial s^2}{ss} = \frac{\partial\partial v}{v} - \frac{\partial v^2}{vv} + \frac{\partial z^2}{zz-1} - \frac{2\,z\,z\,\partial z^2}{(zz-1)^2}.$$

Iam

Iam addatur vtrinque

$$\frac{\partial s^2}{ss} = \frac{\partial v^2}{vv} + \frac{2z\partial z\partial v}{v(zz-1)} + \frac{zz\partial z^2}{(zz-1)^2},$$

atque obtinebimus

$$\frac{\partial\partial s}{s} = \frac{\partial\partial v}{v} + \frac{\partial z^2}{zz-1} - \frac{zz\partial z^2}{(zz-1)^2} + \frac{2z\partial z\partial v}{v(zz-1)}, \text{ siue}$$

$$\frac{\partial\partial s}{s} = \frac{\partial\partial v}{v} + \frac{2z\partial z\partial v}{v(zz-1)} - \frac{\partial z^2}{(zz-1)^2}.$$

§. 39. Aequatio autem propoſita per s diuiſa fit

$$\frac{\partial\partial s}{s}(zz-1) + \frac{z\partial z\partial s}{s} - nn\partial z^2 = 0,$$

eaque facta ſubſtitutione induet ſequentem formam:

$$\frac{\partial\partial v}{v}(zz-1) + \frac{3z\partial z\partial v}{v} - (nn-1)\partial z^2 = 0,$$

quae ducta in $\frac{v}{\partial z^2}$ dabit

$$\frac{\partial\partial v}{\partial z^2}(zz-1) + \frac{3z\partial v}{\partial z} - v(nn-1) = 0,$$

atque ex hac aequatione ſeriem deſideratam pro v elici oportebit.

§. 40. Hic igitur iterum ante omnia primum terminum inueſtigare debemus, quem in finem ſtatuamus

$$v = Az^\lambda + Bz^{\lambda-2} + Cz^{\lambda-4} \text{ etc.}$$

et cum ſit

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \lambda Az^{\lambda-1} + (\lambda-2)Bz^{\lambda-3} \text{ etc.}$$

$$\frac{\partial\partial v}{\partial z^2} = \lambda(\lambda-1)Az^{\lambda-2} + (\lambda-2)(\lambda-3)Bz^{\lambda-4} + \text{etc.}$$

facta ſubſtitutione orietur ſequens aequalitas:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \lambda(\lambda-1)Az^\lambda + (\lambda-2)(\lambda-3)Bz^{\lambda-2} + \text{etc.} \\ & - \lambda(\lambda-1)Az^{\lambda-2} - \text{etc.} \\ & 3\lambda Az^\lambda + 3(\lambda-2)Bz^{\lambda-2} + \text{etc.} \\ & -(nn-1)Az^\lambda - (nn-1)Bz^{\lambda-2} - \text{etc.} \end{aligned}$$

Vt nunc prima poteſtas z^λ ſponte tollatur, neceſſe eſt vt

ſit $\lambda(\lambda-1)+3\lambda-nn+1=0$, ſiue $(\lambda+1)^2-nn=0$; hincque duo valores pro λ reperiuntur: $\lambda=-n-1$ et $\lambda=n-1$; vnde ſequitur pro valore completo ipſius v exprimendo requiri duas ſeries infinitas, quas ſequenti modo referamus:

$$v=\begin{cases} Az^{n-1}-Bz^{n-3}+Cz^{n-5}-Dz^{n-7}+Ez^{n-9}-\text{etc.} \\ +\mathfrak{A}z^{-n-1}-\mathfrak{B}z^{-n-3}+\mathfrak{C}z^{-n-5}-\mathfrak{D}z^{-n-7}+\mathfrak{E}z^{-n-9}-\text{etc.} \end{cases}$$

quarum autem ſufficiet priorem determinaſſe, quoniam poſterior inde naſcitur, ſcribendo $-n$ loco n; quamobrem habebimus vt ſequitur:

$$v=Az^{n-1}-Bz^{n-3}+Cz^{n-5}-Dz^{n-7}+Ez^{n-9}-\text{etc.}$$
$$\frac{\partial v}{\partial z}=(n-1)Az^{n-2}-(n-3)Bz^{n-4}+(n-5)Cz^{n-6}-\text{etc.}$$
$$\frac{\partial\partial v}{\partial z^2}=(n-1)(n-2)Az^{n-3}-(n-3)(n-4)Bz^{n-5}+\text{etc.}$$

§. 41. Fiat nunc ſubſtitutio in ſingulis terminis noſtrae aequationis ſequenti modo:

	z^{n-1}	z^{n-3}	z^{n-5}	
$\frac{zz\partial\partial v}{\partial z^2}=$	$(n-1)(n-2)A-$	$(n-3)(n-4)B+$	$(n-5)(n-6)C-$	etc.
$-\frac{\partial\partial v}{\partial z^2}=$		$-(n-1)(n-2)A+$	$(n-3)(n-4)B-$	etc.
$\frac{3z\partial v}{\partial z}=+$	$3(n-1)A-$	$3(n-3)B+$	$3(n-5)C-$	etc.
$nnv=-$	$nnA+$	$nnB-$	$nnC+$	etc.
$+v=+$	$A-$	$B+$	$C-$	etc.
$0=$	$0A+$	$4(n-1)B-$	$8(n-2)C+$	etc.
		$-(n-1)(n-2)A+$	$(n-3)(n-4)B-$	etc.

§. 42. Cum nunc ſingularum poteſtatum coëfficientes ſe deſtruere debeant, per primum A, qui arbitrio noſtro relinquitur, ſequentes omnes hoc modo determinabuntur:

B=

$$B = \frac{(n-2)}{4} A;$$

$$C = \frac{(n-3)(n-4)}{8(n-2)} B = \frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 8} A;$$

$$D = \frac{(n-5)(n-6)}{12(n-3)} C = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{4 \cdot 8 \cdot 12} A;$$

$$E = \frac{(n-7)(n-8)}{16(n-4)} D = \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} A;$$

etc.

ſicque prior ſeries pro quantitate v erit

$$A z^{n-1} - \frac{(n-2)}{4} A z^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 8} A z^{n-5} - \text{etc.}$$

§. 43. Ex hac autem ſerie altera ſponte eruitur, ſi modo loco A ſcribamus $\mathfrak{A}$ et $-n$ loco n, vnde valor completus ipſius v binis ſequentibus ſeriebus exprimetur:

$$v = \begin{cases} A\left(z^{n-1} - \frac{(n-2)}{4} z^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 8} z^{n-5} - \text{etc.}\right) \\ + \mathfrak{A}\left(z^{-n-1} + \frac{(n+2)}{4} z^{-n-3} + \frac{(n+3)(n+4)}{4 \cdot 8} z^{-n-5} + \text{etc.}\right) \end{cases}.$$

§. 44. Nunc autem ſupereſt, vt iſtam formam per ſeries inuentam cum forma finita

$v\sqrt{(zz-1)} = f[z+\sqrt{(zz-1)}]^n + g[z+\sqrt{(zz-1)}]^{-n}$, concordem reddamus, quem in finem tribuamus ipſi z valorem infinite magnum, quandoquidem hoc modo in binis ſeriebus prae terminis primis omnes ſequentes euaneſcunt, ita vt hinc ſit $v = A z^{n-1} + \mathfrak{A} z^{-n-1}$; at vero ex forma finita, ob $\sqrt{(zz-1)} = z$, erit $vz = f(2z)^n + g(2z)^{-n}$, ideoque $v = 2^n f z^{n-1} + \frac{g}{2^n z^{n+1}}$, qua forma cum illa comparata euidens eſt ſumi debere $A = 2^n f$ et $\mathfrak{A} = \frac{g}{2^n}$.

Problema 6.

Propoſito angulo quocunque Φ *inuenire formam generalem pro ſinibus angulorum quorumuis multiplorum.*

Solutio.

§. 45. Statuatur vt ante $z = \text{cof.}\,\Phi$, eritque $\sqrt{(zz-1)} = +\sqrt{-1}\,\text{fin.}\,\Phi$, hincque porro

$$[z+\sqrt{(zz-1)}]^n = \text{cof.}\,n\Phi + \sqrt{-1}\,\text{fin.}\,n\Phi \text{ et}$$
$$[z-\sqrt{(zz-1)}]^n = \text{cof.}\,n\Phi - \sqrt{-1}\,\text{fin.}\,n\Phi.$$

Nunc igitur ex forma finita habebimus

$$s = v\sqrt{-1}\,\text{fin.}\,\Phi = f(\text{cof.}\,n\Phi + \sqrt{-1}\,\text{fin.}\,n\Phi) + g(\text{cof.}\,n\Phi - \sqrt{-1}\,\text{fin.}\,n\Phi).$$

Faciamus iam $f = 1$ et $g = -1$, ac prodibit

$$s = v\sqrt{-1}\,\text{fin.}\,\Phi = 2\sqrt{-1}\,\text{fin.}\,n\Phi,$$

ſicque erit $2\,\text{fin.}\,n\Phi = v\,\text{fin.}\,\Phi$.

§. 46. Cum nunc ſit $f = 1$ et $g = -1$, erit $A = 2^n$ et $\mathfrak{A} = -\frac{1}{2^n}$, vnde pro v binas ſequentes ſeries nanciſcimur:

$$v = \begin{cases} 2(2z)^{n-1} - \frac{2(n-2)}{1}(2z)^{n-3} + \frac{2(n-3)(n-4)}{1.\ 2}(2z)^{n-5} - \text{etc.} \\ -2(2z)^{-n-1} + \frac{2(n+2)}{1}(2z)^{-n-3} - \frac{2(n+3)(n+4)}{1.\ 2}(2z)^{-n-5} + \text{etc.} \end{cases}.$$

Ponamus nunc, vt ſupra fecimus, $x = 2\,\text{cof.}\,\Phi$, vt $2z = x$, tum vero inſuper $y = 2\,\text{fin.}\,\Phi$, et quoniam inuenimus $2\,\text{fin.}\,n\Phi = v\,\text{fin.}\,\Phi = \frac{1}{2}vy$, tantum opus eſt ſeries ſuperiores pro v inventas per $\frac{1}{2}y$ multiplicare, hocque modo ſequentem expreſſionem generalem pro ſinibus angulorum multiplorum obtinebimus:

2 ſin.

$$2\sin.n\Phi = \left\{\begin{array}{l} y[x^{n-1} - \frac{(n-2)}{1}x^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}x^{n-5} - \text{etc.}] \\ -y[x^{-n-1} + \frac{(n+2)}{1}x^{-n-3} + \frac{(n+3)(n+4)}{1.2}x^{-n-5} + \text{etc.}] \end{array}\right\},$$

haecque expreſſio veritati erit conſentanea, quicunque valores litterae n tribuantur, ſiue poſitiui ſiue negatiui, ſiue integri ſiue fracti; vnde patet formulam initio datam hoc defectu laborare, quod ibi ſeries poſterior eſt omiſſa. Primo autem ſtatim patet, ſi $n = 0$, vtique prodire $2\sin. n\Phi = 0$, propterea quod ſinguli termini binarum ſerierum ſe mutuo tollunt; deinde etiam clarum eſt, pro numeris negatiuis n ſinus etiam negatiuos prodire.

§. 47. Euoluamus nunc etiam aliquot caſus pro numeris integris, ac primo quidem ſit $n = 1$, eritque

$$2\sin.\Phi = \left\{\begin{array}{l} y(1 + \frac{1}{xx} + \frac{3}{x^4} + \frac{10}{x^6} + \frac{35}{x^8} + \text{etc.}) \\ -y\quad (\frac{1}{xx} + \frac{3}{x^4} + \frac{10}{x^6} + \frac{35}{x^8} + \text{etc.}) \end{array}\right\},$$

ſicque binis ſeriebus iunctis fiet $2\sin.\Phi = y$. Sit nunc $n = 2$, eritque

$$2\sin.2\Phi = \left\{\begin{array}{l} y(x - 0 + \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^5} + \frac{15}{x^7} + \frac{35}{x^9} + \text{etc.}) \\ -y\quad (\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^5} + \frac{15}{x^7} + \frac{35}{x^9} + \text{etc.}) \end{array}\right\}.$$

Sit nunc etiam $n = 3$, eritque

$$2\sin.3\Phi = \left\{\begin{array}{l} y(xx - 1 + 0 + \frac{1}{x^4} + \frac{5}{x^6} + \frac{21}{x^8} + \frac{84}{x^{10}} + \text{etc.}) \\ -y\quad (\frac{1}{x^4} + \frac{5}{x^6} + \frac{21}{x^8} + \frac{84}{x^{10}} + \text{etc.}) \end{array}\right\},$$

ideoque $2\sin. 3\Phi = y(xx - 1)$. Ponatur etiam $n = 4$; eritque

$$2\sin.4\Phi = \left\{\begin{array}{l} y(x^3 - 2x + 0 + 0 + \frac{1}{x^5} + \frac{6}{x^7} + \frac{28}{x^9} + \text{etc.}) \\ -y\quad (\frac{1}{x^5} + \frac{6}{x^7} + \frac{28}{x^9} + \text{etc.}) \end{array}\right\},$$

ideoque $2\sin. 4\Phi = y(x^3 - 2x)$.

§. 48.

§. 48. Ex his exemplis iam ſatis elucet, poſteriorem ſeriem in priori omnes terminos fractos deſtruere, ita vt ſufficiat ex priore ſerie ſolos terminos integros ſumſiſſe, quoties ſcilicet numerus n fuerit integer; hocque adeo facile in genere ſimili modo demonſtrari poſſet, quo vſi ſumus pro coſinibus, ſuperfluumque foret ſimilem demonſtrationem hic adornare. Caeterum in hac euolutione ſingulare phaenomenon ſe exerit, quod non parum ſuſpectum videri queat, in eo conſiſtens, quod ad conſenſum ſerierum infinitarum cum valore integrali finito ſtabiliendum, vſi ſumus caſu quo $z = \infty$, quae poſitio inſtituto noſtro, quo loco z coſinum anguli aſſumimus, maxime aduerſatur. Verum ſi perpendamus iſtum conſenſum in genere eſſe conſtitutum, fine vllo reſpectu habito ad applicationem angulorum, omnia dubia ſponte euaneſcere debent, imprimis cum iam pleniſſimus conſenſus cum veritate luculanter eluceſcat.

DE

DE
INSIGNIBVS PROPRIETATIBVS
FORMVLARVM INTEGRALIVM
PRAETER BINAS VARIABILES ETIAM EARVM DIFFERENTIALIA CVIVSCVNQVE ORDINIS INVOLVENTIVM.

Auctore
L. EVLERO.

Conuentui exhibit. die 10 Mart. 1777.

§. 1.

Si Z fuerit functio quaecunque, non ſolum binas variabiles x et y, ſed etiam earum differentialia cuiuscunque ordinis inuoluens, ea ſaltem a ſpecie differentialium liberari poteſt ope ſequentium poſitionum: $\partial y = p\partial x$; $\partial p = q\partial x$; $\partial q = r\partial x$; $\partial r = s\partial x$; $\partial s = t\partial x$; etc. tum enim his valoribus ſubſtitutis quantitas Z, ſi fuerit finita, euadet functio quantitatum finitarum x, y, p, q, r, s, t, etc. Ita ſi fuerit

$$Z = \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x\,\partial\partial y - \partial y\,\partial\partial x},$$

quae eſt formula notiſſima pro radio oſculi, ob $\partial y = p\,\partial x$ et $\partial\partial y = p\,\partial\partial x + \partial p\,\partial x = p\,\partial\partial x + q\,\partial x^2$, primo nu-

merator hanc induet formam: $\partial x^3 (1 + p\,p)^{\frac{3}{2}}$, deinde vero denominator euadet $= q\,\partial x^3$, ficque iſta quantitas erit

$$Z = \frac{(1 + p\,p)^{\frac{3}{2}}}{q}.$$

§. 2. Quodſi nunc talis functio Z differentietur, eius differentiale ex tot conſtabit partibus, quot in ea inſunt litterarum x, y, p, q, r, s, etc., ideoque tali forma exprimetur:

$$\partial Z = M\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \text{etc.}$$

Hic autem, ne multitudo litterarum M, N, P, Q, R, etc. in calculo moleſtiam creet, eas, quoniam omnes pendent a natura functionis Z, per ſequentes characteres vſu iam ſatis receptos repraeſentabo: $M = (\frac{\partial Z}{\partial x})$; $N = (\frac{\partial Z}{\partial y})$; $P = (\frac{\partial Z}{\partial p})$; $Q = (\frac{\partial Z}{\partial q})$; $R = (\frac{\partial Z}{\partial r})$; $S = (\frac{\partial Z}{\partial s})$; etc. hocque modo, nullas litteras peregrinas introducendo, erit

$$\partial Z = \partial x (\tfrac{\partial Z}{\partial x}) + \partial y (\tfrac{\partial Z}{\partial y}) + \partial p (\tfrac{\partial Z}{\partial p}) + \partial q (\tfrac{\partial Z}{\partial q}) + \text{etc.}$$

ac ſi porro loco differentialium ∂y, ∂p, ∂q, ∂r, etc. valores ſupra aſſignatos adhibeamus, prodibit

$$\partial Z = \partial x (\tfrac{\partial Z}{\partial x}) + p\,\partial x (\tfrac{\partial Z}{\partial y}) + q\,\partial x (\tfrac{\partial Z}{\partial p}) + r\,\partial x (\tfrac{\partial Z}{\partial q}) + \text{etc.}$$

§. 3. Hinc ergo ſi ſtatuamus:

$$V = (\tfrac{\partial Z}{\partial x}) + p (\tfrac{\partial Z}{\partial y}) + q (\tfrac{\partial Z}{\partial p}) + r (\tfrac{\partial Z}{\partial q}) + \text{etc.}$$

quae erit quantitas finita, pariterque certa functio ipſarum x, y, p, q, r, etc. ab indole functionis Z pendens, erit $\partial Z = V\,\partial x$, ideoque integrando $Z = \int V\,\partial x$, in qua integratione omnes litterae x, y, p, q, r, etc. tanquam variabiles inſunt. Vbi probe notetur, ſi V fuerit talis functio,

ctio, qualem deſcripſimus, tum formulam differentialem $V\partial x$ ſemper integrationem admittere, etiamſi binae variabiles x et y nullo modo a ſe inuicem pendeant, cum contra, ſi loco V alia quaecunque functio quantitatum x, y, p, q, r, etc. acciperetur, integratio locum habere non poſſet, niſi certa quaedam relatio inter binas variabiles x et y ſtatueretur.

§. 4. His conſtitutis cum ſit

$$V = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right) + r\left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right) + \text{etc.}$$

perpendamus valores differentiales ipſius V, qui oriuntur, ſi vel ſola quantitas x, vel ſola y, vel ſola p, vel ſola q, etc. pro variabili habeatur, quos valores ſimili ratione per hos characteres: $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$; $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$; $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)$; $\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)$; etc. deſignemus. Ac primo quidem ſi ſola quantitas x vt variabilis tractetur, iisdem characteribus adhibendis reperietur:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x^2}\right) + p\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y\,\partial x}\right) + q\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial x}\right) + r\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial q\,\partial x}\right) + s\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial r\,\partial x}\right) + \text{etc.}$$

vbi ſcilicet, vti iam ſatis eſt vſu receptum, formula $\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x^2}\right)$ indicat, functionem Z bis differentiandam eſſe, ſola x pro variabili aſſumta; at formula $\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial y}\right)$ indicat, functionem Z etiam bis ita eſſe differentiandam, vt in altera differentiatione ſola quantitas x, in altera vero ſola y variabilis ſumatur. Demonſtratum autem eſt eundem valorem prodire, ſiue in prima operatione x, in ſecunda vero y, ſiue inuerſo modo, in prima y in altera vero x variabilis ſtatuatur; quod idem etiam de reliquis formulis duplicem differentiationem innuentibus eſt tenendum.

§. 5. Si iam in hac poſtrema expreſſione valorem $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ littera T deſignemus, hinc fiet $\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial x}$; tum ve-

ro $\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial y}\right) = \frac{\partial T}{\partial y}$; $\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial p}\right) = \frac{\partial T}{\partial p}$; etc. hisque formulis introductis erit

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + r\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) + \text{etc.}$$

At vero si quantitas ista T per variabilitatem omnium litterarum x, y, p, q, r, etc. differentietur, erit, vt supra iam vidimus, eius differentiale plenum:

$$\partial T = \partial x\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + p\,\partial x\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) + q\,\partial x\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + r\,\partial x\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) + \text{etc.}$$

vnde patet fore $\partial T = \partial x\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, ita vt integrando fit

$$T = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \int \partial x\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right).$$

Hinc discimus, si formula $V\,\partial x$ integrationem admittat, semper etiam hanc formulam: $\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, integrationem esse admissuram; quam proprietatem hoc Theoremate 1. referamus.

Si fuerit $\int V\,\partial x = Z$, *tum etiam semper erit*

$$\int \partial x\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right), \textit{ siue}$$

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \partial.\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right).$$

§. 6. Nunc quantitatis V id considerabimus differentiale, quod ex sola variabili y enascitur, ac reperietur:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial y}\right) + p\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y^2}\right) + q\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial y}\right) + r\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial q\,\partial y}\right) + \text{etc.}$$

vnde si hic ponamus $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = T$, erit

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + r\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) + \text{etc.}$$

hinc igitur vt supra patet fore

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \partial T = \partial.\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$

ex quo integrando erit

$\int \partial x$

$$\int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = T = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$

vnde deducitur ſequens Theorema 2.

Si fuerit $\int V \partial x = Z$, *tum ſemper erit*

$$\int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right), \text{ ſiue}$$

$$\partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \partial . \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right).$$

§. 7. Progrediamur autem vlterius, et differentiale ipſius V, ex ſola variabilitate ipſius p oriundum, contemplemur, ac reperiemus

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial x \partial p}\right) + p\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y \partial p}\right) + q\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial p^2}\right) + r\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial q \partial p}\right) + \text{etc.} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

Hinc iam ſi ponamus $\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right) = T$, erit

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + r\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) + \text{etc.} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$

vnde ergo ſequitur fore

$$\partial x \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) = \partial T + \partial x \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$

quod nobis ſuppeditat iſtud Theorema 3.

Si fuerit $\int V \partial x = Z$, *tum etiam ſemper erit*

$$\int \partial x \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right) + \int \partial x \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right), \text{ ſiue}$$

$$\partial x \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) - \partial x \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \partial . \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right).$$

§. 8. Sumta nunc ſola quantitate q pro variabili ſimili modo orietur

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) = \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial x \partial q}\right) + p\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y \partial q}\right) + q\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial p \partial q}\right) + r\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial q^2}\right) + \text{etc.} + \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)$$

vnde ſi hic ponatur $\left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right) = T$, erit

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + r\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) + \text{etc.} + \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right).$$

ſicque per ∂x multiplicando fiet

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) = \partial T + \partial x\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right).$$

Hinc orietur iſtud Theorema quartum:

Si fuerit $\int V \partial x = Z$, *tum ſemper erit*

$$\int \partial x\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) = \left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right) + \int \partial x\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right), \text{ ſiue}$$

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) - \partial x\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right) = \partial.\left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right).$$

§. 9. Sumatur iam ſola quantitas r pro variabili ac prodibit

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial x \partial r}\right) + p\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y \partial r}\right) + q\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial p \partial r}\right) + r\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial q \partial r}\right) + \text{etc.} + \left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right),$$

vnde ſi ponatur $\left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right) = T$, erit

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + r\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) + \text{etc.} + \left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right).$$

Hinc igitur vt ſupra patet fore

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \partial T + \partial x\left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right),$$

ſicque orietur ſequens Theorema quintum:

Si fuerit $\int V \partial x = Z$, *tum etiam ſemper erit*

$$\int \partial x\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right) + \int \partial x\left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right), \text{ ſiue}$$

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) - \partial x\left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right) = \partial.\left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right).$$

§. 10. Haec iam ita ſunt manifeſta, vt ſuperfluum foret iſta theoremata vlterius proſequi. Ante autem quam repetitas differentiationes proſequamur, haec theoremata nobis

bis inſeruire poſſunt, ad criterium illud generale demonſtrandum, quo primus oſtendi formulam $\int V \partial x$ ſemper admittere integrationem, quoties fuerit:

$$0 = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{1}{\partial x}\partial.\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) + \frac{1}{\partial x^2}\partial\partial.\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) - \frac{1}{\partial x^3}\partial^3.\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\partial x^4}\partial^4.\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right) - \text{etc.}$$

§. 11. Ad hanc autem regulam demonſtrandam, poſito $\int V \partial x = Z$, per gradus progrediamur, prouti functio Z continuo plures continet litterarum x, y, p, q, r, etc. Ac primo quidem contineat functio Z tantum binas variabiles x et y, excluſis omnibus differentialibus, ita vt ſit

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right) = 0;\ \left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right) = 0;\ \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right) = V, \text{ etc.}$$

Hinc iam ex theoremate tertio erit $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$, theorema autem ſecundum nobis praebet $\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \partial.\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$. Cum igitur inde ſit $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)$, hoc valore ſubſtituto fiet

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \partial.\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right),$$

ideoque per ∂x diuidendo orietur haec aequatio:

$$0 = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{1}{\partial x}\partial.\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right),$$

prorſus vt criterium meum poſtulat. Quoniam enim ex Z litterae p, q, r, etc. excluduntur, ob $\partial Z = V \partial x$ functio V neque litteram q, neque r, neque s, etc. continere poteſt, vnde etiam formulae $\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)$; $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)$; etc. euaneſcunt.

§. 12. Contineat nunc functio Z, praeter litteras x et y, etiam p, vnde ob $\partial Z = V \partial x$ et $\partial p = q \partial x$, quantitas V etiamnunc q inuoluet, ſequentes vero litterae r, s, t, etc. excludentur. Cum igitur iam ſit $\left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right) = 0$ multoque magis $\left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right) = 0$; $\left(\frac{\partial Z}{\partial s}\right) = 0$; etc. theorema quartum nobis

nobis praebebit:

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) - \partial x\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right) = 0;$$

vnde fit $\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)$, qui valor in tertio theoremate ſubſtitutus dat

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) - \partial x\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \partial.\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right),$$

vnde ergo erit

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) - \frac{1}{\partial x}\partial.\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right),$$

qui valor in theoremate ſecundo ſubſtitutus praebet:

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \partial.\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) - \frac{1}{\partial x}\partial\partial.\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right),$$

vnde ſequitur, prorſus vt noſtrum criterium poſtulat,

$$0 = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{1}{\partial x}\partial.\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) + \frac{1}{\partial x^2}\partial\partial.\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right).$$

§. 13. Inuoluat nunc functio Z etiam litteram q, et quantitas V etiamnunc continebit litteram r, ob $\partial q = r\partial x$: ſequentes vero inde excludentur. Cum igitur ſit $\left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right) = 0$, theorema quintum nobis praebet

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) - \partial x\left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right) = 0,$$

vnde fit $\left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)$, qui valor in theoremate quarto ſubſtitutus ſuppeditat hanc aequationem:

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) - \partial x\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right) = \partial.\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right),$$

vnde colligitur:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) - \frac{1}{\partial x}\partial.\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right).$$

Subſtituatur hic valor in theoremate tertio, fietque

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) - \partial x\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \partial.\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) - \frac{1}{\partial x}\partial\partial.\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right),$$

vnde fit

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) - \frac{1}{\partial x}\partial.\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) + \frac{1}{\partial x^2}\partial^2.\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right),$$

qui

qui valor in ſecundo theoremate ſubſtitutus praebet hanc aequationem:

$$0 = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{1}{\partial x}\partial.\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) + \frac{1}{\partial x^2}\partial\partial.\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) - \frac{1}{\partial x^3}\partial^3.\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right).$$

§. 14. Hoc igitur modo criterium ſupra memoratum, quod primum ex contemplatione maximorum et minimorum, via maxime indirecta, concluſeram, omni rigore eſt demonſtratum; atque haec demonſtratio non multum diſcrepat ab ea, quam ſagaciſſimus noſter Profeſſor Lexell exhibuit, (Novor. Commentar. Acad. Scientiar. Petropol. Tomo XV. pag. 127). Nunc igitur formulas differentiales ſupra ex functione Z deductas per vlteriores differentiationes euoluamus, quandoquidem hinc innumerabilia alia theoremata, iis quae dedimus ſimilia, deriuari poſſunt.

Euolutio formulae

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x^2}\right) + p\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y\,\partial x}\right) + q\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial x}\right) + r\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial q\,\partial x}\right) + \text{etc.}$$

per vlteriorem differentiationem.

§. 15. Sumamus primo ſolam x pro variabili, ac facta differentiatione prodibit

$$\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial x^3}\right) + p\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y\,\partial x^2}\right) + q\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial p\,\partial x^2}\right) + r\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial q\,\partial x^2}\right) + \text{etc.}$$

vbi ſi ſtatuamus $\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x^2}\right) = T$, erit

$$\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + r\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) + \text{etc.}$$

vnde manifeſto erit

$$\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x^2}\right) = \partial T = \partial.\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x^2}\right),$$

atque hinc naſcitur ſequens theorema:

Si fuerit $\int V\,\partial x = Z$, *tum ſemper erit*

$$\int\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x^2}\right), \text{ ſiue } \partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x^2}\right) = \partial.\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x^2}\right).$$

§. 16. Sumatur nunc pro eadem formula ſola y pro variabili, ac reperietur

$$\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x\,\partial y}\right)=\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y\,\partial x^2}\right)+p\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y^2\,\partial x}\right)+q\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial p\,\partial x\,\partial y}\right)+r\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial q\,\partial x\,\partial y}\right)+\text{etc.}$$

vbi ſi ſtatuamus $\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial y}\right)=T$, erit

$$\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x\,\partial y}\right)=\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)+r\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)+\text{etc.}$$

vnde manifeſto erit

$$\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x\,\partial y}\right)=\partial T=\partial.\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial y}\right),$$

ficque adepti ſumus ſequens theorema:

Si fuerit $\int V\partial x=Z$, *tum ſemper erit*

$$\int\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x\,\partial y}\right)=\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial y}\right),\ \textit{ſiue}\ \partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x\,\partial y}\right)=\partial.\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial y}\right).$$

§. 17. At ſi ſola p variabilis capiatur, tum erit

$$\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x\,\partial p}\right)=\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial x^2\,\partial p}\right)+p\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial x\,\partial y\,\partial p}\right)+q\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial x\,\partial p^2}\right)+r\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial q\,\partial x\,\partial p}\right)+\text{etc.}$$
$$+\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial y}\right).$$

Hinc ergo ſi ponatur $\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial p}\right)=T$, erit

$$\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x\,\partial p}\right)=\partial T+\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial y}\right),$$

hincque formatur ſequens theorema:

Si fuerit $\int V\partial x=Z$, *tum ſemper erit*

$$\int\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x\,\partial p}\right)=\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial p}\right)+\int\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial y}\right),\ \textit{ſiue}$$
$$\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x\,\partial p}\right)-\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial y}\right)=\partial.\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial p}\right).$$

§. 18. Sit nunc ſola littera q variabilis, eritque

$$\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x\,\partial q}\right)=\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial x^2\,\partial q}\right)+p\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial x\,\partial y\,\partial q}\right)+q\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial x\,\partial p\,\partial q}\right)+r\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial x\,\partial q^2}\right)+\text{etc.}$$
$$+\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial x}\right)$$

hinc ergo ſi ponatur $\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial q}\right)=T$, erit

$$\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x\,\partial q}\right)=\partial T+\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial x}\right),$$

hincque formatur ſequens theorema:

Si

Si fuerit $\int V \partial x = Z$, *tum ſemper erit*

$$\int \partial x \left(\frac{\partial \partial V}{\partial x \partial q}\right) = \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial x \partial q}\right) + \int \partial x \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial p \partial x}\right), \text{ ſiue}$$

$$\partial x \left(\frac{\partial \partial V}{\partial x \partial q}\right) - \partial x \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial p \partial x}\right) = \partial . \frac{\partial \partial Z}{\partial x \partial q}.$$

Euolutio formulae

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial x \partial y}\right) + p\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y^2}\right) + q\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial p \partial y}\right) + r\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial q \partial y}\right) + \text{etc.}$$

per vlteriorem differentiationem.

§. 19. Hanc euolutionem iam multo concinnius abſoluere licebit. Cum enim forma propoſita ita repraeſentari poſſit, vt ſit $\partial x \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \partial . \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$, ſingulas differentiationes in hac forma inſtituere poterimus. Ita ſi ſola x variabilis ſumatur, erit $\partial x \left(\frac{\partial \partial V}{\partial x \partial y}\right) = \partial . \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial x \partial y}\right)$, quod iam eſt theorema 5. praecedentis euolutionis. Simili modo ſi ſola y variabilis ſumatur, prodibit $\partial x \left(\frac{\partial \partial V}{\partial y^2}\right) = \partial . \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y^2}\right)$, quod eſt nouum theorema ad hanc euolutionem pertinens, vnde fit $\int \partial x \left(\frac{\partial \partial V}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y^2}\right)$. Hinc patet ſi fuerit $\int V \partial x = Z$, tum ſemper fore $\int \partial x \left(\frac{\partial \partial V}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y^2}\right)$. At ſi ſola p variabilis accipiatur, tum quadam circumſpectione opus eſt, quoniam hoc caſu non erit $\partial x \left(\frac{\partial \partial V}{\partial y \partial p}\right) = \partial . \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial x \partial y \partial p}\right)$, ſed inſuper aliquod membrum accedet. Quoniam enim formula $\partial . \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$ euoluta continet partem $p \partial x \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y^2}\right)$, huius differentiatio praebet $\partial x \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y^2}\right)$, quod ergo inſuper adiici oportet, ita vt ſit

$$\partial x \left(\frac{\partial \partial V}{\partial y \partial p}\right) = \partial . \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y \partial p}\right) + \partial x \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y^2}\right),$$

conſequenter ſumtis integralibus erit

$$\int \partial x \left(\frac{\partial \partial V}{\partial y \partial p}\right) = \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y \partial p}\right) + \int \partial x \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y^2}\right),$$

ſicque integratio formulae $\int \partial x \left(\frac{\partial \partial V}{\partial y \partial p}\right)$ inſuper inuoluit formulam integralem $\int \partial x \left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y^2}\right)$.

§. 20. Sumatur nunc ſola q pro variabili, et quia formula $\partial.(\frac{\partial z}{\partial y})$ continet terminum $q\,\partial x(\frac{\partial z}{\partial y\partial p})$, variabilitas ipſius q producet terminum $\partial x(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial p})$, ſicque orietur iſta aequatio:

$$\partial x(\tfrac{\partial\partial V}{\partial y\partial q}) = \partial.(\tfrac{\partial\partial z}{\partial y\partial q}) + \partial x(\tfrac{\partial\partial z}{\partial y\partial p}).$$

Eodem modo patet ſi ſola littera r variabilis accipiatur, tum fore

$$\partial x(\tfrac{\partial\partial V}{\partial y\partial r}) = \partial.(\tfrac{\partial\partial z}{\partial y\partial r}) + \partial x(\tfrac{\partial\partial z}{\partial y\partial q}).$$

Ac ſi ſola s variabilis accipiatur, tum erit

$$\partial x(\tfrac{\partial\partial V}{\partial y\partial s}) = \partial.(\tfrac{\partial\partial z}{\partial y\partial s}) + \partial x(\tfrac{\partial\partial z}{\partial y\partial r}),$$

ſicque porro

Euolutio formulae

$$(\tfrac{\partial V}{\partial p}) = (\tfrac{\partial\partial z}{\partial x\partial p}) + p(\tfrac{\partial\partial z}{\partial y\partial p}) + q(\tfrac{\partial\partial z}{\partial p^2}) + r(\tfrac{\partial\partial z}{\partial q\partial p}) + \text{etc.} + (\tfrac{\partial z}{\partial y})$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\partial x(\tfrac{\partial V}{\partial p}) = \partial.(\tfrac{\partial z}{\partial p}) + \partial x(\tfrac{\partial z}{\partial y}).$$

§. 21. Quodſi hic vel ſola x vel ſola y variabilis accipiatur, haec forma ſimpliciter differentiata ad quaeſitum perducit: priori ſcilicet caſu prodit

$$\partial x(\tfrac{\partial\partial V}{\partial x\partial p}) = \partial.(\tfrac{\partial\partial z}{\partial x\partial p}) + \partial x(\tfrac{\partial\partial z}{\partial x\partial y});$$

poſteriore vero erit

$$\partial x(\tfrac{\partial\partial V}{\partial y\partial p}) = \partial.(\tfrac{\partial\partial z}{\partial y\partial p}) + \partial x(\tfrac{\partial\partial z}{\partial y^2}),$$

haecque duae formulae iam ante prodierunt.

§. 22. Sin autem littera p variabilis ſtatuatur, quoniam formula $\partial.(\frac{\partial z}{\partial p})$ continet partem $p\,\partial x(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial p})$, huius differentiatio praebet $\partial x(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial p})$, quod ergo ad differentialia, ex reliquis membris oriunda, inſuper addi debet; hoc ergo modo prodibit iſta aequalitas:

∂x

$$\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial p^2}\right) = \partial.\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p^2}\right) + 2\,\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y\,\partial p}\right),$$

vnde intelligitur ob ∂p^2, quod in prima formula occurrit, poſtremum terminum duplicari debere. Theorematibus autem hinc deducendis non immoramur, quandoquidem deinceps theoremata multo generaliora producere licebit.

§. 23. Sumamus nunc ſolam q variabilem, et quoniam in formula $\partial.\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)$ euoluta occurrit terminus $q\,\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p^2}\right)$, ex hoc per differentiationem naſcitur terminus $\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p^2}\right)$. Hinc ergo facta tota differentiatione perueniemus ad hanc aequationem:

$$\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial p\,\partial q}\right) = \partial.\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial q}\right) + \partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y\,\partial q}\right) + \partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p^2}\right),$$

vbi patet, ob bina elementa ∂p et ∂q, inſuper duos terminos adiici oportere, id quod etiam eueniet, ſi ſola r pro variabili ſumatur; nam quia formula $\partial.\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)$ continet terminum $r\,\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial q}\right)$, ex hoc per differentiationem prodibit $\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial q}\right)$, quem ad reliquas partes inſuper adiici oportet; hocque modo impetrabimus hanc aequationem:

$$\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial p\,\partial r}\right) = \partial.\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial r}\right) + \partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y\,\partial r}\right) + \partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial q}\right),$$

vbi iterum ob elementa ∂p et ∂r duo membra acceſſerunt.

Euolutio formulae

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) = \left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial q}\right) + p\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y\,\partial q}\right) + q\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial q}\right) + r\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial q^2}\right) + \text{etc.} + \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right),$$

quae reducta eſt ad hanc:

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) = \partial.\left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right) + \partial x\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right).$$

§. 24. Si hic vel x vel y ſolum variabile capiatur, nihil in differentiatione de nouo accedit, eritque caſu priore

$$\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial x\,\partial q}\right) = \partial.\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial q}\right) + \partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\,\partial p}\right),$$

posteriore vero casu

$$\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial y\,\partial q}\right) = \partial.\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y\,\partial q}\right) + \partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y\,\partial p}\right).$$

In reliquis autem differentiationibus elementum ∂p suppeditat, praeter differentiationem solitam, insuper membrum $\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y\,\partial q}\right)$, at vero elementum ∂q producit $\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial q}\right)$; elementum porro ∂r producit $\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial q^2}\right)$, elementum ∂s vero praebet $\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial q\,\partial r}\right)$ etc. quibus obseruatis obtinebuntur sequentes aequationes:

I. $\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial p\,\partial q}\right) = \partial.\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial q}\right) + \partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p^2}\right) + \partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y\,\partial q}\right)$,

II. $\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial q^2}\right) = \partial.\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial q^2}\right) + 2\,\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial q}\right)$,

III. $\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial q\,\partial r}\right) = \partial.\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial q\,\partial r}\right) + \partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial r}\right) + \partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial q^2}\right)$,

IV. $\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial q\,\partial s}\right) = \partial.\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial q\,\partial s}\right) + \partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p\,\partial s}\right) + \partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial q\,\partial r}\right)$.

§. 25. Ex his iam abunde perspicitur, perpetuo, quoties vel sola x, vel sola y variabilis accipitur, differentiationem more consueto institui debere, nihilque insuper esse adiiciendum; sin autem reliquae litterae p, q, r, s, etc. variabiles accipiantur, tum pro quolibet elemento siue ∂p, siue ∂q, siue ∂r, etc. praeterea vnum nouum terminum accedere debere. Hinc igitur pro solis elementis ∂x et ∂y iam sequens theorema latissime patens constitui potest:

Theorema generale 1.

Si fuerit $\int V\,\partial x = Z$, *tum semper erit*

$$\int \partial x\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} V}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}}\right) = \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} Z}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}}\right).$$

Euo-

Euolutio harum formularum, ſi ſola p pro variabili accipiatur.

§. 26. Quemadmodum iam vidimus, cum ſit

$$\partial x\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) = \partial .\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right) + \partial x\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$

tum fore

$$\partial x\left(\frac{\partial\partial V}{\partial p^2}\right) = \partial .\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial p^2}\right) + 2\,\partial x\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y\,\partial p}\right),$$

ita ſi porro differentiemus, ex ſola variabilitate ipſius p prodibit:

I°. $\partial x\left(\frac{\partial^3 V}{\partial p^3}\right) = \partial .\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial p^3}\right) + 3\,\partial x\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y\,\partial p^2}\right),$

II°. $\partial x\left(\frac{\partial^4 V}{\partial p^4}\right) = \partial .\left(\frac{\partial^4 Z}{\partial p^4}\right) + 4\,\partial x\left(\frac{\partial^4 Z}{\partial y\,\partial p^3}\right),$

III°. $\partial x\left(\frac{\partial^5 V}{\partial p^5}\right) = \partial .\left(\frac{\partial^5 Z}{\partial p^5}\right) + 5\,\partial x\left(\frac{\partial^5 Z}{\partial y\,\partial p^4}\right),$

vnde generaliter habebimus

$$\partial x\left(\frac{\partial^\gamma V}{\partial p^\gamma}\right) = \partial .\left(\frac{\partial^\gamma Z}{\partial p^\gamma}\right) + \gamma\,\partial x\left(\frac{\partial^\gamma Z}{\partial y\,\partial p^{\gamma-1}}\right),$$

hincque deducimus ſequens

Theorema generale 2.

Si fuerit $\int V\,\partial x = Z$, *tum ſemper erit*

$$\int\partial x\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} V}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial p^\gamma}\right) = \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} Z}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial p^\gamma}\right) + \gamma\int\partial x\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} Z}{\partial x^\alpha\,\partial y^{\beta+1}\,\partial p^{\gamma-1}}\right).$$

§. 27. Quodſi iam vlterius quantitas Q pro variabili ſumatur, et differentiatio continuo repetatur, inueſtigationem ſequenti modo ſuſcipiamus. Quoniam elementa ∂x et ∂y nihil turbant, proficiſcamur a formula ſupra inuenta:

$$\partial x\left(\frac{\partial^\gamma V}{\partial p^\gamma}\right) = \partial .\left(\frac{\partial^\gamma Z}{\partial p^\gamma}\right) + \gamma\,\partial x\left(\frac{\partial^\gamma Z}{\partial y\,\partial p^{\gamma-1}}\right),$$

vnde

vnde variabilitas ſolius q primo dabit:

$$\partial x\left(\frac{\partial^{\gamma+1} V}{\partial p^{\gamma}\,\partial q}\right)=\partial\cdot\left(\frac{\partial^{\gamma+1} Z}{\partial p^{\gamma}\,\partial q}\right)+\gamma\,\partial x\left(\frac{\partial^{\gamma+1} Z}{\partial y\,\partial p^{\gamma-1}\,\partial q}\right)+\partial x\left(\frac{\partial^{\gamma+1} Z}{\partial p^{\gamma+1}}\right).$$

§. 28. Quodſi iam hanc formam vlterius ſecundum ∂q differentiemus, perueniemus ad hanc aequationem:

$$\partial x\left(\frac{\partial^{\gamma+2} V}{\partial p^{\gamma}\,\partial q^2}\right)=\partial\cdot\left(\frac{\partial^{\gamma+2} Z}{\partial p^{\gamma}\,\partial q^2}\right)+\gamma\,\partial x\left(\frac{\partial^{\gamma+2} Z}{\partial y\,\partial p^{\gamma-1}\,\partial q^2}\right)+2\,\partial x\left(\frac{\partial^{\gamma+2} Z}{\partial p^{\gamma+1}\,\partial q}\right),$$

et denuo differentiando prodibit:

$$\partial x\left(\frac{\partial^{\gamma+3} V}{\partial p^{\gamma}\,\partial q^3}\right)=\partial\cdot\left(\frac{\partial^{\gamma+3} Z}{\partial p^{\gamma}\,\partial q^3}\right)+\gamma\,\partial x\left(\frac{\partial^{\gamma+3} Z}{\partial y\,\partial p^{\gamma-1}\,\partial q^3}\right)+3\,\partial x\left(\frac{\partial^{\gamma+3} Z}{\partial p^{\gamma+1}\,\partial q^2}\right),$$

haecque ſufficiunt ad conſtituendum ſequens

Theorema generale 3.

Si fuerit $\int V\,\partial x = Z$, *tum ſemper erit:*

$$\int\partial x\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} V}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}\,\partial p^{\gamma}\,\partial q^{\delta}}\right)=\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} Z}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}\,\partial p^{\gamma}\,\partial q^{\delta}}\right)+\gamma\int\partial x\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} Z}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta+1}\,\partial p^{\gamma-1}\,\partial q^{\delta}}\right)+\delta\int\partial x\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} Z}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}\,\partial p^{\gamma+1}\,\partial q^{\delta-1}}\right).$$

§. 29.

§. 29. Iam pluribus ambagibus opus non erit ad sequens theorema generaliſſimum conſtituendum:

Theorema generaliſſimum.

Si fuerit $\int V \partial x = Z$, *tum ſemper erit*

$$\int \partial x \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} V}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \partial p^{\gamma} \partial q^{\delta} \partial r^{\varepsilon} \partial s^{\zeta}}\right) = \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \partial p^{\gamma} \partial q^{\delta} \partial r^{\varepsilon} \partial s^{\zeta}}\right)$$
$$+ \gamma \int \partial x \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta+1} \partial p^{\gamma-1} \partial q^{\delta} \partial r^{\varepsilon} \partial s^{\zeta}}\right)$$
$$+ \delta \int \partial x \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \partial p^{\gamma+1} \partial q^{\delta-1} \partial r^{\varepsilon} \partial s^{\zeta}}\right)$$
$$+ \varepsilon \int \partial x \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \partial p^{\gamma} \partial q^{\delta+1} \partial r^{\varepsilon-1} \partial s^{\zeta}}\right)$$
$$+ \zeta \int \partial x \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \partial p^{\gamma} \partial q^{\delta} \partial r^{\varepsilon+1} \partial s^{\zeta-1}}\right).$$

SPECIMEN INTEGRATIONIS ABSTRVSISSIMAE HAC FORMVLA

$$\int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2xx-1)}}$$

CONTENTAE.

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 26 Mart. 1777.

§. 1.

Quamquam haec formula non adeo complicata videtur, tamen non dubito asseuerare, vix quemquam fore, qui, postquam omni cura et sagacitate eius resolutionem fuerit aggressus, tandem non agnoscere debeat, se oleum et operam perdidisse. Facile quidem foret istam formulam a signo radicali biquadratico liberare, ponendo $2xx = \frac{(tt+1)^2}{(tt-1)^2}$, vnde fieret $\sqrt[4]{(2xx-1)} = \sqrt{\frac{2t}{tt-1}}$; tum autem foret $x = \frac{tt+1}{(tt-1)\sqrt{2}}$, ideoque $\partial x = -\frac{2t\partial t\sqrt{2}}{(tt-1)^2}$ et

$$1+x = \frac{tt(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}}{(tt-1)\sqrt{2}},$$

quibus substitutis formula proposita abit in hanc:

$$-\frac{2\partial t}{(1+\sqrt{2})tt+1-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2t}{tt-1}}.$$

Haec

Haec formula autem ita eſt comparata, vt dubitem, eius integrale vllo alio modo erui poſſe, niſi per praecedentem formam regrediendo, atque omnes operationes inſtituendo, quas hic ſum expoſiturus, quae tandem, praeter omnem expectationem, ad integrale per logarithmos et arcus circulares expreſſum perducent.

§. 2. Praecipua ſubſtitutio, qua via ad reſolutionem ſternetur, in hoc conſiſtit, vt ponam $x = \frac{yy-3}{4}$; tum enim erit $2xx = \frac{y^4-6yy+9}{8}$, vnde fit

$$2xx - 1 = \frac{y^4+6yy+1}{8};$$

deinde vero erit $1+x = \frac{yy+1}{4}$, hincque $\frac{\partial x}{1+x} = \frac{2y\partial y}{yy+1}$. Quamobrem ſi ipſam formulam propoſitam per V deſignemus, erit facta hac ſubſtitutione

$$V = 2^{\frac{7}{4}} \int \frac{y\partial y}{(yy+1)\sqrt[4]{(y^4-6yy+1)}}.$$

§. 3. Verum ne haec formula tractari poteſt, niſi per imaginaria tranſeundo; poni enim oportet $y = z\sqrt{-1}$, vt oriatur iſta forma:

$$V = -2^{\frac{7}{4}} \int \frac{z\partial z}{(1-zz)\sqrt[4]{(z^4+6zz+1)}},$$

quam iam ſingulari illa methodo, cuius aliquot ſpecimina non ita pridem dedi, tractare licebit. Pono igitur br. gr. $\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)} = v$, vt formula reſoluenda ſit

$$\int \frac{z\partial z}{v(1-zz)} = Z,$$

indeque porro $V = -2^{\frac{7}{4}} Z$, ad quam formulam reſoluendam

introduco duas nouas variabiles p et q, ſtatuendo $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$, vnde ſtatim fit

$$p^4 + q^4 = \frac{2 + 12zz + 2z^4}{v^4} = 2.$$

§. 4. Praeterea vero ex binis formulis aſſumtis erit primo $p + q = \frac{2}{v}$ et $p - q = \frac{2z}{v}$, vnde colligitur $z = \frac{p-q}{p+q}$, hinc differentiando erit $\partial z = \frac{2(q\partial p - p\partial q)}{(p+q)^2}$, vbi loco $p + q$ ſcribamus valorem $\frac{2}{v}$, fietque

$$\partial z = \tfrac{1}{2} v v (q\partial p - p\partial q);$$

porro vero habebimus $1 - zz = pqvv$. His valoribus ſubſtitutis erit

$$Z = \tfrac{1}{2}\int \frac{(p-q)(q\partial p - p\partial q)}{pqv(p+q)},$$

quae formula, poſito loco v valore $\frac{2}{p+q}$, abit in hanc:

$$Z = \tfrac{1}{4}\int \frac{(p-q)(q\partial p - p\partial q)}{pq} = \tfrac{1}{4}\int (p-q)\left(\frac{\partial p}{p} - \frac{\partial q}{q}\right).$$

§. 5. Facta ergo euolutione habebimus:

$$4\partial Z = \partial p + \partial q - \frac{q\partial p}{p} - \frac{p\partial q}{q}.$$

Cum autem ſit $p^4 + q^4 = 2$, erit $p^4 = 2 - q^4$ et hinc $\frac{\partial p}{p} = -\frac{q^3\partial q}{2-q^4}$, ſimilique modo $\frac{\partial q}{q} = -\frac{p^3\partial p}{2-p^4}$; hincque colligitur:

$$-\frac{q\partial p}{p} = \frac{q^4\partial q}{2-q^4} \text{ et } -\frac{p\partial q}{q} = \frac{p^4\partial p}{2-p^4},$$

quocirca nanciſcimur

$$4\partial Z = \frac{2\partial p}{2-p^4} + \frac{2\partial q}{2-q^4},$$

ſicque pertigimus ad binas formulas differentiales, in quibus binae variabiles p et q a ſe inuicem ſunt ſeparatae, conſequenter pro Z habebimus ſequentem expreſſionem:

$$Z = \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial p}{2-p^4} + \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial q}{2-q^4},$$

vnde

vnde iam manifeſtum eſt valorem Z per logarithmos et arcus circulares exprimi poſſe.

§. 6. Ponamus enim $p = r\sqrt[4]{2}$, vt fiat

$$\frac{\partial p}{2 - p^4} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{\partial r}{1 - r^4}.$$

Conſtat autem eſſe

$$\int \frac{\partial r}{1 - r^4} = \tfrac{1}{4} l \tfrac{1 + r}{1 - r} + \tfrac{1}{2} \text{A tang. } r,$$

hincque adeo erit

$$\int \frac{\partial p}{2 - p^4} = \frac{1}{4 \cdot 2^{\frac{3}{4}}} l \frac{\sqrt[4]{2} + p}{\sqrt[4]{2} - p} + \frac{1}{2 \cdot 2^{\frac{3}{4}}} \text{A tang. } \frac{p}{\sqrt[4]{2}};$$

quod cum ſimili modo ſe habeat cum altera parte $\int \frac{\partial q}{2 - q^4}$, reperimus tandem

$$Z = \frac{1}{8 \cdot 2^{\frac{3}{4}}} l \frac{\sqrt[4]{2} + p}{\sqrt[4]{2} - p} + \frac{1}{4 \cdot 2^{\frac{3}{4}}} \text{A tang. } \frac{p}{\sqrt[4]{2}}$$

$$+ \frac{1}{8 \cdot 2^{\frac{3}{4}}} l \frac{\sqrt[4]{2} + q}{\sqrt[4]{2} - q} + \frac{1}{4 \cdot 2^{\frac{3}{4}}} \text{A tang. } \frac{q}{\sqrt[4]{2}},$$

vbi tantum opus eſt loco p et q valores aſſumtos reſtituere, qui ſunt $p = \frac{1 + z}{v}$ et $q = \frac{1 - z}{v}$.

§. 7. Cum iam ipſum integrale quaeſitum ſit $V = -2^{\frac{7}{4}} . Z$, erit nunc

$$V = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\sqrt[4]{2}+p}{\sqrt[4]{2}-p}} - \text{A tang.}\frac{p}{\sqrt[4]{2}}$$

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\sqrt[4]{2}+q}{\sqrt[4]{2}-q}} - \text{A tang.}\frac{q}{\sqrt[4]{2}},$$

atque si loco p et q scribantur valores assignati, prodibit

$$V = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{v\sqrt[4]{2}+1+z}{v\sqrt[4]{2}-1-z}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{v\sqrt[4]{2}+1-z}{v\sqrt[4]{2}-1+z}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\frac{1+z}{v\sqrt[4]{2}} - \tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\frac{1-z}{v\sqrt[4]{2}}.$$

Hic primum observo, ambos arcus circulares commode in vnum contrahi posse ope formulae

$$\text{A tang.}\, a + \text{A tang.}\, b = \text{A tang.}\frac{a+b}{1-ab},$$

quo facto erit

$$V = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{v\sqrt[4]{2}+1+z}{v\sqrt[4]{2}-1-z}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{v\sqrt[4]{2}+1-z}{v\sqrt[4]{2}-1+z}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\frac{2v\sqrt[4]{2}}{vv\sqrt{2}-1+zz}.$$

§. 8. Simili modo etiam logarithmos tam numeratorum quam denominatorum in vnum contrahere licet, eritque.

$$l[v\sqrt[4]{2}+1+z] + l[v\sqrt[4]{2}+1-z] = l[(v\sqrt[4]{2}+1)^2 - zz],$$

$$l[v\sqrt[4]{2}-1-z] + l[v\sqrt[4]{2}-1+z] = l[(v\sqrt[4]{2}-1)^2 - zz],$$

hinc-

hincque habebimus ſequentem formam:

$$V = -\tfrac{1}{4}\int \frac{(v\sqrt[4]{2}+1)^2 - zz}{(v\sqrt[4]{2}-1)^2 - zz} - \tfrac{1}{2}\text{A tang.}\frac{2v\sqrt[4]{2}}{vv\sqrt{2}-1+zz}.$$

Vbi notetur eſſe $v = \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}$.

§. 9. Nunc vlterius regrediamur, et quia poſuimus $y = z\sqrt{-1}$, fiet nunc $zz = -yy$, et iam erit

$$v = \sqrt[4]{(1-6yy+y^4)},$$

hincque per y integrale quaeſitum hoc modo exprimetur:

$$V = -\tfrac{1}{4}\int \frac{(v\sqrt[4]{2}+1)^2 + yy}{(v\sqrt[4]{2}-1)^2 + yy} - \tfrac{1}{2}\text{A tang.}\frac{2v\sqrt[4]{2}}{vv\sqrt{2}-1-yy}.$$

§. 10. Quoniam igitur poſueramus $x = \frac{yy-3}{4}$, erit $yy = 4x+3$, eratque

$$\sqrt[4]{(2xx-1)} = \sqrt[4]{\frac{1-6yy+y^4}{8}} = \frac{v}{\sqrt[4]{8}} = \frac{v\sqrt[4]{2}}{2},$$

vnde fit

$$v\sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{(2xx-1)},$$

quibus valoribus ſubſtitutis integrale quaeſitum erit

$$V = -\tfrac{1}{4}\int \frac{[2\sqrt[4]{(2xx-1)}+1]^2 + 4x+3}{[2\sqrt[4]{(2xx-1)}-1]^2 + 4x+3}$$

$$-\tfrac{1}{2}\text{A tang.}\frac{4\sqrt[4]{(2xx-1)}}{4\sqrt{(2xx-1)}-4x-4}.$$

Facta

Facta autem euolutione reperietur:

$$V = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{1+x+\sqrt{(2xx-1)}+\sqrt[4]{(2xx-1)}}{1+x+\sqrt{(2xx-1)}-\sqrt[4]{(2xx-1)}}}$$
$$-\tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{\sqrt[4]{(2xx-1)}}{\sqrt{(2xx-1)}-x-1},$$

quae expreſſio etiam ita referri poteſt:

$$V = +\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{1+x+\sqrt{(2xx-1)}-\sqrt[4]{(2xx-1)}}{1+x+\sqrt{(2xx-1)}+\sqrt[4]{(2xx-1)}}}$$
$$+\tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{\sqrt[4]{(2xx-1)}}{1+x-\sqrt{(2xx-1)}}.$$

Hunc igitur valorem operae pretium erit per ſequens theorema in medium proferre.

Theorema.

Propoſita hac formula differentiali:

$$\partial V = \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2xx-1)}},$$

eius integrale ſequenti modo per logarithmos et arcus circulares exprimetur:

$$V = +\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{1+x+\sqrt{(2xx-1)}-\sqrt[4]{(2xx-1)}}{1+x+\sqrt{(2xx-1)}+\sqrt[4]{(2xx-1)}}}$$
$$+\tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{\sqrt[4]{(2xx-1)}}{1+x-\sqrt{(2xx-1)}}.$$

Corol-

Corollarium 1.

Hinc ergo si loco x scribamus $-x$, erit

$$\int \frac{\partial x}{(x-1)\sqrt[4]{(2xx-1)}} = \tfrac{1}{4} l \frac{1-x+\sqrt{(2xx-1)}-\sqrt[4]{(2xx-1)}}{1-x+\sqrt{(2xx-1)}+\sqrt[4]{(2xx-1)}}$$
$$+\tfrac{1}{2} \text{A tang.} \frac{\sqrt[4]{(2xx-1)}}{1+x-\sqrt{(2xx-1)}}.$$

Corollarium 2.

Hae integrationes eo magis sunt notatu dignae, quod formulam differentialem non generaliorem admittant. Ita haec formula differentialis: $\frac{\partial x}{(1+\alpha x)\sqrt[4]{(\beta xx-1)}}$ integrationem haud admittit, nisi casibus $\alpha = \pm 1$ et $\beta = 2$, vel generalius, nisi fuerit $\beta = 2\alpha\alpha$.

§. 11. Ipsam autem formulam nostram integralem pluribus modis transformare licet, vt signum radicale biquadraticum elidatur. Commodissime hoc praestabitur, ponendo $\sqrt[4]{(2xx-1)} = s$, vnde fit $2xx = 1+s^4$, consequenter $x = \sqrt{\frac{1+s^4}{2}}$, hincque $\partial x = \frac{s^3 \partial s \sqrt{2}}{\sqrt{1+s^4}}$, quo valore substituto erit

$$V = \int \frac{2ss\partial s}{[\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}]\sqrt{(1+s^4)}},$$

cuius ergo formulae integrale erit

$$V = \tfrac{1}{4} l \frac{\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}+ss\sqrt{2}-s\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}+ss\sqrt{2}+s\sqrt{2}}$$
$$+\tfrac{1}{2} \text{A tang.} \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}-ss\sqrt{2}}.$$

§. 12. Haec autem formula si supra et infra multiplicetur per $\sqrt{2} - \sqrt{(1+s^4)}$, ita in duas partes discerpetur, vt sit

$$V = \int \frac{2ss\partial s\sqrt{2}}{(1-s^4)\sqrt{(1+s^4)}} - \int \frac{2ss\partial s}{1-s^4}.$$

Cum igitur sit

$$\frac{2ss}{1-s^4} = \frac{1}{1-ss} - \frac{1}{1+ss}, \text{ erit}$$

$$\int \frac{2ss\partial s}{1-s^4} = \frac{1}{2} l \frac{1+s}{1-s} - \text{A tang. } s,$$

ficque prodibit ista aequatio memorabilis:

$$\int \frac{2ss\partial s\sqrt{2}}{(1-s^4)\sqrt{(1+s^4)}} = \frac{1}{2} l \frac{1+s}{1-s} - \text{A tang. } s$$
$$+ \frac{1}{4} l \frac{\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}+(s-1)s\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}+(s+1)s\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \text{A tang. } \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}-ss\sqrt{2}},$$

vbi notasse iuuabit esse

$$\text{A tang. } s = 2 \text{ A tang. } \frac{2s}{1-ss}.$$

Verum si has partes coniungere vellemus, in formulas fere inextricabiles illaberemur. Olim autem, cum huiusmodi formulas tractassem, iam incidi in hanc integrationem:

$$\int \frac{ss\partial s}{(1-s^4)\sqrt{1+s^4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} l \frac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{1-ss} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \text{A tang. } \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{(1+s^4)}},$$

vnde pro nostro casu fit

$$\int \frac{2ss\partial s\sqrt{2}}{(1-s^4)\sqrt{(1+s^4)}} = \frac{1}{2} l \frac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{1-ss} - \frac{1}{2} \text{A tang. } \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{(1+s^4)}},$$

cuius expressionis consensus cum ante inuenta, propter radicalium complicationem, minus facile perspici potest.

Alia Resolutio.

Formulae propositae $V = \int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2xx-1)}}$.

§. 13. Vtamur hic substitutione modo memorata $\sqrt[4]{(2xx-1)} = s$, vt sit $x = \sqrt{\frac{1+s^4}{2}}$, atque iam vidimus for-

formulam noſtram hoc modo exprimi:

$$V = \int \frac{2ss\partial s}{[\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}]\sqrt{(1+s^4)}} = \int \frac{2ss\partial s\sqrt{2}}{(1-s^4)[\sqrt{(1+s^4)}]} - \int \frac{2ss\partial s}{1-s^4}.$$

Cum igitur iſtud integrale duabus conſtet partibus, id hoc modo repraeſentemus: $V = 2\sqrt{2}.M - 2N$, ita vt ſit

$$M = \int \frac{ss\partial s}{(1-s^4)\sqrt{(1+s^4)}} \text{ et } N = \int \frac{ss\partial s}{1-s^4},$$

vbi poſterior pars nullam habet difficultatem. Cum enim ſit

$$\frac{ss}{1-s^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-ss} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+ss}, \text{ erit}$$

$$N = \frac{1}{4}l\frac{1+s}{1-s} - \frac{1}{2}\text{A tang. } s,$$

§. 14. Pro priore vero parte, quae exigit maiorem ſagacitatem, ponamus $\frac{\sqrt{1+s^4}}{s} = t\sqrt{2}$, eritque differentiando

$$-\frac{\partial s(1-s^4)}{ss\sqrt{(1+s^4)}} = \partial t\sqrt{2}, \text{ vnde ſit}$$

$$\partial s = -\frac{ss\partial t\sqrt{2}\sqrt{(1+s^4)}}{1-s^4},$$

quo valore ſubſtituto erit

$$\partial M = -\frac{s^4\partial t\sqrt{2}}{(1-s^4)^2}.$$

Cum iam ſit $\sqrt{(1+s^4)} = st\sqrt{2}$, erit $1+s^4 = 2sstt$ et denuo quadrando $1+2s^4+s^8 = 4s^4t^4$, hinc aufferatur vtrinque $4s^4$ fietque

$$1-2s^4+s^8 = 4s^4(t^4-1) = (1-s^4)^2,$$

quo valore ſubſtituto erit

$$\partial M = \frac{-\partial t}{2\sqrt{2}.(t^4-1)} = \frac{\partial t}{2(1-t^4)\sqrt{2}},$$

ideoque tota pars prior $2\sqrt{2}.M = \frac{\partial t}{1-t^4}$.

§. 15. Cum nunc ſit

$$\frac{1}{1-t^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-tt} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+tt},$$

erit iſta pars

$$2\sqrt{2}.\mathrm{M} = \tfrac{1}{4} l \tfrac{1+t}{1-t} + \tfrac{1}{2} \mathrm{A\,tang.}\, t,$$

hincque pro t reſtituto valore $t = \frac{\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}}$, erit

$$2\sqrt{2}.\mathrm{M} = \tfrac{1}{4} l \tfrac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}-\sqrt{(1+s^4)}} + \tfrac{1}{2} \mathrm{A\,tang.} \tfrac{\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}},$$

conſequenter valor integralis quaeſitus erit

$$\mathrm{V} = \tfrac{1}{4} l \tfrac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}-\sqrt{(1+s^4)}} + \tfrac{1}{2} \mathrm{A\,tang.} \tfrac{\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2} l \tfrac{1+s}{1-s} + \mathrm{A\,tang.}\, s.$$

§. 16. Eſt vero

$$\sqrt{[s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}]} = \sqrt{\tfrac{s\sqrt{2}+(1-ss)\sqrt{-1}}{2}} + \sqrt{\tfrac{s\sqrt{2}-(1-ss)\sqrt{-1}}{2}};$$

eodem modo:

$$\sqrt{[s\sqrt{2}-\sqrt{(1+s^4)}]} = \sqrt{\tfrac{s\sqrt{2}+(1-ss)\sqrt{-1}}{2}} - \sqrt{\tfrac{s\sqrt{2}-(1-ss)\sqrt{-1}}{2}},$$

hincque ergo prior logarithmus:

$$\tfrac{1}{4} l \tfrac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}-\sqrt{(1+s^4)}},$$

transmutatur in hanc formam:

$$\tfrac{1}{2} l \tfrac{\sqrt{[s\sqrt{2}+(1-ss)\sqrt{-1}]}+\sqrt{[s\sqrt{2}-(1-ss)\sqrt{-1}]}}{\sqrt{[s\sqrt{2}+(1-ss)\sqrt{-1}]}-\sqrt{[s\sqrt{2}-(1-ss)\sqrt{-1}]}},$$

quae forma porro reducitur ad hanc:

$$\tfrac{1}{2} l \tfrac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{(1-ss)\sqrt{-1}},$$

vbi imaginarium in denominatore non turbat, quoniam addita conſtante $l\sqrt{-1}$ tollitur, ita vt habeamus iſtam partem logarithmicam:

$$= \tfrac{1}{2} l \tfrac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{1-ss} - \tfrac{1}{2} l \tfrac{1+s}{1-s} = \tfrac{1}{2} l \tfrac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{(1+s)^2}$$

§. 17. Pari modo etiam ambos arcus circulares in vnum contrahere licebit, hoc modo: Ponatur

$$\mathrm{A\,tang.} \tfrac{\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}} = \mathrm{A\,tang.} \tfrac{2u}{1-uu},$$ eritque

$\frac{1}{2}$ A

$$\tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}} = \text{A tang.}\,u.$$

Erit igitur $\frac{\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}} = \frac{2u}{1-uu}$, vnde colligitur

$$u = \frac{1-s\sqrt{2}+ss}{\sqrt{(1+s^4)}},$$

ficque ambo arcus erunt:

$$\text{A tang.}\,\frac{1-s\sqrt{2}+ss}{\sqrt{(1+s^4)}} + \text{A tang.}\,s = \text{A tang.}\,\frac{1-s\sqrt{2}+ss+s\sqrt{(1+s^4)}}{\sqrt{(1+s^4)}-s+ss\sqrt{2}-s^3}.$$

§. 18. Etſi autem talibus reductionibus calculus irrationalium non mediocriter illuſtratur, tamen formulae non euadunt ſimpliciores; ideoque iis, quas immediate inuenimus, vtamur, vbi, quia poſuimus $\sqrt[4]{(2xx-1)} = s$, commode litteram s loco huius formulae in calculo retinere poterimus. Tantum igitur loco $\sqrt{(1+s^4)}$ eius valorem, qui eſt $x\sqrt{2}$, ſcribamus, vnde fiet integrale quaeſitum:

$$V = \tfrac{1}{4}l\,\frac{s+x}{s-x} - \tfrac{1}{2}l\,\frac{1+s}{1-s} + \tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{x}{s} + \text{A tang.}\,s.$$

§. 19. Quoniam vero quantitatem conſtantem quamcunque adiicere licet, loco $l(s-x)$ ſcribamus $l(x-s)$, et quia $\text{A tang.}\,\frac{x}{s} = 90^\circ - \text{A tang.}\,\frac{s}{x}$, habebimus:

$$V = \tfrac{1}{4}l\,\frac{x+s}{x-s} - \tfrac{1}{2}l\,\frac{1+s}{1-s} - \tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{s}{x} + \text{A tang.}\,s.$$

Quod ſi vero in forma, quam prior ſolutio ſuppeditauerat, etiam loco $\sqrt[4]{(2xx-1)}$ ſcribamus s, ea erit:

$$V = \tfrac{1}{4}l\,\frac{1+x+ss-s}{1+x+ss+s} + \tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{s}{1+x-ss};$$

quae forma maxime a praecedente diſcrepare videtur, quia nulli adeo communes factores deprehenduntur. Interim tamen egregie inter ſe conueniunt, ad quod oſtendendum ſingularis dexteritas in calculo irrationalium requiritur.

Demonſtratio conſenſus harum duarum formularum:

$$V = \tfrac{1}{4} l \tfrac{1+x+ss-s}{1+x+ss+s} + \tfrac{1}{2} \text{A tang.} \tfrac{s}{1+x-ss} \text{ et}$$
$$V = \tfrac{1}{4} l \tfrac{x+s}{x-s} - \tfrac{1}{2} l \tfrac{1+s}{1-s} - \tfrac{1}{2} \text{A tang.} \tfrac{s}{x} + \text{tang. } s.$$

§. 20. Quoniam logarithmi et arcus circulares nullo modo inter ſe comparari patiuntur, neceſſe eſt, vt vtrinque tam logarithmi quam arcus inter ſe ſeorſim aequentur. Incipiamus igitur a logarithmis, et oſtendendum eſt fore:

$$l \tfrac{1+x+ss-s}{1+x+ss+s} = l \tfrac{x+s}{x-s} - 2 l \tfrac{1+s}{1-s},$$

ſiue

$$l \tfrac{(x-s)(1+x+ss-s)}{(x+s)(1+x+ss+s)} = +2 l \tfrac{1-s}{1+s}.$$

§. 21. Euoluamus nunc tam numeratorem quam denominatorem prioris fractionis, ac numerator abibit in hanc formam:

$$-s(1+ss) - 2sx + ss + x(1+ss) + xx,$$

quae porro, ob $xx = \frac{1+s^4}{2}$, abit in hanc:

$$-s(1+ss) - 2sx + ss + x(1+ss) + \tfrac{1}{2}(1+s^4),$$

vbi termini ſolam s continentes ſunt:

$$-s(1+ss) + ss + \tfrac{1}{2}(1+s)^4$$
$$= -s(1+ss) + \tfrac{1}{2}(1+ss)^2,$$
$$= +\tfrac{1}{2}(1+ss)(1-s)^2;$$

termini vero litteram x continentes ſunt:

$$-2sx + x(1+ss) = x(1-s)^2,$$

ſicque numerator ad hanc formam eſt reductus:

$$\tfrac{1}{2}(1-s)^2(2x+1+ss).$$

§. 22.

§. 22. Simili modo denominatorem tractemus, eritque facta euolutione

$$s(1+ss)+2sx+ss+x(1+ss)+xx,$$

vbi termini ſolam s continentes ſunt

$$s(1+ss)+ss+\tfrac{1}{2}(1+s^4)=s(1+ss)+\tfrac{1}{2}(1+ss)^2$$
$$=\tfrac{1}{2}(1+ss)(1+s)^2;$$

termini vero litteram x continentes erunt

$$2sx+x(1+ss)=x(1+s)^2,$$

ideoque denominator hanc induit formam: $\frac{1}{2}(1+s)^2(2x+1+ss)$. Cum igitur numerator et denominator habeat communem factorem $\frac{1}{2}(2x+1+ss)$, pars ſiniſtra noſtrae aequationis fit $l\frac{(1-s)^2}{(1+s)^2}=2\,l\frac{1-s}{1+s}$, vti poſtulabatur.

§. 23. Supereſt igitur, vt etiam aequalitatem inter arcus circulares demonſtremus, hoc eſt vt ſit

$$\tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{s}{1+x-ss}=\text{A tang.}\,s-\tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{s}{x}.$$

Transferamus hunc in finem A tang. $\frac{s}{x}$ in alteram partem, et cum ſit

$$\text{A tang.}\,a+\text{A tang.}\,b=\text{A tang.}\,\frac{a+b}{1-ab},$$

haec aequatio proueniet:

$$\text{A tang.}\,\frac{2sx+s-s3}{x+xx-ssx-ss}=2\,\text{A tang.}\,s.$$

At vero, ſi loco xx ſcribatur valor $\frac{1}{2}(1+s^4)$, denominator euadet $(1-ss)[\frac{1}{2}(1-ss)+x]$, numerator vero:

$$s(2x+1-ss)=2s[\tfrac{1}{2}(1-ss)+x],$$

ſicque adeſt factor communis $\frac{1}{2}(1-ss)+x$, quo ſublato fiet A tang. $\frac{2s}{1-ss}=2$ A tang. s. Sicque perfecta aequalitas rigide

eſt

eſt demonſtrata, quia notum eſt reuera eſſe $2 \text{ A tang. } s = \text{A tang. } \frac{2s}{1-ss}$.

§. 24. Manifeſtum eſt, in vniuerſa hac tractatione plura occurrere artificia analytica minime obuia et comunia, quam ob cauſſam confido iſtam ſpeculationem Geometris non fore ingratam. Imprimis autem mihi maxime notatu dignum videtur, quod ſimili modo, quo poſteriorem reſolutionem adornauimus, etiam iſta formula differentialis multo latius patens:

$$\partial V = \frac{\partial x\,(1 - x^{n-1})}{(1-x^n)\sqrt[2n]{(2x^n - 1)}},$$

ad integrabilitatem per logarithmos et arcus circulares reduci poteſt, ad quod oſtendendum ſequens problema adiungamus.

Problema.

Hanc formulam differentialem:

$$\partial V = \frac{\partial x\,(1 - x^{n-1})}{(1-x^n)\sqrt[2n]{(2x^n - 1)}}$$

ad rationalitatem perducere.

Solutio.

§. 25. Ponatur breuitatis gratia $\sqrt[2n]{(2x^n - 1)} = s$, vt ſit

$$2x^n = 1 + s^{2n} \text{ et}$$

$$1 - x^n = x^n - s^{2n} = \frac{1 - s^{2n}}{2},$$

vnde

vnde forma propoſita hoc modo repraeſentari poteſt:

$$\partial V = \frac{\partial x\,(1 - x^{n-1})}{s\,(x^n - s^{2n})},$$

quae in has partes discerpatur:

$$\frac{\partial x}{s\,(x^n - s^{2n})} = \partial M \text{ et } \frac{x^{n-1}\,\partial x}{s\,(x^n - s^{2n})} = \partial N,$$

ita vt ſit $\partial V = \partial M - \partial N$. Cum autem ſit $2x^n = 1 + s^{2n}$, erit differentiando $x^{n-1}\,\partial x = s^{2n-1}\,\partial s$, ideoque

$$\partial x = \frac{s^{2n-1}\,\partial s}{x^{n-1}},$$

quibus ſubſtitutis erit

$$\partial M = \frac{s^{2n-2}\,\partial s}{x^{n-1}\,(x^n - s^{2n})} \text{ et}$$

$$\partial N = \frac{s^{2n-2}\,\partial s}{x^n - s^{2n}} = \frac{2\,s^{2n-2}\,\partial s}{1 - s^{2n}},$$

quae poſterior forma iam eſt rationalis, ita vt ſola ∂M nobis tractanda relinquatur.

§. 26. Ponatur igitur $x = s\,t$, eritque differentiando $\partial x = s\,\partial t + t\,\partial s$. Cum autem ſupra inuenerimus

$$\partial x = \frac{s^{2n-1}\,\partial s}{x^{n-1}}, \text{ erit}$$

$$x^{n-1}(s\,\partial t + t\,\partial s) = s^{2n-1}\,\partial s = s^{n-1}\,t^{n-1}(s\,\partial t + t\,\partial s),$$

vnde ſit

$$\partial s = \frac{t^{n-1}\,s\,\partial t}{s^n - t^n},$$

quo valore ſubſtituto fit

$$\partial M = \frac{s^{2n-1}\, t^{n-1}\, \partial t}{x^{n-1}\,(x^n - s^{2n})\,(s^n - t^n)},$$

quae forma porro reducetur ad hanc:

$$\partial M = -\frac{\partial t}{(t^n - s^n)^2}.$$

Cum autem fit

$$2x^n = 2s^n t^n = 1 + s^{2n}, \text{ erit } (t^n - s^n)^2 = t^{2n} - 1;$$

vnde fit

$$\partial M = +\frac{\partial t}{1 - t^{2n}}, \text{ ideoque}$$

$$\partial V = \frac{\partial t}{1 - t^{2n}} - \frac{2\, s^{2n-2}\, \partial s}{1 - s^{2n}}.$$

§. 27. Hoc igitur modo formulam propoſitam ad duas alias ab irrationalitate prorſus liberatas perduximus, quarum integratio nulla amplius laborat difficultate et manifeſto per logarithmos et arcus circulares abſolui poteſt. Quo autem haec integrationis operatio, ſi inſtituere lubet, facilius et vno quaſi ictu perfici queat, priorem partem $\frac{\partial t}{1 - t^{2n}}$, ad poſteriorem formam reducemus, quod fit ope huius ſubſtitutionis: $t = \frac{1}{u}$; fit enim hinc

$$\partial t = -\frac{\partial u}{u\,u} \text{ et } 1 - t^{2n} = \frac{u^{2n} - 1}{u^{2n}},$$

ideoque

$$\frac{\partial t}{1 - t^{2n}} = +\frac{u^{2n-2}\, \partial u}{1 - u^{2n}},$$

quo

quo notato erit

$$V = \int \frac{u^{2n-2}\,\partial u}{1-u^{2n}} - 2\int \frac{s^{2n-2}\,\partial s}{1-s^{2n}}.$$

§. 28. Simili modo etiam tractari possunt sequentes formulae integrales multo latius patentes:

I. $$\int \frac{\partial x}{(a+bx^n)\sqrt[2n]{(a+2bx^n)}};$$

II. $$\int \frac{\partial x}{(a+bx^n)\sqrt[3n]{(aa+3abx^n+3bbx^{2n})}};$$

III. $$\int \frac{\partial x}{(a+bx^n)\sqrt[4n]{(a^3+4aabx^n+6abbx^{2n}+4b^3x^{3n})}};$$

IV. $$\int \frac{\partial x}{(a+bx^n)\sqrt[5n]{(a^4+5a^3bx^n+10aabbx^{2n}+10ab^3x^{3n}+5b^4x^{4n})}};$$

quae omnes, ponendo quantitatem irrationalem denominatoris $= s$, tum vero $x = st$, ad rationalitatem perducuntur ideoque integrationem per logarithmos et arcus circulares admittunt.

§. 29. Quo hoc exemplo illustretur, sumatur

$$V = \int \frac{\partial x}{(a+bxx)\sqrt[8]{(x^3+4aabxx+6abbx^4+4b^3x^6)}},$$

et cum esse debeat

$$\sqrt[8]{(a^3+4aabxx+6abbx^4+4b^3x^6)} = s$$

et $x = st$, erit

$$t = \frac{x}{\sqrt[8]{(a^3 + 4\,a\,a\,b\,x\,x + 6\,a\,b\,b\,x^4 + 4\,b^3\,x^6)}},$$

et differentiando

$$\partial t = \frac{\partial x\,(a^3 + 3\,a\,a\,b\,x\,x + 3\,a\,b\,b\,x^4 + b^3\,x^6)}{(a^3 + 4\,a\,a\,b\,x\,x + 6\,a\,b\,b\,x^4 + 4\,b^3\,x^6)^{\frac{9}{8}}}, \text{ siue}$$

$$\partial t = \frac{\partial x\,(a + b\,x\,x)^3}{(a^3 + 4\,a\,a\,b\,x\,x + 6\,a\,b\,b\,x^4 + 4\,b^3\,x^6)^{\frac{9}{8}}}, \text{ ideoque}$$

$$\partial x = \frac{\partial t\,(a^3 + 4\,a\,a\,b\,x\,x + 6\,a\,b\,b\,x^4 + 4\,b^3\,x^6)^{\frac{9}{8}}}{(a + b\,x\,x)^3},$$

quo valore substituto fit

$$\partial V = \frac{\partial t\,(a3 + 4\,a\,a\,b\,x\,x + 6\,a\,b\,b\,x^4 + 4\,b3\,x^6)}{(a + b\,x\,x)^4} = \frac{s^8\,\partial t}{(a + b\,x\,x)^4},$$

siue $\partial V = \frac{x^8\,\partial t}{t^8\,(a + b\,x\,x)^4}$. Est vero

$$s^8 = \frac{x^8}{t^8} = a^3 + 4\,a\,a\,b\,x\,x + 6\,a\,b\,b\,x^4 + 4\,b^3\,x^6 = \frac{(a + b\,x\,x)^4 - b^4\,x^8}{a},$$

vnde fit $(a + b\,x\,x)^4 = \frac{a\,x^8}{t^8} + b^4\,x^8$, quo substituto prodit denique $\partial V = \frac{\partial t}{a + b^4\,t^8}$, quae igitur forma iam est rationalis.

§. 30. Quin etiam haec formula adhuc generalior ope similium substitutionem ad rationalitatem perduci ideoque integrari potest:

$$V = \int \frac{x^{m-1}\,\partial x}{(a + b\,x^n)\,\sqrt[m]{[(a + b\,x)^\lambda - b^\lambda\,x^{\lambda n}]^{\lambda n}}}$$

quod ita ostenditur. Ponatur $(a + b^n)^\lambda - b^\lambda\,x^{\lambda n} = s^{\lambda n}$, vt habeatur

$$\partial V = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^m}{(a + b\,x^n)\,s^m}.$$

Pona-

Ponatur porro $\frac{x}{s} = t$ eritque

$$\partial V = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{t^m}{a + b x^n}.$$

Porro cum fit $\frac{\partial t}{t} = \frac{\partial x}{x} - \frac{\partial s}{s}$, ob

$$\frac{\partial s}{s} = \frac{(b x^{n-1} - b^\lambda x^{\lambda n - 1}) \partial x}{(a + b x^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}}, \text{ erit}$$

$$\frac{\partial t}{t} = \frac{\partial x}{x} \cdot \left[1 - \frac{b x^n (a + b x^n)^{\lambda - 1} + b^\lambda x^{\lambda n}}{(a + b x^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}} \right]$$

$$= \frac{a \partial x}{x} \cdot \frac{(a + b x^n)^{\lambda - 1}}{s^{\lambda n}}, \text{ fiue}$$

$$\frac{\partial t}{t} = \frac{a \partial x}{x} (a + b x^n)^{\lambda - 1} \cdot \frac{t^{\lambda n}}{x^{\lambda n}}, \text{ vnde fit}$$

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{x^{\lambda n}}{a t^{\lambda n} (a + b x^n)^{\lambda - 1}},$$

quo valore fubſtituto prodit

$$\partial V = \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{x^{\lambda n} t^m}{a t^{\lambda n} (a + b x^n)^\lambda}. \text{ Eſt vero}$$

$$(a + b x^n)^\lambda = s^{\lambda n} + b^\lambda x^{\lambda n} = \frac{x^{\lambda n} (1 + b^\lambda t^{\lambda n}}{t^{\lambda n}}, \text{ vnde fit}$$

$$\partial V = \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{t^m}{a (1 + b^\lambda t^{\lambda n})} = \frac{t^{m-1} \partial t}{a (1 + b^\lambda t^{\lambda n})}.$$

Miro igitur modo etiam hanc poſteriorem formulam generaliſſimam ad rationalitatem perduximus, quae reductio ideo notatu maxime digna mihi viſa eſt, quod tales ſubſtitutiones ſingularem dexteritatem et plura artificia calculi requirunt.

INTEGRATIO FORMVLAE DIFFERENTIALIS MAXIME IRRATIONALIS, QVAM TAMEN PER LOGARITHMOS ET ARCVS CIRCVLARES EXPEDIRE LICET.

Auctore
L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 26 Mart. 1777.

Problema.

Propoſita hac formula differentiali:

$$\partial V = \frac{\partial z\,(1-zz)^2}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)^3}},$$

eius integrale, per logarithmos et arcus circulares expreſſum, inuenire.

Solutio.

§. 1. Ponatur breuitatis gratia $\sqrt[4]{(1+6zzz+z^4)} = v$, vt formula propoſita ſit $\partial V = \frac{\partial z\,(1-zz)^2}{(1+zz)v^3}$; et nunc loco z binae variabiles p et q in calculum introducantur, ponendo $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$, eritque $p^4 + q^4 = 2$ ideoque $p^3\,\partial p + q^3\,\partial q = 0$.

Porro

Porro vero erit $p+q=\frac{2}{v}$ et $p-q=\frac{2z}{v}$, hincque fiet $\frac{p-q}{p+q}=z$, exiſtente $v=\frac{2}{p+q}$.

§. 2. Cum igitur ſit $z=\frac{p-q}{p+q}$, erit $\partial z=\frac{2(q\partial p-p\partial q)}{(p+q)^2}$, vbi ob $p+q=\frac{2}{v}$ erit $\partial z=\frac{1}{2}vv(q\partial p-p\partial q)$. Deinde vero, quia eſt $\partial p=-\frac{q^3\partial q}{p^3}$, erit $q\partial p-p\partial q=-\frac{2\partial q}{p^3}$. Simili modo, poſito $\partial q=-\frac{p^3\partial p}{q^3}$, erit $q\partial p-p\partial q=\frac{2\partial p}{q^3}$, propterea quod $p^4+q^4=2$; ſicque elementum ∂z duplici modo, ſcilicet per ∂p et per ∂q habebimus expreſſum, eritque primo $\partial z=-\frac{vv\partial q}{p^3}$, tum vero $\partial z=+\frac{vv\partial p}{q^3}$, quam duplicem expreſſionem per $\partial z=vv\partial\omega$ repraeſentemus, exiſtente vel $\partial\omega=-\frac{\partial q}{p^3}$, vel $\partial\omega=+\frac{\partial p}{q^3}$.

§. 3. Deinde vero ob $1+z=pv$ et $1-z=qv$ erit $1-zz=pqvv$, ideoque $(1-zz)^2=p^2q^2v^4$; ſicque numerator noſtrae formulae erit $\partial z(1-zz)^2=v^6ppqq\partial\omega$. Pro denominatore autem habebimus $1+zz=\frac{1}{2}(pp+qq)vv$, ita vt iam totus denominator ſit $\frac{1}{2}v^5(pp+qq)$, quocirca ipſa formula noſtra propoſita ita repraeſentabitur:

$$\partial V=\frac{2vppqq\partial\omega}{pp+qq}=\frac{4ppqq\partial\omega}{(p+q)(pp+qq)}.$$

Multiplicemus autem porro ſupra et infra per $p-q$, vt prodeat iſta forma:

$$\partial V=\frac{4(p-q)ppqq\partial\omega}{p^4-q^4}.$$

§. 4. Quoniam nunc numerator ex duabus partibus conſtat, vtramque ſeorſim euoluamus. Pars igitur prior, quae eſt $\frac{4p^3qq\partial\omega}{p^4-q^4}$, ſi loco $\partial\omega$ valorem priorem ſupra datum ſcribamus, ſcilicet $\partial\omega=-\frac{\partial q}{p^3}$, erit $=-\frac{4qq\partial q}{p^4-q^4}$; quamobrem

ſi

ſi hic in denominatore pro p ſcribamus eius valorem $2-q^4$, iſta pars erit per ſolam variabilem q ita expreſſa: $-\frac{2qq\partial q}{1-q^4}$. Simili modo altera noſtrae formulae pars $-\frac{4ppq^3\partial\omega}{p^4-q^4}$, ſi loco $\partial\omega$ ſcribamus valorem $+\frac{\partial p}{q^3}$, induet hanc formam: $-\frac{4pp\partial p}{p^4-q^4}$. Hic igitur loco q^4 ſcribatur $2-p^4$, ac pars iſta iam per ſolam variabilem p exprimetur, fietque $=+\frac{2pp\partial p}{1-p^4}$, conſequenter ipſa formula propoſita reducta eſt ad has partes:

$$\partial V = \frac{2pp\partial p}{1-p^4} - \frac{2qq\partial q}{1-q^4},$$

quae non ſolum ſunt rationales, ſed etiam binas variabiles p et q penitus ſeparatas inuoluunt.

§. 5. Ad integrale igitur inueniendum notetur eſſe $\frac{2pp}{1-p^4} = \frac{1}{1-pp} - \frac{1}{1+pp}$, vnde erit prioris partis integrale

$$\int\frac{2pp\partial p}{1-p^4} = \int\frac{\partial p}{1-pp} - \int\frac{\partial p}{1+pp} = \tfrac{1}{2}l\frac{1+p}{1-p} - \text{A tang. } p,$$

eodemque modo altera pars erit

$$\int\frac{2qq\partial q}{1-q^4} = \tfrac{1}{2}l\frac{1+q}{1-q} - \text{A tang. } q,$$

quamobrem totum integrale quaeſitum erit

$$V = \tfrac{1}{2}l\frac{1+p}{1-p} - \tfrac{1}{2}l\frac{1+q}{1-q} + \text{A tang. } q - \text{A tang. } p.$$

§. 6. Reſtituamus nunc loco p et q valores aſſumtos, ſcilicet $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$, eritque

$$V = \tfrac{1}{2}l\frac{v+1+z}{v-1-z} - \tfrac{1}{2}l\frac{v+1-z}{v-1+z} + \text{A tang. } \frac{1-z}{v} - \text{A tang. } \frac{1+z}{v},$$

vbi cum ſit

$$\text{A tang. } a - \text{A tang. } b = \text{A tang. } \frac{a-b}{1+ab}, \text{ erit}$$

$$\text{A tang. } \frac{1-z}{v} - \text{A tang. } \frac{1+z}{v} = -\text{A tang. } \frac{2vz}{vv+1-zz}.$$

Deinde etiam logarithmi inuicem combinari poſſunt et reſultabit

$$V = \tfrac{1}{2}l\frac{(v+1+z)(v-1+z)}{(v-1-z)(v+1-z)} - \text{A tang. } \frac{2vz}{vv+1-zz}.$$

Quin

Quin etiam vtile erit logarithmos hoc modo iterum separare, vt fit

$$V = \tfrac{1}{2} l \frac{v+1+z}{v+1-z} + \tfrac{1}{2} l \frac{v-1+z}{v-1-z} - \text{A tang.} \frac{2vz}{vv+1-zz}.$$

§. 7. Hactenus constantem per integrationem addendam neglexímus; eam igitur nunc ita definiamus, vt posito $z = 0$ ipsum integrale V euanescat. Hunc in finem considéremus z tanquam minimum, et quia $v = (1 + 6zz + z^4)^{\frac{1}{4}}$, erit $v = 1 + \frac{3}{2}zz$; euidens autem est huius particulae minimae $\frac{3}{2}zz$ rationem tantum in posteriore logarithmo esse habendam, quoniam in eo occurrit $v - 1$. Hoc igitur valore substituto erit nunc nostrum integrale

$$V = \tfrac{1}{2} l \frac{2+z}{2-z} + \tfrac{1}{2} l \frac{\frac{3}{2}zz+z}{\frac{3}{2}zz-z} - \text{A tang.} \frac{2z}{2-zz}.$$

§. 8. Hic iam quia z est quantitas minima, erit $\frac{1}{2} l \frac{2+z}{2-z} = \frac{z}{2}$; alter vero logarithmus erit $\frac{1}{2} l \frac{3z+2}{3z-2}$, vbi loco constantis adiici debet $l - 1$, vt haec altera pars fiat $\frac{1}{2} l \frac{2+3z}{2-3z}$, cuius valor erit $\frac{3z}{2}$, ita vt ambo logarithmi iunctim praebeant $2z$. Deinde vero ex arcu circulari fit A tang. $\frac{2z}{2-zz} =$ A tang. $z = z$, ita vt tota formula praebeat $V = 2z - z = z$, qui valor cum formula proposita egregie conspirat; posito enim z infinite paruo habetur $\partial V = \partial z$, ideoque $V = z$.

§. 9. Quoniam igitur constans addenda reperta est $l - 1$, in superiori expressione loco $l(v - 1 - z)$ scribamus $l(1 + z - v)$, vt iam totum integrale rite determinatum sit:

$$V = \tfrac{1}{2} l \frac{v+1+z}{v+1-z} + \tfrac{1}{2} l \frac{v+z-1}{1+z-v} - \text{A tang.} \frac{2vz}{1+vv-zz},$$

qui valor euanescit sumto $z = 0$.

Problema 2.

Propoſita hac formula differentiali:

$$\partial V = \frac{\partial z\,(1+zz)^2}{(1-zz)\sqrt[4]{(1-\beta zz+z^4)^3}},$$

eius integrale per logarithmos et arcus circulares inueſtigare.

Solutio.

§. 10. Solutio huius problematis vix aliter erui poſſe videtur, niſi ex praecedente ſolutione deriuetur. Conſideremus igitur formulam prioris problematis hac ratione repraeſentatam: $\int \frac{\partial y\,(1-yy)^2}{(1+yy)\sqrt[4]{(1+6yy+y^4)^3}} = U$, et facta debita immutatione poſitoque $\sqrt[4]{(1+6yy+y^4)} = u$, integrale ita erit expreſſum:

$$U = \tfrac{1}{2} l \tfrac{u+1+y}{u+1-y} + \tfrac{1}{2} l \tfrac{u-1+y}{u-1-y} - A\,\text{tang.}\,\tfrac{2uy}{uu+1-yy}.$$

§. 11. In hac forma ponamus $y = z\sqrt{-1}$, et ſtatuamus formulam radicalem hinc natam

$$\sqrt[4]{(1-6zz+z^4)} = v,$$

quo facto erit

$$U = \int \frac{\partial z\sqrt{-1}\,(1+zz)^2}{(1-zz)\sqrt[4]{(1-6zz+z^4)^3}},$$

vnde patet eſſe $U = V\sqrt{-1}$, ita vt inuento valore U eruatur valor quaeſitus $V = \frac{U}{\sqrt{-1}} = -U\,.\sqrt{-1}$. Poſito autem $y = z\sqrt{-1}$ et loco u ſcripto v, integrale U accipiet hanc formam:

$$U =$$

$$U = \tfrac{1}{2} l \frac{v+1+z\sqrt{-1}}{v+1-z\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2} l \frac{v-1+z\sqrt{-1}}{v-1-z\sqrt{-1}} - \text{A tang.} \frac{2vz\sqrt{-1}}{vv+1+zz}.$$

Totum igitur negotium huc redit, vt ifti logarithmi imaginarii cum arcu imaginario ad realitatem reducantur, id quod fequenti modo commodiffime perficietur.

§. 12. In fubfidium vocetur iftud Lemma fatis notum:

$$l\,a+b\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2} l\,(a\,a+b\,b) + \sqrt{-1}\ \text{A tang.} \frac{b}{a},$$

vbi ergo, fi loco b fcribamus $-b$, erit

$$l\,a-b\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2} l\,(a\,a+b\,b) - \sqrt{-1}\ \text{A tang.} \frac{b}{a},$$

quae forma a praecedente fubtracta nobis dat

$$l \frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\ \text{A tang.} \frac{b}{a},$$

atque fi hic faciamus $b = c\sqrt{-1}$, erit

$$l \frac{a-c}{a+c} = 2\sqrt{-1}\ \text{A tang.} \frac{c\sqrt{-1}}{a},$$

hincque viciffim

$$\text{A tang.} \frac{c\sqrt{-1}}{a} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{a-c}{a+c} = \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\, l \frac{a+c}{a-c}.$$

§. 13. Iam pro priore logarithmo imaginario erit $a = v+1$ et $b = z$, vnde habebimus:

$$l \frac{v+1+z\sqrt{-1}}{v+1-z\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\ \text{A tang.} \frac{z}{v+1}.$$

Pro altero vero logarithmo erit $a = v-1$ et $b = z$, hincque

$$l \frac{v-1+z\sqrt{-1}}{v-1-z\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\ \text{A tang.} \frac{z}{v-1}.$$

Denique pro arcu erit $c = 2vz$ et $a = vv+1+zz$, vnde colligitur:

$$\text{A tang.} \frac{2vz\sqrt{-1}}{vv+1+zz} = \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\, l \frac{(v+z)^2+1}{(v-z)^2+1},$$

quibus valoribus fubftitutis erit

$$U = \sqrt{-1}\,\text{A tang.}\,\frac{z}{v+1} + \sqrt{-1}\,\text{A tang.}\,\frac{z}{v-1} - \frac{1}{2}\sqrt{-1}\,l\,\frac{1+(v+z)^2}{1+(v-z)^2},$$

qui valor ductus in $-\sqrt{-1}$ praebet ipsum valorem quaesitum:

$$V = -\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+(v+z)^2}{1+(v-z)^2} + \text{A tang.}\,\frac{z}{v+1} + \text{A tang.}\,\frac{z}{v-1},$$

quae expressio, arcubus in vnum contractis, transmutatur in hanc:

$$V = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+(v-z)^2}{1+(v+z)^2} - \text{A tang.}\,\frac{2vz}{1+zz-vv}.$$

§. 14. Haec solutio eo magis est notatu digna, quod per imaginaria est tradu&ta, atque adeo nulla via patere videtur eam directe inueniendi. Fortasse autem si forma integralis inuenta probe perpendatur, inde methodus excogitare poterit, cuius ope sine subsidio imaginariorum ista solutio directe elici queat, hocque argumentum vtique dignum videtur, in quo Geometrae sagacitatem suam exerceant.

§. 15. At vero, quoniam nulla via patet, integrale posterioris formulae directe inueniendi, operae pretium erit rursus ex aequatione integrali differentialem propositam elicere, visuri, num forsan haec operatio nobis inseruire possit, aliam resolutionem detegendi, quam per imaginaria progrediendo, quem in finem sequens problema coronidis loco adiungamus.

Problema.

Inuenire differentiale huius expressionis:

$$V = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+zz+vv-2vz}{1+zz+vv+2vz} - \text{A tang.}\,\frac{2vz}{1+zz-vv},$$

existente $v = \sqrt[4]{(1-6zz-z^4)}$.

Solu-

Solutio.

§. 16. Ponatur

$$\frac{2vz}{1+zz+vv} = p \text{ et } \frac{2vz}{1+zz-vv} = q,$$

eritque

$$V = \tfrac{1}{2} l \tfrac{1-p}{1+p} - A \text{ tang. } q,$$

vnde fit differentiando:

$$\partial V = -\frac{\partial p}{1-pp} - \frac{\partial q}{1+qq}.$$

Eſt vero

$$\partial p = \frac{2v\partial z(1-zz+vv)+2z\partial v(1+zz-vv)}{(1+zz+vv)^2} \text{ et}$$

$$\partial q = \frac{2v\partial z(1-zz-vv)+2z\partial v(1+zz+vv)}{(1+2zz-vv)^2}.$$

Deinde $1-pp = \frac{1+2zz+2vv+z^4-2vvzz+v^4}{(1+zz+vv)^2}$,

ſiue ob $v^4 = 1-6zz+z^4$, erit

$$1-pp = \frac{2(1-zz)(1-zz+vv)}{(1+zz+vv)^2},$$

eodemque modo

$$1+qq = \frac{2(1-zz)(1-zz-vv)}{(1+zz-vv)^2},$$

quibus ſubſtitutis fit

$$\partial V = -\frac{v\partial z(1-zz+vv)-z\partial v(1+zz-vv)}{(1-zz)(1-zz+vv)} - \frac{v\partial z(1-zz-vv)-z\partial v(1+zz+vv)}{(1-zz)(1-zz-vv)}.$$

§. 17. Reducatur haec expreſſio ad eundem denominatorem:

$$(1-zz)[(1-zz)^2-v^4] = 4zz(1-zz),$$

fietque

$$\partial V = -\frac{2v\partial z[(1-zz)^2-v^4]-z\partial v[(1-vv)^2+(1+vv)^2-2z^4]}{4zz(1-zz)}.$$

Haec forma porro reducitur ad hanc:

$$\partial V = -\frac{2vz\partial z-\partial v(1-3zz)}{z(1-zz)},$$

quae ſi ſupra et infra per v^3 multiplicetur, ob

 $v^4 =$

$v^4 = 1 - 6zz + z^4$ et

$v^3 \partial v = -3z\partial z + z^3 \partial z = z\partial z(zz - 3)$,

abibit in ſequentem formam:

$$\partial V = -\frac{2\partial z(1-6zz+z^4) - \partial z(zz-3)(1-3zz)}{(1-zz)v^3},$$

qua euoluta prodit denique

$$\partial V = \frac{\partial z(1+zz)^2}{(1-zz)\sqrt[4]{(1-6zz+z^4)^3}}.$$

Haec igitur formula cum propoſita formula differentiali ſuperioris problematis prorſus conuenit, ita vt certi ſimus huius formulae integrale reuera eſſe

$$V = \tfrac{1}{2} l \frac{1+(v-z)^2}{1+(v+z)^2} - A\,\text{tang.}\,\frac{2xz}{1+zz-vv},$$

etiamſi non pateat, quomodo hoc integrale methodo directa elici queat.

EVO-

EVOLVTIO FORMVLAE INTEGRALIS

$$\int \frac{\partial z\,(3+zz)}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}.$$

PER LOGARITHMOS ET ARCVS CIRCVLARES.

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 26 Mart. 1777.

§. 1.

Videtur hoc nullo alio modo fieri poſſe, niſi ſtatuatur $z = \frac{1+x}{1-x}$. Hinc autem fiet

$$\partial z = \frac{2\partial x}{(1-x)^2} \text{ et } \frac{3+zz}{1+zz} = \frac{2(1-x+xx)}{1+xx} = \frac{2(1+x3)}{(1+x)(1+xx)},$$

tum vero

$$1+6zz+z^4 = \frac{8(1+x^4)}{(1-x)^4}, \text{ ideoque}$$

$$\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)} = 2^{\frac{3}{4}}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{(1-x)},$$

quibus ſubſtitutis formula propoſita induet hanc formam:

$$2^{\frac{5}{4}}\int \frac{\partial x\,(1+x^3)}{(1-x^4)\sqrt[4]{(1+x^4)}}.$$

§. 2.

§. 2. Diſcerpamus iſtam formam in has duas partes: $2^{\frac{5}{4}}(P+Q)$, ita vt ſit:

$$P=\int\frac{\partial x}{(1-x^4)\sqrt[4]{(1+x^4)}} \text{ et } Q=\int\frac{x^3\,\partial x}{(1-x^4)\sqrt[4]{(1+x^4)}},$$

quas ſeorſim euoluamus. Pro priore quidem parte ſtatuamus $\frac{x}{\sqrt[4]{(1+x^4)}}=t$, vt ſit $P=\int\frac{t\,\partial x}{x(1-x^4)}$, tum autem fiet $\frac{x^4}{1+x^4}=t^4$, hincque $x^4=\frac{t^4}{1-t^4}$, ergo $1-x^4=\frac{1-2t^4}{1-t^4}$; deinde ob $4lx=4lt-l(1-t^4)$, erit $\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial t}{t(1-t^4)}$, hocque ergo modo probibit

$$P=\int\frac{\partial t}{1-2t^4}.$$

At pro altera parte Q ponatur $1+x^4=u^4$, vt fiat $\sqrt[4]{(1+x^4)}=u$ et $x^3\,\partial x=u^3\,\partial u$; vnde deducitur:

$$Q=\int\frac{u\,u\,\partial u}{2-u^4},$$

ſicque totum negotium ad formulas rationales eſt reductum.

§. 3. Quo nunc has formulas commodius tractare queamus, pro priore ponamus $t=\frac{p}{\sqrt[4]{2}}$, hocque modo erit

$P=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\int\frac{\partial p}{1-p^4}$. Nunc vero eſt

$$\frac{1}{1-p^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-pp}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+pp},$$

vnde fit

$$P=\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int\frac{\partial p}{1-pp}+\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int\frac{\partial p}{1+pp},$$

ideoque integrando:

$P=$

$$P = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} l \frac{1+p}{1-p} + \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \text{A tang. } p,$$

ſicque erit pars prior:

$$2^{\frac{5}{4}} P = \tfrac{1}{2} l \frac{1+p}{1-p} + \text{A tang. } p.$$

Vbi notetur eſſe $p = t\sqrt[4]{2}$, porro vero $t = \frac{x}{\sqrt[4]{(1+x^4)}}$; et quoniam poſuimus $z = \frac{1+x}{1-x}$, erit $x = \frac{z-1}{z+1}$, ſicque tota haec pars prior integralis quaeſiti per z exprimi poterit.

§. 4. Pro altera parte Q ponatur $u = q\sqrt[4]{2}$, fietque $Q = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \int \frac{qq\,\partial q}{1-q^4}$. Nunc vero eſt

$$\frac{qq}{1-q^4} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-qq} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+qq},$$

vnde fiet

$$\int \frac{qq\partial q}{1-q^4} = \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial q}{1-qq} - \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial q}{1+qq} = \tfrac{1}{2} l \frac{1+q}{1-q} - \tfrac{1}{2} \text{A tang. } q.$$

Hoc ergo modo prodit

$$Q = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} l \frac{1+q}{1-q} - \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \text{A tang. } q,$$

conſequenter ipſa altera pars integralis erit

$$2^{\frac{5}{4}} Q = \tfrac{1}{2} l \frac{1+q}{1-q} - \text{A tang. } q.$$

Vbi eſt $q = \frac{u}{\sqrt[4]{2}}$, porro vero $u = \sqrt[4]{(1+x^4)}$, denique vero, vt vidimus, eſt $x = \frac{z-1}{z+1}$.

§. 5. Quoniam igitur omnes iſti valores ſunt cogniti, formulae propoſitae integrale quaeſitum erit

$$\int \frac{\partial z\,(3+zz)}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}} + \tfrac{1}{2}\int \frac{1+p}{1-p} + \tfrac{1}{2}\int \frac{1+q}{1-q}$$

$$+ \text{A tang. } p - \text{A tang. } q,$$

vbi notetur eſſe

$$p = \frac{z-1}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}} \text{ et } q = \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}.$$

§. 6. His ergo valoribus ſubſtitutis noſtrum integrale erit

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}+z-1}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}-z+1} + \tfrac{1}{2}\int \frac{1+\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}{1-\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}$$

$$+ \text{A tang. } \frac{z-1}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}} - \text{A tang. } \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}.$$

Vbi notetur ambos arcus circulares ita in vnum colligi poſſe, vt prodeat

$$\text{A tang. } \frac{z-1-\sqrt{(1+6zz+z^4)}}{z\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}.$$

Ambo autem logarithmi ita in vnum colligi poterunt:

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{z\sqrt{(1+6zz+z^4)}+z-1+\sqrt{(1+6zz+z^4)}}{z\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}-z+1-\sqrt{(1+6zz+z^4)}}.$$

§. 7.

§. 7. Haec adhuc commodius exprimi poterunt. Si enim breuitatis gratia ponamus $\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)} = v$, pars logarithmica noſtri integralis erit

$$\tfrac{1}{2} l \frac{vz+z-1+vv}{vz-z+1-vv} = \tfrac{1}{2} l \frac{(1+v)(z-1+v)}{(v-1)(z-1-v)},$$

altera vero pars circularis eſt

$$\text{A tang.} \frac{z-1-vv}{vz}.$$

PROBLEMA GEOMETRICVM,

QVO INTER OMNES ELLIPSES, QVAE PER DATA QVATVOR PVNCTA TRADVCI POSSVNT, EA QVAERITVR, QVAE HABET AREAM MINIMAM.

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 4 Sept. 1777.

§. 1.

Casum huius problematis, quo quatuor puncta in angulis parallelogrammi rectanguli constituta assumuntur, iam olim solutum dedi; verum problema generale tum temporis adgredi non sum ausus, propter ingentem quantitatum numerum, quae in calculum introduci deberent, vnde formulae analyticae penitus inextricabiles orirentur: quamobrem Geometris haud ingratum fore spero, si hic solutionem satis succinctam istius Problematis difficillimi tradidero.

§. 2. Primo igitur quatuor puncta data ita dispositа esse debent, vt per ea saltem vnam ellipsin ducere liceat, id quod euenit, quando quodlibet istorum punctorum extra triangulum per terna reliqua formatum incidit. Statim vero atque vnica ellipsis per haec puncta duci potest, iam

satis

ſatis conſtat ſimul quoque infinitas alias traduci poſſe, inter quas ergo noſtrum problema iubet eam inueſtigare, cuius area omnium ſit minima.

§. 3. Sint igitur A, B, C, D, quatuor illa puncta, per quae ellipſes tranſire oporteat. Agatur per bina quaeuis puncta A et B linea recta O A B, pro axe habenda, cui recta, per bina reliqua puncta C et D ducta, occurrat in puncto O, vbi initium abſciſſarum conſtituamus. Applicatas vero hic non more ſolito axi O A B normales, ſed alteri directioni O C D parallelas ſtatuamus; ſcilicet ſi vocetur abſciſſa $OX = x$, applicata ei reſpondens $XY = y$ ſemper rectae O C D parallela eſt concipienda. Vocetur ergo iſte angulus obliquitatis $AOC = \omega$, et quoniam quatuor puncta A, B, C, D, ſunt data, vocemus eorum diſtantias a puncto O vt ſequitur: $OA = a$; $OB = b$; $OC = c$ et $OD = d$, vnde ſtatim tam ipſa latera quam diagonales per haec quatuor puncta tranſeuntes exprimere poterimus. Primo enim erit $AB = b - a$ et $CD = d - c$; tum vero erunt rectae in figura non expreſſae: Tab. I. Fig. 2.

$$AC = \sqrt{(cc + aa - 2ac \text{ cof. } \omega)},$$
$$AD = \sqrt{(aa + dd - 2ad \text{ cof. } \omega)},$$
$$BC = \sqrt{(bb + cc - 2bc \text{ cof. } \omega)},$$
$$BD = \sqrt{(bb + dd - 2bd \text{ cof. } \omega)}.$$

Caeterum hic obſeruetur perinde eſſe, per quaenam datorum punctorum axis traducatur, dummodo directio applicatarum per duo reliqua puncta tranſeat; quod notaſſe iuuabit, quando forte rectae A B et C D fuerint inter ſe parallelae; tum enim axem per puncta A et D vel B et C duci conueniet.

§. 4. Quia nunc curuas per quatuor puncta A, B, C, D, ducendas ellipſes eſſe oportet, aequatio inter coordi-

natas $OX = x$ et $XY = y$ hac forma repraeſentetur:

$$A\,x\,x + 2\,B\,x\,y + C\,y\,y + 2\,D\,x + 2\,E\,y + F = 0,$$

in qua ergo primo litterae A et C eodem ſigno debent eſſe affectae; praeterea vero earum productum A C maius eſſe debet, quam B B, quia alioquin curuae in hac aequatione contentae forent hyperbolae. Vt nunc iſtam aequationem generalem ad ſtatum propoſitum accommodemus, ſtatuamus primo $y = 0$, vnde aequatio abibit in hanc formam: $A\,x\,x + 2\,D\,x + F = 0$, quae ergo praebere debet bina puncta in axe poſita, ſcilicet A et B, pro quorum illo ſit $x = a$, pro hoc vero $x = b$, quae ergo eſſe debent radices illius aequationis $A\,x\,x + 2\,D\,x + F = 0$; quamobrem ſtatuamus

$$A\,x\,x + 2\,D\,x + F = m\,(x - a)\,(x - b),$$

vnde fiet

$$A = m;\ D = -\tfrac{m(a+b)}{2} \text{ et } F = m\,a\,b.$$

§. 5. Ponamus nunc ſimili modo abſciſſam $x = 0$, vnde aequatio euadit $C\,y\,y + 2\,E\,y + F = 0$, cuius radices dare debent puncta C et D, ſiue eius radices eſſe debent $y = c$ et $y = d$; quamobrem ſtatuatur:

$$C\,y\,y + 2\,E\,y + F = n\,(y - c)\,(y - d),$$

vnde ſit

$$C = n;\ E = -\tfrac{n(c+d)}{2} \text{ et } F = n\,c\,d.$$

Ante vero inueneramus $F = m\,a\,b$, qui valores vt congruant, capiatur $m = c\,d$ et $n = a\,b$; quocirca aequatio generalis quatuor data puncta complectetur, ſi fiat:

$$A = c\,d;\ C = a\,b;\ 2\,D = -c\,d\,(a+b);$$
$$2\,E = -a\,b\,(c+d) \text{ et } F = a\,b\,c\,d,$$

ita vt iam omnes litterae, praeter B, ſint determinatae. Hoc ergo

ergo modo littera B indeterminata relinquitur, ac pro variis valoribus innumerabiles naſcentur ellipſes per eadem quatuor puncta A, B, C, D tranſeuntes, dummodo accipiatur $BB < AC$. Si enim ſumeretur $BB = AC$, curua foret parabola, ſiue ellipſis infinite longa, cuius ergo area etiam foret infinita, quamobrem quaeſtio propoſita ad minimam aream adſtringitur. Sin autem adeo eſſet $BB > AC$ curuae forent hyperbolae, ideoque a noſtro problemate excluduntur.

§. 6. Quaeramus nunc applicatam XY. Manifestum autem eſt cuilibet abſciſſae $CX = x$ geminam applicatam reſpondere debere XY et XY′, quandoquidem iſta applicata curuam ſecabit in duobus punctis Y et Y′, quae ergo applicatae erunt radices aequationis noſtrae generalis, cuius reſolutio dabit Tab. I. Fig. 3.

$$y = -\frac{E - Bx \pm \sqrt{[(E+Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC]}}{C},$$

quorum duorum valorum alter dabit applicatam XY alter vero applicatam XY′, ita vt ſit:

$$XY = -\frac{E - Bx - \sqrt{[(E+Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC]}}{C} \text{ et}$$

$$XY' = -\frac{E - Bx + \sqrt{[(E+Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC]}}{C}.$$

§. 7. Quia nunc ambo puncta Y et Y′ ſita ſunt in ellipſi per puncta A, B, C, D tranſeunte, interuallum YY′ intra ellipſin continebitur. Quare cum ſit $YY' = XY' - XY$, erit iſtud interuallum:

$$YY' = \frac{2\sqrt{[(E+Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC]}}{C}.$$

Quod ſi iam illi applicatae ducatur proxima xyy', ea a priore remota eſt interuallo xv (ducta ſcilicet ex x in

XY

X Y perpendiculari $x v$, quae ob $X x = \partial x$ et angulum $x X v = \omega$, erit $x v = \partial x \sin. \omega$) per quod si interuallum Y Y′ multiplicetur, orietur elementum areae Y Y′ $y y'$, quod ergo erit

$$= \frac{2 \partial x \sin. \omega}{C} \sqrt{[(E + B x)^2 - A C x x - 2 C D x - F C]},$$

cuius ergo integrale, per totam ellipsin extensum, dabit totam aream ellipsis quam consideramus.

§. 8. Quoniam quadratura ellipsis pendet a quadratura circuli, hoc integrale commodissime inueniemus, si rem ad circulum referamus. Consideremus igitur circulum, cuius radius sit $a r = r$, ideoque eius area $= \pi r r$, in quo capiatur elementum analogum Y′ y' y Y, ad quod ex centro a ducatur normalis $a T = t$, eritque Y Y′ $= 2 \sqrt{(r r - t t)}$, ideoque elementum areae Y Y′ $y' y = 2 \partial t \sqrt{(r r - t t)}$. Hinc discimus, si integrale per totam figuram extendatur, fore $\int 2 \partial t \sqrt{(r r - t t)} = \pi r r$, vnde si vtrinque per n multiplicemus, erit

Tab. I. Fig. 4.

$$\int 2 \partial t \sqrt{(n n r r - n n t t)} = \pi n r r,$$

eodemque modo

$$\int 2 m \partial t \sqrt{(n n r r - n n t t)} = \pi m n r r.$$

§. 9. Quo nunc hanc formam ad nostrum institutum accommodemus, sumamus $t = x + f$, eritque

$$\int 2 m \partial x \sqrt{[n n r r - n n (x + f)^2]} = \pi m n r r,$$

hincque

$$\int 2 m \partial x \sin. \omega \sqrt{[n n r r - n n (x + f)^2]} = \pi m n r r \sin. \omega.$$

Tantum igitur superest, vt istam formulam ad nostrum casum accommodemus, id quod fiet sumendo $m = \frac{1}{C}$, deinde vero

$n n r r$

$$nnrr - nn(x+f)^2 = (E+Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC,$$

quae aequatio euoluta ita se habebit:

$$nnrr - nnff - 2nnfx - nnxx = EE - FC + 2(BE - CD)x + (BB - AC)xx,$$

Hinc patet esse debere 1°.) $nn = AC - BB$, ideoque $n = \sqrt{(AC - BB)}$; 2°.) esse debet $nnf = CD - BE$, ideoque $f = \frac{CD - BE}{AC - BB}$; 3°.) vero necesse est vt fiat

$$rr = ff + \frac{EE - FC}{nn},$$

vbi si valores inuentos substituamus, prodibit:

$$rr = \frac{(CD - BE)^2}{(AC - BB)^2} + \frac{EE - FC}{AC - BB},$$

siue

$$rr = \frac{CCDD - 2BCDE + ACEE}{(AC - BB)^2} - \frac{CF}{AC - BB}.$$

His valoribus inuentis area tota nostrae ellipsis debet esse $= \pi mnrr \sin.\omega$, vnde facta substitutione obtinebitur sequens expressio:

$$\pi \frac{(CDD - 2BDE + AEE)\sin.\omega}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\pi F \sin.\omega}{\sqrt{(AC - BB)}},$$

quae area etiam hoc modo exhiberi potest:

$$\pi \sin.\omega \left(\frac{CDD + AEE - 2BDE}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{F}{\sqrt{(AC - BB)}} \right).$$

Haec expressio ideo maxime est notatu digna, quod eius ope omnium ellipsium areae totae satis expedite assignari possunt ex sola aequatione inter coordinatas, siue eae sint rectangulae siue obliquangulae. Ita si habeatur aequatio notissima pro ellipsi: $ffxx + ggyy = ffgg$, inter coordi-

natas rectangulas, erit primo fin. $\omega = 1$; tum vero $A = ff$; $B = 0$; $C = gg$; $D = 0$; $E = 0$; $F = -ffgg$, vnde tota area huius ellipſis per regulam noſtram erit $= \pi fg$.

§. 10. Quoniam igitur hoc modo omnium ellipſium per data quatuor puncta A, B, C, D, tranſeuntium areae innoteſcunt, tantum ſupereſt, vt inter omnes has areas minima inueſtigetur. Quare cum praeter litteram B reliquae omnes per quatuor data puncta ſint determinatae, ſiquidem inuenimus eſſe $A = cd$; $C = ab$; $2D = -cd(a+b)$; $2E = -ab(c+d)$ et $F = abcd$: quaeſtio huc redit, vt quaeratur valor litterae B, qui formulam modo inuentam reddat omnium minimam, ſiue vt, poſito breuitatis gratia $CDD + AEE = \Delta$, haec formula:

$$\frac{\Delta - 2BDE}{(AC-BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{F}{\sqrt{(AC-BB)}},$$

minima efficiatur.

§. 11. Tractetur ergo littera B tanquam variabilis, huiusque expreſſionis differentiale nihilo aequale ſtatuatur, vnde naſcetur ſequens aequatio:

$$\frac{2DE}{(AC-BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{BF}{(AC-BB)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3B(\Delta - 2BDE)}{(AC-BB)^{\frac{5}{2}}} = 0,$$

quae ducta in $(AC-BB)^{\frac{5}{2}}$ producet hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{r} -2ACDE + 3CDDB - 4DEBB + FB^3 \\ +3AEEB \\ -ACFB \end{array}\right\} = 0.$$

§. 12

§. 12. Ecce ergo tota ſolutio problematis propoſiti perducta eſt ad reſolutionem aequationis cubicae, quae cum ſemper habeat radicem realem, certum eſt, quomodocunque quatuor puncta fuerint diſpoſita, ſemper vnam ellipſin aſſignari poſſe per quatuor illa puncta tranſeuntem, cuius area omnium ſit minima, pro qua aequatio inter coordinatas x et y exhiberi poterit, ſi modo loco B radix ex illa aequatione cubica oriunda ſubſtituatur. Quodſi forte eueniat vt aequatio illa cubica tres admittat radices reales, totidem quoque ſolutiones locum habebunt, quarum autem indolem aliis perſcrutandam relinquo.

APPLICATIO

huius ſolutionis ad caſum, quo ellipſis minima dato parallelogrammo circumſcribenda quaeritur.

§. 13. Cum hic latera oppoſita ſint inter ſe parallela, neutrum eorum pro axe accipi conuenit; quamobrem alteram diagonalem pro axe ſumamus, alteri vero applicatas parallelas ſtatuamus. Sit igitur A D B C parallelogrammum propoſitum, cuius diagonales A B et C D ſe mutuo in O interſecent, vocenturque $AO = BO = a$ et $CO = OD = c$, angulus vero $AOC = \theta$. Quibus poſitis ponatur abſciſſa quaecunque, ſuper diagonali A B a puncto O ſumta, $OX = x$, eique applicata reſpondens, alteri diagonali C D parallela, $XY = y$, ſitque aequatio relationem inter x et y exprimens: Tab. I. Fig. 5.

$$Axx + 2Bxy + Cyy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

atque ſupra §. 9. vidimus aream ellipſis eſſe

$$\pi \text{ fin. } \theta \left(\frac{CDD + AEE - 2BDE}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{F}{\sqrt{(AC - BB)}} \right).$$

§. 14. Accommodemus igitur iſtam aequationem generalem ad caſum propoſitum, ac primo quidem manifeſtum eſt, applicatam y euaneſcere debere in punctis A et B, pro quibus fit $x = +a$ et $x = -a$, vnde oriuntur hae duae aequationes:

$$A\,a\,a + 2\,D\,a + F = 0 \text{ et}$$
$$A\,a\,a - 2\,D\,a + F = 0,$$

vnde ſequitur eſſe $F = -A\,a\,a$ et $D = 0$. Deinde poſito $x = 0$, fieri debet tam $y = +c$ quam $y = -c$, vnde oriuntur hac duae aequationes:

$$C\,c\,c + 2\,E\,c + F = 0 \text{ et}$$
$$C\,c\,c - 2\,E\,c + F = 0,$$

hincque fit $F = -C\,c\,c$ et $E = 0$. Cum igitur eſſe debeat $A\,a\,a = C\,c\,c$, ſumi conueniet $A = c\,c$ et $C = a\,a$, ita vt ſit $F = -a\,a\,c\,c$, ideoque aequatio pro curua noſtra erit

$$c\,c\,x\,x + 2\,B\,x\,y + a\,a\,y\,y - a\,a\,c\,c = 0.$$

§. 15. Hinc ergo area iſtius ellipſis hoc modo exprimetur: $\frac{\pi\,a\,a\,c\,c\,\text{ſin. }\theta}{\sqrt{(a\,a\,c\,c - B\,B)}}$, quae omnium fit minima ſumto $B = 0$. Sit igitur $B = 0$, atque pro ellipſi omnium minima habebimus hanc aequationem:

$$c\,c\,x\,x + a\,a\,y\,y - a\,a\,c\,c = 0,$$

cuius area erit $= \pi\,a\,c$ fin. θ. Vbi notetur aream huius parallelogrammi eſſe $= 2\,a\,c$ fin. θ, ita vt area ellipſis ſe habeat ad aream parallelogrammi vt π ad 2.

§. 16.

§. 16. Apparet ergo huius ellipſis centrum cadere in ipſum punctum O, atque ambas diagonales AB et CD eius fore diametros coniungatos, ſub angulo obliquitatis $AOC = \theta$ inuicem inclinatos; ex quo ſequitur tangentes in punctis A et B diametro CD eſſe parallelas, tangentes vero in punctis C et D parallelas diametro AB, vnde haec curua facile deſcribitur. Quodſi angulus θ fuerit rectus, parallelogrammum abit in rhombum, cuius diagonales AB et CD erunt axes principales ellipſis.

§. 17. Sin autem ambae diagonales AB et CD fuerint inter ſe aequales, manente angulo θ obliquo, parallelogrammum noſtrum abit in rectangulum; huncque caſum iam olim ſum contemplatus, ellipſinque minimam determinaui tali rectangulo circumſcribendam, quae ſolutio quoque cum praeſenti egregie conuenit.

§. 18. Videamus nunc etiam quomodo axes principales ellipſis inuentae in genere definiri oporteat. Poſitis ergo coordinatis $OX = x$ et $XY = y$, exiſtente angulo $AXY = \theta$, inuenimus hanc aequationem: Tab. II. Fig. 1.

$$ccxx + aayy - aacc = 0.$$

Ponamus nunc OF eſſe ſemiaxem principalem huius ellipſis, inclinatum ad rectam OA ſub angulo $AOF = \Phi$, et referamus punctum ellipſis Y ad iſtum axem OF, per coordinatas orthogonales $Ox = X$ et $xY = Y$. Quem in finem ex x ducamus prioribus coordinatis parallelas xu et xt, atque in triangulo Oxt erit angulus $Oxt = \theta - \Phi$; in triangulo vero xuY, ob angulum $Oxu = \Phi$, erit angulus $uxY = 90^0 - \Phi$, et angulus xYu complementum anguli $\theta - \Phi$, tum vero angulus $xuY = \theta$.

§. 19. Iam resolutio horum triangulorum praebet:

$$O't = \frac{X \sin.(\theta - \Phi)}{\sin.\theta} \text{ et } tx = \frac{\sin.\Phi}{\sin.\theta};$$

porro vero

$$xu = \frac{Y \cos.(\theta - \Phi)}{\sin.\theta} \text{ et } Yu = \frac{Y \cos.\Phi}{\sin.\theta},$$

vnde per X et Y priores coordinatae x et y ita determinantur, vt fit

$$x = \frac{X \sin.(\theta - \Phi) - Y \cos.(\theta - \Phi)}{\sin.\theta} \text{ et } y = \frac{X \sin.\Phi + Y \cos.\Phi}{\sin.\theta},$$

qui valores in aequatione:

$$c\,c\,x\,x + a\,a\,y\,y = a\,a\,c\,c,$$

substituti producunt inter X et Y hanc aequationem:

$$\left.\begin{aligned} c\,c\,X\,X \sin.(\theta-\Phi)^2 - 2\,c\,c\,X\,Y \sin.(\theta-\Phi)\cos.(\theta-\Phi) \\ + c\,c\,Y\,Y \cos.(\theta-\Phi)^2 \\ + a\,a\,X\,X \sin.\Phi^2 - 2\,a\,a\,X\,Y \sin.\Phi \cos.\Phi \\ + a\,a\,Y\,Y \cos.\Phi^2 \end{aligned}\right\} = a\,a\,c\,c \sin.\theta^2.$$

In hac igitur aequatione, quia ad axem principalem refertur, ante omnia termini continentes X Y se mutuo destruere debent, vnde fit

$$c\,c \sin.(\theta - \Phi)\cos.(\theta - \Phi) = a\,a \sin.\Phi \cos.\Phi,$$

ex qua aequatione angulum Φ eruere licet. Cum enim sit

$$a\,a \sin.2\Phi = c\,c \sin.(2\theta - 2\Phi) = c\,c \sin.2\theta \cos.2\Phi - c\,c \cos.2\theta \sin.2\Phi,$$

per $\sin.2\Phi$ diuidendo habebimus:

$$a\,a = c\,c \sin.2\theta \cos.2\Phi - c\,c \cos.2\theta,$$

hincque fiet

$$\cos.2\Phi \frac{a\,a + c\,c \cos.2\theta}{c\,c \sin.2\theta},$$

vnde duplex valor pro angulo Φ elicitur, pro vtriusque axis principalis positione.

§. 20.

§. 20. Sublato iam termino X Y aequatio noſtra erit

$$\left\{\begin{array}{l} X\,X\,[c\,c\,\text{fin.}\,(\theta-\Phi)^2+a\,a\,\text{fin.}\,\Phi^2] \\ +\,Y\,Y\,[c\,c\,\text{cof.}\,(\theta-\Phi)^2+a\,a\,\text{cof.}\,\Phi^2] \end{array}\right\} = a\,a\,c\,c\,\text{fin.}\,\theta^2,$$

vnde ambo ſemiaxes principales, qui ſint f et g, ſequenti modo definientur:

$$ff = \frac{a\,a\,c\,c\,\text{ſin.}\,\theta^2}{c\,c\,\text{ſin.}\,(\theta-\Phi)^2+a\,a\,\text{ſin.}\,\Phi^2} \text{ et } gg = \frac{a\,a\,c\,c\,\text{ſin.}\,\theta^2}{c\,c\,\text{cof.}\,(\theta-\Phi)^2+a\,a\,\text{cof.}\,\Phi^2},$$

ſicque erit

$$\frac{a\,a\,c\,c\,\text{ſin.}\,\theta^2}{ff} = c\,c\,\text{fin.}\,(\theta-\Phi)^2+a\,a\,\text{fin.}\,\Phi^2 \text{ et}$$
$$\frac{a\,a\,c\,c\,\text{ſin.}\,\theta^2}{g\,g} = c\,c\,\text{cof.}\,(\theta-\Phi)^2+a\,a\,\text{cof.}\,\Phi^2,$$

vnde ob iam inuentum angulum Φ ambo ſemiaxes principales f et g determinari poterunt.

§. 21. Si duae poſtremae aequalitates addantur, orietur iſta aequatio:

$$\frac{a\,a\,c\,c\,\text{ſin.}\,\theta^2\,(ff+g\,g)}{ff\,g\,g} = c\,c+a\,a, \text{ ſiue}$$
$$\frac{ff+g\,g}{ff\,g\,g} = \frac{a\,a+c\,c}{a\,a\,c\,c\,\text{ſin.}\,\theta^2}.$$

Deinde vero ſi in prioris aequationis

$$\frac{a\,a\,c\,c\,\text{ſin.}\,\theta^2}{ff} = c\,c\,\text{fin.}\,(\theta-\Phi)^2+a\,a\,\text{fin.}\,\Phi^2,$$

membro dextro loco cc ſcribatur valor $\frac{a\,a\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,(\theta-\Phi)\,\text{cof.}\,\theta-\Phi)}$, prodibit haec aequatio:

$$\frac{c\,c\,\text{ſin.}\,\theta^2}{ff} = \frac{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,(\theta-\Phi)}{\text{cof.}\,(\theta-\Phi)}+\text{fin.}\,\Phi^2$$
$$= \frac{\text{ſin.}\,\Phi\,[\text{cof.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,(\theta-\Phi)+\text{ſin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,(\theta-\Phi)]}{\text{cof.}\,(\theta-\Phi)} = \frac{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{cof.}\,(\theta-\Phi)},$$

ſicque erit $\frac{c\,c\,\text{ſin.}\,\theta}{ff} = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\text{cof.}\,(\theta-\Phi)}$. Tum vero ſi in alterius aequationis

$$\frac{a\,a\,c\,c\,\text{ſin.}\,\theta^2}{g\,g} = c\,c\,\text{cof.}\,(\theta-\Phi)+a\,a\,\text{cof.}\,\Phi^2.$$

mem-

membro dextro loco aa ſcribatur valor $\frac{cc\,\mathrm{ſin.}(\theta-\Phi)\,\mathrm{cof.}(\theta-\Phi)}{\mathrm{ſin.}\,\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi}$, prodibit haec aequatio:

$$\frac{aa\,\mathrm{ſin.}\,\theta^2}{gg} = \mathrm{cof.}(\theta-\Phi)^2 + \frac{\mathrm{ſin.}(\theta-\Phi)\,\mathrm{cof.}(\theta-\Phi)\,\mathrm{cof.}\,\Phi}{\mathrm{ſin.}\,\Phi}$$
$$= \frac{\mathrm{cof.}(\theta-\Phi)}{\mathrm{ſin.}\,\Phi}[\mathrm{ſin.}\Phi\,\mathrm{cof.}(\theta-\Phi)+\mathrm{cof.}\Phi\,\mathrm{ſin.}(\theta-\Phi)] = \frac{\mathrm{ſin.}\,\theta\,\mathrm{cof.}(\theta-\Phi)}{\mathrm{in.}\,\Phi}.$$

vnde fit $\frac{aa\,\mathrm{ſin.}\,\theta}{gg} = \frac{\mathrm{cof.}(\theta-\Phi)}{\mathrm{ſin.}\,\Phi}$.

§. 22. Nunc binae poſtremae aequalitates in ſe invicem ductae dabunt $\frac{aaccſin.\theta^2}{ffgg} = 1$, ideoque

$$ffgg = aacc\,\mathrm{ſin.}\,\theta^2,$$

conſequenter $fg = ac\,\mathrm{ſin.}\,\theta$, in qua aequatione continetur inſignis illa proprietas, qua parallelogrammum circa binos diametros coniugatos deſcriptum aequale perhibetur parallelogrammo circa axes principales deſcripto. Cum deinde ſupra inuenerimus $\frac{ff+gg}{ffgg} = \frac{aa+cc}{aaccſin.\theta^2}$, quoniam modo vidimus eſſe $aa+cc\,\mathrm{ſin.}\,\theta^2 = ffgg$, hinc reſultat altera principalis proprietas, qua eſt $aa+cc = ff+gg$, ſcilicet in omni ellipſi ſummae quadratorum duorum diametrorum ſemper aequales ſunt ſummae quadratorum axium principalium.

§. 23. Applicemus haec ad caſum rectangulorum iam dudum tractatum, pro quo eſt $c = a$, atque pro ſitu axium principalium nunc habebitur iſta aequatio:

$$\mathrm{cof.}\,2\Phi = \frac{1+\mathrm{cof.}\,2\theta}{\mathrm{ſin.}\,2\theta},$$

vnde colligitur

$$\mathrm{cof.}\,2\Phi = \frac{1+\mathrm{cof.}\,2\theta}{\sqrt{2(1+\mathrm{cof.}\,2\theta)}} = \sqrt{\frac{1+\mathrm{cof.}\,2\theta}{2}}.$$

Conſtat autem eſſe

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{cof.}\,2\theta}{2}} = \pm\,\mathrm{cof.}\,\theta,$$

vnde

vnde fit vel $2\Phi = \theta$, ideoque $\Phi = \frac{1}{2}\theta$; vel $2\Phi = \pi + \theta$, ideoque $\Phi = 90^0 + \frac{1}{2}\theta$. Hinc igitur patet alterum axem principalem O F angulum A O C $= \theta$ bifecare, alterumque O G, huic normalem, angulum B O C bifecare. Deinde vero erit Tab. II. Fig. 2.

$$fg = aa \text{ fin. } \theta \text{ et } ff + gg = 2aa,$$

vnde colligimus:

$$(f+g)^2 = 2aa(1 + \text{fin. } \theta) = 4aa \text{ cof. } (45^0 - \tfrac{1}{2}\theta)^2,$$

ideoque erit

$$f + g = 2a \text{ cof. } (45^0 - \tfrac{1}{2}\theta).$$

Simili modo habebitur:

$$(f-g)^2 = 2aa(1 - \text{fin. } \theta) = 4aa \text{ fin. } (45^0 - \tfrac{1}{2}\theta)^2,$$

conſequenter

$$f - g = 2a \text{ fin. } (45^0 - \tfrac{1}{2}\theta),$$

quocirca habebimus

$$f = a[\text{cof. } (45^0 - \tfrac{1}{2}\theta) + \text{fin. } (45^0 - \tfrac{1}{2}\theta)] = a \text{ cof. } \tfrac{1}{2}\theta . \sqrt{2},$$

ſimilique modo

$$g = a[\text{cof. } (45^0 - \tfrac{1}{2}\theta) - \text{fin. } (45^0 - \tfrac{1}{2}\theta)] = a \text{ fin. } \tfrac{1}{2}\theta . \sqrt{2},$$

qui valores manifeſto ſatisfaciunt; fit enim

$$fg = aa \text{ fin. } \theta \text{ et } ff + gg = 2aa,$$

haecque ſolutio perfecte congruit cum ea quam olim dederam.

SOLVTIO
PROBLEMATIS MAXIME CVRIOSI,
QVO INTER OMNES ELLIPSES,
QVAE CIRCA DATVM TRIANGVLVM CIRCVMSCRIBI POSSVNT, EA QVAERITVR, CVIVS AREA SIT OMNIVM MINIMA.

Auctore
L. EVLERO.

Conuentui exhibit. die 4 Sept. 1777.

§. 1.

Poſtquam hoc problema pluribus modis iam olim fruſtra tentaſſem, nuper tandem incidi in methodum prorſus ſingularem eius ſolutionem inueſtigandi, quae eo magis eſt notatu digna, quod ad conſtructionem valde ſimplicem et facilem perducat. Vſus ſcilicet ſum eadem methodo, qua nuper inter omnes ellipſes, quas per data quatuor puncta traducere licet, eam aſſignare docui, quae minimam habeat aream, vnde praecipua calculi ſubſidia ex illa diſſertatione ſum petiturus.

Tab. II. Fig. 3. §. 2. Sit igitur A B C triangulum propoſitum, cuius angulum ad B vocemus $= \omega$, bina autem latera hunc angu-

angulum formantia vocemus $BA = a$ et $BC = c$, ita vt ſit tertium latus:

$$AC = \sqrt{(aa + cc - 2ac \text{ cof. } \omega)};$$

praeterea vero notaſſe iuuabit aream huius trianguli eſſe $= \frac{1}{2} ac \text{ fin. } \omega$. Videbimus autem ſemper aream minimae ellipſis, per terna puncta A, B, C, tranſeuntis, certam tenere rationem ad aream huius trianguli, quippe quae ratio reperietur vt 4π ad $3\sqrt{3}$.

§. 3. Sit Y punctum quodcunque in ellipſi quaeſita, cuius ſitum definiamus per binas coordinatas obliquangulas binis lateribus BA et BC parallelas; quamobrem, ducta recta XY, lateri BC parallela, vocemus has coordinatas $BX = x$ et $XY = y$, quarum relatio exprimatur per hanc aequationem generaliſſimam ſecundi ordinis:

$$Axx + 2Bxy + Cyy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

atque in diſſertatione memorata, vbi quatuor puncta ſum contemplatus, oſtendi totam aream huius ellipſis eſſe:

$$= \pi \text{ fin. } \omega \left(\frac{CDD + AEE - 2BDE}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{F}{\sqrt{(AC - BB)}} \right),$$

vbi more ſolito π denotat peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$.

§. 4. Ante omnia igitur iſtam formam generalem ad caſum noſtri trianguli accommodemus. Ac primo quidem cum ſumto $x = 0$ pro ipſo puncto B fiat quoque $y = 0$, manifeſtum eſt ſtatui debere $F = 0$, vnde area ſuperior iam ſimplicius exprimetur. Deinde cum pro puncto A ſit $x = a$ et $y = 0$, aequatio generalis dabit $Aaa + 2Da = 0$, vnde ſit $2D = -Aa$. Tertio vero pro puncto C erit $x = 0$

et $y = c$, vnde fit $C\,c\,c + 2\,E\,c = 0$, ideoque $2\,E = -C\,c$. Aequatio igitur generalis, ad caſum propoſitum accommodata, erit

$$A\,x\,x + 2\,B\,x\,y + C\,y\,y - A\,a\,x - C\,c\,y = 0,$$

quae ergo omnes plane ellipſes complectitur, quae per data tria puncta A, B, C traduci poſſunt; in qua aequatione ergo adhuc inſunt tres litterae indefinitae, ſcilicet A, B et C.

§. 5. Has igitur litteras ita determinari oportet, vt area ellipſis omnium minima reddatur. Cum igitur ſit $F = 0$; $D = -\frac{1}{2}A\,a$ et $E = -\frac{1}{2}C\,c$, area ellipſis ex formula generali ſupra data ita exprimetur:

$$\tfrac{1}{4}\pi \text{ ſin. } \omega \left(\frac{A\,A\,C\,a\,a + A\,C\,C\,c\,c - 2\,A\,B\,C\,a\,c}{(A\,C - B\,B)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

vbi ergo litteras A, B, C ita definiri oportet, vt iſta expreſſio omnium euadat minima; vnde patet duplicem inueſtigationem minimi inſtitui debere.

§. 6. Quo iſtam formulam ad calculum propius accommodemus, ſtatuamus primo $B = \text{cof. } \Phi \sqrt{A\,C}$, vt fiat

$$A\,C - B\,B = A\,C \text{ ſin. } \Phi^2, \text{ ideoque}$$

$$(A\,C - B\,B)^{\frac{3}{2}} = A\,C \text{ ſin. } \Phi^3 \sqrt{A\,C},$$

quo valore introducto area ellipſis fiet

$$= \tfrac{1}{4}\pi \text{ ſin. } \omega \left(\frac{A\,a\,a + C\,c\,c - 2\,a\,c \text{ cof. } \Phi \sqrt{A\,C}}{\text{ſin. } \Phi^3 \sqrt{A\,C}} \right).$$

Nunc ad irrationalitatem penitus tollendam fiat $C = A\,s\,s$, vt ſit $\sqrt{A\,C} = A\,s$, hocque modo area noſtra erit

$$\tfrac{1}{4}\pi \text{ ſin. } \omega \left(\frac{a\,a + c\,c\,s\,s - 2\,a\,c\,s \text{ cof. } \Phi}{s \text{ ſin. } \Phi^3} \right),$$

et quaeſtio iam huc redit, quemadmodum quantitatem s et

et angulum Φ determinari oporteat, vt valor huius expreſſionis: $\frac{aa+ccss-2acs\,cof.\Phi}{s\,ſin.\Phi^3}$, omnium minimus reddatur?

§. 7. Ponamus angulo Φ iam datum eſſe valorem debitum; ita vt ſola quantitas s inueſtigari debeat, qua iſti formulae minimus valor concilietur; in qua ergo inueſtigatione angulus Φ vt conſtans, ſola autem s vt variabilis erit conſideranda, ſicque minima reddi debebit haec expreſſio:

$$\frac{aa+ccss-2acs\,cof.\Phi}{s} = \frac{aa+ccss}{s} - 2ac\,\text{cof.}\,\Phi,$$

cuius pars poſtrema iam eſt conſtans, vnde tantum haec formula: $\frac{aa}{s}+ccs$, ad minimum perduci debet, cuius ergo differentiale nihilo aequatum praebet hanc aequationem: $ccss-aa=0$, vnde colligitur $s=\frac{a}{c}$. Erat autem $ss=\frac{C}{A}$, ideoque ſumi debet $\frac{C}{A}=\frac{aa}{cc}$. Quoniam igitur in aequatione noſtra ſola ratio inter litteras A et C ſpectatur, ſumamus $A=cc$ et $C=aa$, hocque modo iam adimpleuimus vnam minimi conditionem.

§. 8. Loco A et C ſcribamus iſtos valores inuentos, atque area ellipſis, ex parte iam minima reddita, erit

$$\tfrac{1}{4}\pi\,\text{ſin.}\,\omega\left(\frac{2ac(1-cof.\Phi)}{ſin.\Phi^3}\right)=\tfrac{1}{2}\pi ac\,\text{ſin.}\,\omega\left(\frac{1-cof.\Phi}{ſin.\Phi^3}\right).$$

Tantum igitur angulus Φ ita definiendus reſtat, vt formula $\frac{1-cof.\Phi}{ſin.\Phi^3}$ minima euadat. Cum autem ſit $ſin.\Phi^2=1-cof.\Phi^2$, iſta formula $\frac{1-cof.\Phi}{ſin.\Phi^3}$ transmutatur in hanc: $\frac{1}{ſin.\Phi(1+cof.\Phi)}$, cuius ergo fractionis denominatorem maximum reddi oportet; eius autem differentiatio hanc dat aequationem: $cof.\Phi+cof.\Phi^2-ſin.\Phi^2=0$, ſiue $cof.\Phi+2\,cof.\Phi^2-1=0$, quae manifeſto reſoluitur in hos factores: $(1+cof.\Phi)(2\,cof.\Phi-1)=0$, vnde duae ſequuntur ſolutiones: altera $1+cof.\Phi=0$, quae

autem redderet formulam $\text{fin.}\,\Phi\,(1+\text{cof.}\,\Phi)=0$, ideoque maximum non foret; quare altera ſolutio locum habebit, quae dat $2\,\text{cof.}\,\Phi-1=0$, vnde fit $\text{cof.}\,\Phi=\frac{1}{2}$, hincque $\text{fin.}\,\Phi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ſcilicet ipſe angulus foret $=60$ gr.

§. 9. Nunc igitur conditioni praeſcriptae penitus ſatisfecimus, et iam area ellipſis hoc modo exprimetur: $\frac{2\pi a c\,\text{fin.}\,\omega}{3\sqrt{3}}$, quae eſt minima inter omnes ellipſes, quas per tria data puncta traducere licet. Cum igitur area trianguli A B C ſit $\frac{1}{2}a c\,\text{fin.}\,\omega$, euidens eſt aream minimae ellipſis quaeſitae ſe habere ad aream trianguli vt $4\pi : 3\sqrt{3}$, prorſus vt iam ſupra commemorauimus. Haec autem ratio proxime vera in numeris eſt vt $2,41840 : 1$, vnde ſequentes fractiones continuo propius ad veritatem accedent:

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{12}{5},\ \frac{17}{7},\ \frac{29}{12},\ \frac{104}{43},\ \frac{237}{98}.$$

§. 10. Quaeramus nunc etiam ipſam aequationem pro curua inuenta, et quia ſumſimus $A=cc$ et $C=aa$, hinc reperiemus litteram B, ex poſitione $B=\text{cof.}\,\Phi\sqrt{AC}$, vnde ob $\text{cof.}\,\Phi=\frac{1}{2}$ erit $B=\frac{1}{2}ac$, quo valore ſubſtituto aequatio pro ellipſi omnium minima erit:

$$ccxx+acxy+aayy-accx-aacy=0,$$

vnde pro qualibet abſciſſa x gemina applicata y definiri poteſt, reperietur enim:

$$y=\frac{ac-cx\pm\sqrt{(aa+2ax-3xx)}}{2a},$$

qui valor concinnius ita exprimitur:

$$y=\frac{c(a-x)\pm c\sqrt{(a-x)(a+3x)}}{2a}.$$

Ex hac aequatione primo patet abſciſſam x nunquam maiorem fieri poſſe quam a, negatiue autem abſciſſa non vltra $\frac{1}{3}a$

$\frac{1}{3}a$ creſcere poteſt. Sumto autem ſiniſtrorſum $BD = \frac{1}{3}a$, Tab. II. fiet applicata $DE = \frac{2}{3}c = \frac{2}{3}BC$, atque in hoc puncto E bini Fig. 4. valores ipſius y coaleſcunt, ſicque recta DE curuam in puncto E tanget. Quodſi iam ducatur recta AE, latus BC ſecans in F, ob triangula ſimilia erit $AD:DE = AB:BF$, vnde prodit $BF = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}BC$, ita vt recta AFE latus BC biſecet. Porro vero quia BD eſt tertia pars ipſius BA, erit quoque EF tertia pars ipſius AF, vnde facillime punctum E deſignatur.

§. 11. Quodſi porro faciamus $x = a$, ob radicale euaneſcens ambo valores ipſius y quoque coaleſcunt, vtroque exiſtente $= 0$, ſiue ducta $A\alpha$ ipſi BC parallela et infinite parua, erit etiam α punctum in curua, ideoque recta $A\alpha$ curuam tanget in A, quae cum ſit parallela tangenti DE, ſequitur rectam AE eſſe diametrum ellipſis, cuius ergo centrum in eius medium O incidet. Cum igitur ſit $FE = \frac{1}{2}AF$, centrum ellipſis cadet in punctum O, ſumta $AO = \frac{2}{3}AF$, ſiue $FO = \frac{1}{3}AF$. Iſte igitur diameter omnes ordinatas lateri BC parallelas biſecabit. Praeterea vero quia terna puncta inter ſe permutare licet, ſimili modo recta BG, latus AC biſecans, quin etiam recta CH, latus BA biſecans, ſe mutuo in eodem puncto O ſecabunt. Notum autem eſt hoc modo centrum grauitatis trianguli determinari, vnde iſta inſignis proprietas elucet: *Quod centrum ellipſis omnium minimae, per terna puncta A, B, C, ducendae, in ipſum centrum grauitatis trianguli A, B, C, incidat*; vnde cum praeterea non ſolum dentur terna puncta A, B, C, ſed etiam tangentes in his punctis, quippe quae lateribus oppoſitis ſunt parallelae, ex proprietatibus cognitis ſectionum conicarum facillime iſta ellipſis quaeſita conſtrui poterit.

§. 12.

§. 12. Euoluamus aliquot caſus. Ac primo quidem
Tab. II. Fig. 5. fit triangulum A B C aequilaterum, ideoque $c = a$ et angulus $\omega = 60°$, cuius ſinus $= \frac{\sqrt{3}}{2}$, atque aequatio pro ellipſi minima erit $xx + xy + yy - ax - ay = 0$, ipſa vero area huius minimae ellipſis erit $= \frac{1}{3}\pi aa$. Facile autem intelligitur, hoc caſu ellipſin fore circulum triangulo circumſcriptum. Ex aequatione autem hoc ita oſtendi poteſt: Sit Y punctum in ellipſi, vnde lateri B C agatur parallela Y X, vt ſit B X $= x$ et X Y $= y$; tum vero producatur recta B G, latus A C biſecans in G, in quam ex Y ducatur normalis Y T, voceturque B T $= t$ et T Y $= u$. Producatur T Y, donec lateri B C producto occurrat in V; tum vero etiam agatur recta X S ipſi A C parallela, eritque B S $=$ X S $= x$ $=$ Y V. Erit igitur etiam S V $=$ X Y $= y$, ideoque B V $= x + y$, hincque ob angulum C B G $= 30°$ erit B T $= t = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$ et T V $= \frac{1}{2}(x+y)$. Hinc auferatur Y V $= x$ et relinquetur T Y $= u = \frac{1}{2}(y-x)$.

§. 13. Ex aequationibus his inuentis erit primo $x + y = \frac{2t}{\sqrt{3}}$ et $y - x = 2u$, vnde colligitur $x = \frac{t}{\sqrt{3}} - u$ et $y = \frac{t}{\sqrt{3}} + u$, quibus valoribus ſubſtitutis orietur aequatio inter coordinatas rectangulas t et u, quae erit

$$tt + uu - \frac{2at}{\sqrt{3}} = 0, \text{ ſiue } uu = +\frac{2at}{\sqrt{3}} - tt,$$

quae manifeſto eſt pro circulo, cuius radius $= \frac{a}{\sqrt{3}}$. Cum igitur ſit recta B G $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$, erit B G ad illum radium vt 3 : 2, ideoque centrum circuli cadit in O, ita vt ſit B O $= \frac{2}{3}$ B G.

Fig. 6. §. 14. Sit nunc triangulum A B C iſosceles et B C $=$ B A $= a = c$, angulum vero ad B, qui erat ω, nunc ſtatuamus $\omega = 2\theta$, ita vt, ducta recta B G T, latus A C biſecante in id-

que

que normali, fit angulus $CBG = \theta$. Iam ponatur vt ante $BT = t$ et $TY = u$, exiſtente $BX = x$ et $XY = y$; tum compleatur parallelogrammum XSVY, eritque $BS = x$, et $XS = 2x \text{ ſin. } \theta = YV$. Cum iam ſit $SV = XY = y$, erit $BV = x + y$, hincque

$$BT = t = (x+y) \text{ cof. } \theta \text{ et}$$
$$TV = (x+y) \text{ ſin. } \theta.$$

Hinc auferatur $YV = 2x \text{ ſin. } \theta$, ac remanebit

$$TY = u = (y-x) \text{ ſin. } \theta.$$

Quare cum habeamus

$$x + y = \frac{t}{\text{cof. } \theta} \text{ et } y - x = \frac{u}{\text{ſin. } \theta},$$

erunt coordinatae obliquangulae

$$x = \frac{t}{2 \text{ cof. } \theta} - \frac{u}{2 \text{ ſin. } \theta} \text{ et } y = \frac{t}{2 \text{ cof. } \theta} + \frac{u}{2 \text{ ſin. } \theta},$$

qui valores ſubſtituti ſuppeditant inter coordinatas orthogonales hanc aequationem:

$$\frac{3tt}{4 \text{ cof } \theta^2} + \frac{uu}{4 \text{ ſin. } \theta^2} - \frac{at}{\text{cof. } \theta} = 0, \text{ ſiue}$$
$$uu = \frac{4at \text{ ſin. } \theta^2}{\text{cof. } \theta} - \frac{3tt \text{ ſin. } \theta^2}{\text{cof. } \theta^2},$$

vnde patet applicatam u euaneſcere tam caſu $t = 0$ quam caſu $t = \frac{4}{3} a \text{ cof. } \theta$, quae quantitas ergo dabit axem principalem ellipſis, qui ſit $BI = \frac{4}{3} a \text{ cof. } \theta$. Quare cum ſit $BG = a \text{ cof. } \theta$, erit $BI = \frac{4}{3} BG$, ſicque centrum incidet in O, exiſtente $BO = OI = \frac{2}{3} BG$. Quodſi iam ſumamus $t = BO = \frac{2}{3} a \text{ cof. } \theta$, valor ipſius u dabit ſemiaxem coniugatum, qui ſit OK, eritque $OK = \frac{2a \text{ ſin. } \theta}{\sqrt{3}}$, ſemiaxis vero alter erat $BO = OI = \frac{2}{3} a \text{ cof. } \theta$, vnde prodit area huius ellipſis:

$$= \pi . BO . OK = \frac{4\pi a a \text{ ſin. } \theta \text{ cof. } \theta}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi a a \text{ ſin. } \omega}{3\sqrt{3}},$$

quae perfecte congruit cum forma generali.

DE CENTRO SIMILITVDINIS.

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 23 Octob. 1777.

§. 1.

Tab. III. Fig. 1. Si habeantur duae figurae similes in eodem plano descriptae, quarum maioris quodpiam latus sit A B, minoris vero latus respondens *a b*, semper dabitur in eodem plano certum punctum Γ, quod ad vtramque figuram similiter referatur, ita vt figurae Γ A B et Γ *a b* sint inter se similes, hocque punctum Γ appelletur centrum similitudinis binarum figurarum similium propositarum, quod ergo quomodo quouis casu inueniri queat, hic inuestigemus. Primo igitur patet istud punctum Γ ita situm esse debere, vt ductis rectis Γ A et Γ *a* anguli Γ A B et Γ *a b* sint inter se aequales; deinde vt sit Γ A : Γ *a* = A B : *a b*, hoc est in ratione laterum homologorum, quam rationem indicemus per A : *a*.

§. 2. Hic quidem statim patet, si latera homologa Fig. 2. A B et *a b* fuerint inter se parallela, tum centrum similitudinis facillime assignari posse, cum semper reperiatur in intersectione rectarum A *a* et B *b*. Quodsi enim fuerit *a b* paral-

rallela ipſi A B, productis rectis A *a* et B *b* vsque ad concurſum Γ, triangula A B Γ et *a b* Γ manifeſto ſunt inter ſe ſimilia. Pari modo ſe res habet, quando latera homologa in plagas contrarias porriguntur, veluti in figura 3., vbi centrum ſimilitudinis inter ambas figuras cadit. Tab. III. Fig. 3.

§. 3. Sin autem latera A B et *a b* non fuerint inter ſe parallela, producantur ea ad mutuum concurſum in O, facientes inter ſe angulum A O *a*, ac manifeſtum eſt bina quaevis alia latera homologa ſub pari angulo inuicem inclinari; vnde ſequitur, ſi per puncta O, A, *a*, ducatur circulus O A *a*, tum omnia puncta O in peripheriam huius circuli incidere debere, quia omnes anguli arcui A *a* inſiſtentes ſunt inter ſe aequales. Fig. 4.

§. 4. Deinde etiam perſpicuum eſt centrum ſimilitudinis Γ in eadem circuli peripheria reperiri debere. Cum enim rectae Γ A et Γ *a* tanquam latera homologa ſpectari queant, eae inter ſe quoque angulum A Γ *a* ipſi A O *a* aequalem conſtituent; quamobrem totum negotium huc redit, vt in peripheria id punctum Γ reperiatur, vt ductis rectis Γ A et Γ *a* fiat Γ A : Γ *a* = A : *a*. Hunc in finem ducta recta A *a* ita ſecetur in puncto Δ, vt ſit A Δ : *a* Δ = A : *a*; et quia requiritur vt ſit Γ A : Γ *a* = A Δ : *a* Δ, ſequitur rectam Γ Δ angulum A Γ *a* biſecare, ideoque eam productam etiam arcum A *a* eſſe biſecturam in ω.

§. 5. His perpenſis deducitur iſta conſtructio geometrica: Primo ſcilicet arcus A *a* biſecetur in puncto ω, chorda vero A *a* ita ſecetur in puncto Δ, vt ſit A Δ : *a* Δ = A : *a*, quo facto per puncta ω et Δ producatur recta ω Δ Γ, peripheriam circuli ſecans in puncto Γ, eritque iſtud punctum Γ

centrum ſimilitudinis quaeſitum. Ex hac enim conſtructione ſponte patet eſſe $\Gamma A : \Gamma a = \Delta A : \Delta a = A : a$. Deinde quoque euidens eſt has rectas ΓA et Γa ad latera AB et ab aequaliter inclinari, propterea quod anguli $OA\Gamma$ et $Oa\Gamma$ ſunt inter ſe aequales, vtpote eidem arcui $O\Gamma$ inſiſtentes.

§. 6. Quemadmodum hic centrum ſimilitudinis Γ determinauimus ex punctis homologis A et a, eorum loco etiam vſurpari poſſent puncta homologa B et b, quae ad punctum concurſus O pariter referuntur. Hic ergo deſcribi oportuiſſet circulus OBb; et quoniam centrum Γ etiam in peripheria huius circuli reperiri debet, neceſſe eſt, vt hic circulus praecedentem in ipſo puncto Γ interſecet. Cum igitur hi duo circuli per idem punctum O tranſeant, eorum altera interſectio neceſſario cadet in punctum Γ, hoc eſt in centrum ſimilitudinis quaeſitum.

§. 7. Idem quoque centrum ſimilitudinis locum habebit, etiamſi ambae figurae propoſitae non fuerint planae, ſed ſuper eodem plano ſimiles habeant prominentias, dummodo baſes talium ſimilium corporum in eodem plano fuerint conſtitutae. Vnde intelligitur, ſi per bina quaeuis puncta homologa talium corporum et centrum ſimilitudinis producatur planum, ſecundum quod ambo corpora ſecentur, tum etiam ambas eorum ſectiones inter ſe ſimiles eſſe futuras. Hinc intelligere licet, quomodocunque duo corpora ſimilia fuerint poſita, ſemper quoque exhiberi poſſe centrum ſimilitudinis, quod ſcilicet ad ambo corpora ſimili modo referatur, id quod per ſequentem calculum oſtendi poteſt.

Tab. III. Fig. 5. §. 8. Sint A et a duo puncta homologa quaecunque duorum corporum ſimilium, per quae planum tabulae tranſire

fire concipiatur; in quo plano maioris corporis concipiatur latus quoduis A B, cui respondens homologum in minori corpore $a\,b$ in alio quodam plano fit fitum, quod planum tabulae interfecet fecundum rectam $a\,i$, cuius inclinatio fit $= \theta$. Iam ex puncto b ad planum tabulae demittatur perpendiculum $b\,\beta$, tum vero ex β ad $a\,i$ ducatur normalis $\beta\,\mathfrak{b}$, iunctisque punctis $\mathfrak{b}$ et b recta $b\,\mathfrak{b}$, angulus $b\,\mathfrak{b}\,\beta$ metietur inclinationem plani $= \theta$; tum vero notetur esse $A\,B : a\,b = A : a = \lambda : 1$, existente $\lambda = \frac{A}{a}$. Iam in ipso plano tabulae statuatur angulus $B\,A\,I = b\,a\,i$, et ex B agatur ad A I normalis $B\,\mathfrak{B}$, eruntque puncta $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{b}$ quoque homologa, perinde ac B et b.

§. 9. Nunc vocemus pro maiori figura $A\,\mathfrak{B} = A$ et $\mathfrak{B}\,B = B$; pro minore vero figura $a\,\mathfrak{b} = a$ et $\mathfrak{b}\,b = b$, eritque ob similitudinem $A = \lambda\,a$ et $B = \lambda\,b$; tum vero in triangulo $b\,\mathfrak{b}\,\beta$ habebitur $b\,\beta = b$ fin. θ et $\mathfrak{b}\,\beta = b$ cof. θ. His positis producantur rectae $i\,a$ et I A ad concursum vsque in O, et cum centrum similitudinis quaesitum Γ in sublimi reperiatur, ex eo ad planum tabulae demittatur perpendiculum $\Gamma\,Y$, ex puncto Y vero ad vtramque rectam A O et $a\,O$ agantur normales $Y\,X$ et $Y\,x$, ponanturque $A\,X = X$ et $X\,Y = Y$, tum vero $a\,x = x$ et $x\,Y = y$, ipsum vero perpendiculum $Y\,\Gamma$ vocetur $= z$. His positis si vocentur interualla $A\,O = f$ et $a\,O = g$, angulus vero $A\,O\,a = \omega$, ob $O\,x = g - x$, facile patet fore:

$$A\,X = X = f - (g - x)\,\text{cof. }\omega - y\,\text{fin. }\omega \text{ et}$$
$$X\,Y = Y = (g - x)\,\text{fin. }\omega - y\,\text{cof. }\omega,$$

vnde intelligitur quomodo litterae X et Y per x et y determinentur.

§. 10. Nunc igitur oſtendi debet, dari eiusmodi punctum Γ, quod ad terna puncta A, B, $\mathfrak{B}$, ſimili modo referatur, atque ad puncta a, b, $\mathfrak{b}$, ſiue vt ſit $\Gamma A = \lambda \Gamma a$; $\Gamma \mathfrak{B} = \lambda \Gamma \mathfrak{b}$ et $\Gamma B = \lambda \Gamma b$; vnde nanciſcimur ternas aequationes, ex quibus ternas quoque incognitas x, y et z determinari oportebit; quae aequationes ſequenti modo exprimentur:

I. $\Gamma A^2 = X^2 + Y^2 + z^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2 + z^2)$,

II. $\Gamma \mathfrak{B}^2 = (X + \lambda a)^2 + Y^2 + z^2 = \lambda^2 [(x+a)^2 + yy + zz]$,

III. $\Gamma B^2 = (X + \lambda a)^2 + (Y - \lambda b)^2 + z^2 = \lambda^2 [(x+a)^2 + (y + b \text{ cof. } \theta)^2 + (z - b \text{ ſin. } \theta)^2]$.

§. 11. Harum aequationum prima ergo dat

$$X^2 + Y^2 + z^2 = \lambda\lambda x x + \lambda\lambda y y + \lambda\lambda z z,$$

quae ab aequatione ſecunda ſubtracta relinquit

$$2\lambda a X + \lambda\lambda a a = 2\lambda\lambda a x + \lambda\lambda a a,$$

ideoque $X = \lambda x$. Tum vero ſecunda aequatio a tertia ſubtracta relinquit:

$$-2\lambda b Y + \lambda\lambda b b = 2\lambda\lambda b y \text{ cof. } \theta - 2\lambda\lambda b z \text{ ſin. } \theta + \lambda\lambda b b,$$

ex qua aequatione colligitur

$$Y = \lambda (z \text{ ſin. } \theta - y \text{ cof. } \theta).$$

Hoc ergo modo tota inueſtigatio reducta eſt ad tres aequationes ternas variabiles x, y et z inuoluentes, vnde ipſae litterae a et b exceſſerunt, quemadmodum rei natura poſtulat, propterea quod centrum ſimilitudinis Γ aequali modo ad omnia latera homologa referri debet. Interim tamen iſtae tres aequationes nimis ſunt complicatae (praecipue ſi loco

X et Y valores ſupra datos ſubſtituere vellemus) quam vt hinc litterae x, y et z actu determinari queant.

§. 12. Quin etiam iſtum calculum ideo in medium adduximus, vt oſtenderemus, quomodocunque bina corpora ſimilia fuerint diſpoſita, ſemper dari eiusmodi punctum Γ, quod ad ambo aequaliter referatur. Hoc autem demonſtrato aliam methodum inire conuenit, ipſum ſimilitudinis centrum determinandi, inde petendam, quod omnes binorum corporum ſectiones, per bina puncta homologa et centrum ſimilitudinis factae, ſemper ſint figurae inter ſe ſimiles.

§. 13. Concipiatur igitur planum quodcunque per bina puncta homologa A et a tranſiens, et dabitur aliud planum, per eadem puncta A et a tranſiens, in quo inſuper ipſum centrum ſimilitudinis Γ erit ſitum, ita vt interſectio futura ſit recta A a. Ad hoc punctum inueſtigandum alia duo puncta homologa, veluti B et b, extra hoc planum ſita, quaeri debent, quae cum recta A a in eodem plano ſint conſtituta, ſiue vt quatuor puncta A, a, B, b in idem planum incidant, quae inueſtigatio in genere inſtituenda haud exiguas ambages poſtularet. Tab. III. Fig. 6.

§. 14. Has autem ambages euitabimus, ſi punctum B ita accipiamus, vt in ipſam rectam A a incidat, tum autem punctum homologum cadat in b, vnde ad planum tabulae demittatur perpendiculum $b\beta$, et ex β, ad rectam A a productam, normalis $\beta\mathfrak{b}$. Hoc enim modo quaterna puncta A, B et a, b certe in eodem plano erunt ſita, quandoquidem hoc planum tabulam interſecat ſecundum rectam A a, ad eamque inclinatur ſub angulo $b\mathfrak{b}\beta$, quocirca in ipſo hoc plano neceſſario reperiri debebit centrum ſimilitudinis quaeſitum, Fig. 7.

ſitum, quippe quod iam ſine vlla difficultate ope methodi initio explicatae promtiſſime inueniri poterit.

§. 15. Problema quod hactenus tractauimus, ad ſcientiam Perſpectiuam referendum videtur, quandoquidem ſi effigies cuiuspiam obiecti accurate fuerit elaborata, plurimum intererit eum locum aſſignare, vnde ſi tam ipſum obiectum, quam effigies aſpiciatur, omnes partes homologae ſub aequalibus angulis ſint appariturae. Iſte ſcilicet locus in eo puncto reperietur, quod centrum ſimilitudinis vocauimus.

§. 16. Iam ex iis, quae ſupra ſunt allata, iſtud cen-
Tab. III. trum ſimilitudinis ſemper facile aſſignari poterit, quomodo-
Fig. 8. cunque tam obiectum quam effigies fuerint diſpoſitae. Statim enim conſiderentur duo puncta homologa A et a, quorum illud A in ipſo obiecto, hoc vero a in effigie ſit aſſumtum; tum ducta recta A a tanquam ad ipſum obiectum pertinens ſpectetur; in effigie autem ex puncto a ſimilis recta educatur $a\,\alpha$, quae ſcilicet ad effigiem pari modo referatur, quo recta A a ad ipſum obiectum refertur. Quo facto primo tenendum eſt, centrum ſimilitudinis quaeſitum ſemper reperiri in plano, quod his duabus rectis A a et $a\,\alpha$, ſiue tribus punctis A, a, α determinatur, eiusque locum ita definiri debere, vt ſimili modo ad vtramque rectam A a et $a\,\alpha$ referatur, cuius ergo inuentio ex ſequenti problemate erit petenda.

Problema geometricum.

Tab. IV. *Datis tribus punctis A, B, C, in plano tabulae vtcun-*
Fig. 1. *que ſitis, inuenire in eodem plano punctum O, vt ductis rectis AB, BC, OC, OB et OA, ambo triangula OAB et OBC inter ſe fiant ſimilia, ſiue vt euadant anguli* $AOB = BOC$, $OAB = OBC$ *et* $OBA = OCB$.

So-

Solutio.

§. 17. Producta recta A B in D ponatur angulus $CBD = \theta$, qui ergo datur; tum vero vocetur angulus $OAB = \Phi$, qui adeo erit incognitus; quia autem ei aequalis esse debet angulus O B C, erit angulus $OBD = \Phi + \theta$, qui cum sit externus respectu trianguli A O B, erit angulus $AOB = \theta$, ideoque datus, cui ergo etiam aequalis erit angulus B O C; ex qua conditione ipsum punctum O haud difficulter determinabitur.

§. 18. Cum igitur triangulum A O B ita sit comparatum, vt eius angulus $AOB = \theta$, ex elementis constat, super basi A B innumera eiusmodi triangula constitui posse, quorum anguli verticales A O B omnes eiusdem sint magnitudinis θ, siquidem omnes isti anguli in peripheria certi circuli, super basi A B descripti, reperiuntur. Huius igitur circuli centrum alicubi erit in recta M N, ex rectae A B puncto medio M perpendiculariter erecta; vnde si centrum fuerit in I, necesse est vt angulus ad centrum A I B aequetur duplo anguli θ, ideoque erit eius semissis $BIM = \theta$, ideoque angulus $MBI = 90^0 - \theta$; ex quo manifestum est fore angulum C B I rectum, siue rectam B I ita esse ducendam, vt ad rectam C B fiat normalis, hocque modo innotescet centrum circuli quaesiti I; atque adeo, isto circulo descripto, centrum similitudinis quaesitum O alicubi in peripheria huius circuli erit situm.

§. 19. Simili modo si altera recta B C bisecetur in *m*, ad eamque statuatur normalis *m n*, super hac recta B C etiam describi poterit circulus, ad cuius peripheriam omnes anguli basi B C insistentes sint quoque $= \theta$, huiusque circuli centrum erit in puncto *i*, ita vt sit angulus $Bim = \theta$; vnde

patet iſtam rectam B *i* eſſe ad B A normalem. Cum igitur, deſcripto centro *i* circulo per puncta C et B tranſeunte, in eius peripheria pariter ſitum ſit punctum quaeſitum O, euidens eſt iſtud punctum ſitum fore in interſectione amborum circulorum memoratorum.

§. 20. Haec autem multo faciliora reddi poſſunt hoc modo. Ad rectam B A ex A erigatur perpendiculum A E, rectae B I productae occurrens in E, eritque I E = B I = A I, ideoque punctum E in circulo, atque adeo recta B E erit diameter iſtius circuli. Simili modo ſi ex altera parte ex C ad B C erigatur perpendiculum C F, occurrens rectae B *i* productae in F, erit quoque *i* F = B *i* = C *i*, ideoque B F erit diameter huius alterius circuli. Quare ſi ſuper diametris B E et B F duo circuli conſtruantur, eorum interſectio O dabit centrum ſimilitudinis quaeſitum O.

Tab. IV. Fig. 2.

§. 21. Conſtruamus nouam figuram, omiſſis lineis ſuperfluis, ac primo quidem ex punctis A et C ad rectas B A et B C erigamus perpendiculares A E et C F, quae rectis B E et B F, ipſis B C et B A normaliter iunctis, occurrant in punctis E et F; tum vero ſuper his rectis B E et B F tanquam diametris conſtructi intelligantur bini circuli, qui ſe mutuo in puncto O interſecent, eritque iſtud punctum O primo in ſemicirculo ſuper recta B E exſtructo, ideoque angulus B O E rectus; deinde vero idem punctum O quoque erit in ſemicirculo ſuper recta B F exſtructo, unde quoque angulus B O F erit pariter rectus; ex quo manifeſtum eſt ambas rectas E O et F O in directum eſſe ſitas. Quocirca ducta recta E F, in ea punctum O reperietur, ſi in eam ex puncto B demittatur perpendiculum B O; unde ſequens conſtructio facillima deriuatur.

Con-

Conſtructio problematis propoſiti.

§. 22. Ex tribus datis punctis A, B et C educantur rectae, quae ad binas rectas A B et B C ſint normales, quarum interſectiones dabunt duo puncta E et F; tum vero in ductam E F ex B demittatur perpendiculum B O, eritque punctum O centrum ſimilitudinis quaeſitum, ita vt ductis rectis O A et O C, ambo triangula A O B et B O C inter ſe futura ſint ſimilia.

Demonſtratio huius conſtructionis.

§. 23. Primo notandum eſt quadrilaterum A E O B eſſe circulo inſcriptum, ex cuius natura ſequitur fore angulos A B E = A O E, E A O = E B O, B A O = B E O, A E B = A O B. Deinde eodem modo quadrilaterum B O F C eſt circulo inſcriptum, vnde ſequentes angulorum aequalitates prodeunt: B O C = B F C, C B F = C O F, O B F = O C F, B C O = B F O.

§. 24. His notatis primo demonſtrari poterit eſſe triangulum A O B ſimile triangulo E B F. Primo enim eſt angulus B A O = F E B (per § praeced.); deinde eſt angulus A O B = A E B, qui eſt complementum anguli A B E, ſed anguli E B F complementum eſt idem angulus A B E, vnde ſequitur fore angulum A O B = E B F; vnde ſponte ſequitur fore tertium angulum A B O = E F B.

§. 25. Eodem modo oſtendi poteſt eſſe $\Delta BOC \sim \Delta EBF$ Primo enim eſt angulus B C O = B F O; deinde eſt B O C = B F C, cui, ob B E ipſi C F parallelam, aequalis eſt alternus E B F, ſicque erit angulus B O C = E B F, vnde

etiam tertii anguli O B C et B E F erunt pariter aequales. Quare cum ambo triangula A O B et B O C ſimilia ſint eidem triangulo E B F, neceſſe eſt vt quoque ſint ſimiles inter ſe. Q. E. D.

§. 26. Notaſſe autem quoque iuuabit caſum, quo punctum O extra rectam E F cadit, veluti in figura 3. Hic
Tab. IV. vt ante quadrilaterum A B O E eſt circulo inſcriptum; de-
Fig. 3. inde vero euidens eſt quadrilaterum B F O C adeo in ſemicirculo, ſuper diametro B F deſcripto, ineſſe; vnde demonſtratio conſtructionis vt ante deriuari poterit, qua oſtendetur ambo triangula A O B et B O C ſimilia eſſe triangulo
Fig. 4. E B F, ideoque etiam ſimilia inter ſe. Praeterea quoque notari meretur caſus quo ambae rectae A B et B C ſunt inter ſe normales; tum enim manifeſtum eſt puncta E et F in ipſos terminos A et C incidere, vnde iuncta hypothenuſa E F ſiue A C, ſi in eam ex B demittatur perpendiculum B O, erit punctum O centrum ſimilitudinis quaeſitum, ſiquidem triangula A O B et B O C manifeſto ſunt ſimilia tam inter ſe quam tertio A B C.

§. 27. Denique etiam caſum, quo recta B C ad A B ſub angulo acuto inclinatur, conſiderari conuenit, quippe
Fig. 5 quo ambo perpendicula A E et B F in plagas contrarias cadunt, veluti in adiecta figura cernere licet, vbi punctum O intra angulum A B C ita cadet, vt triangula A O B et B O C inter ſe fiant ſimilia: ſemper enim quoque ſimilia erunt triangulo E B F.

§. 28. Interim tamen vnicus caſus occurrit, cui iſta ſolutio aduerſari videtur, qui contingit, quando recta A B cum B C in directum iacet; propterea quod ambo puncta

E

E et F in infinitum remoueantur, ita vt praecedens conſtructio hic plane adhiberi nequeat. Statim autem perſpicuum eſt, hoc caſu centrum ſimilitudinis O neceſſario in rectam A B C productam incidere debere, ita vt fiat A O : B O = B O : C O. Ad hoc ergo punctum inueniendum vocemus A B = a, B C = c et B O = z, oportet ergo eſſe $a + z : z = z : z - c$, vnde fit $z = \frac{ac}{a-c}$, ideoque A O = $\frac{aa}{a-c}$, qui valor ſequenti modo commode conſtruitur. In A rectae A B ſub angulo quocunque iungatur recta A b = A B = a, quae ſecetur in c ita, vt bc = B C = c, ductaque recta c B ei agatur parallela recta b O, cuius interſectio cum recta propoſita A B oſtendet punctum quaeſitum O.

PROBLEMATA E METHODO TANGENTIVM INVERSA.

Auctore
F. T. SCHVBERT.

Conuentui exhib. die 18 Octob. 1790.

§. 1.

Plurimae curvarum proprietates ſine calculo infiniteſimali aut plane non, aut non absque multis ambagibus eruuntur. Eiusmodi ſunt quadratura, rectificatio, normales, inprimis autem tangentes, quas ad inveniendas calculus differentialis primum ab inventoribus fuit adhibitus: unde et ipſas differentiandi regulas *methodum tangentium* appellarunt; eodemque iure nomen methodi tangentium *inverſae* univerſo calculo *integrali* tribui poſſet. Proprie tamen ſub hac denominatione ea tantum problemata comprehenduntur, ubi ex datis relationibus areae, vel arcus, vel tangentis, etc. ipſa curva eſt quaerenda: quod quidem ſine integratione, eaque interdum ſaepius repetita, fieri nequit. Huiusmodi problemata omni attentione ſunt digna: ſaepenumero paradoxon ex iis naſci videtur; nonnunquam aequatio integralis reſultat impoſſibilis, cum tamen ipſum pro-

problema nullam involvere videretur contradictionem. Maxime autem ea inſerviunt examini inſtituendo, utrum certa proprietas, quam alicui curvae competere aliunde iam conſtat, huic curvae ſoli ſit propria, an vero pluribus ſit communis. Atque hic mihi finis eſt propoſitus in hac disquiſitione, quam tamen ultra ſectiones conicas hac vice non extendam. Priusquam autem rem ipſam aggrediar, nonnulla mihi videntur praemonenda. Dantur curvarum functiones, quae a ſitu coordinatarum minime dependent, ſed in quovis curvae puncto aedem manent, quomodocunque axis vel initium abſciſſarum varietur: veluti radius oſculi. Dantur aliae, quae diverſos induunt valores, prout coordinatae mutantur: tales ſunt tangens, ſubtangens, normalis, aliaeque fere omnes. Quodſi itaque e. gr. nonniſi radii curvedinis in problemate ſit mentio, aequatio quae reſultat integralis erit *generalis* ad eam curvam, quae problemati ſatisfacit. Sin autem relatio quaedam detur inter radium oſculi et tangentem, vel normalem, etc. haud ſufficit ipſam curvam noſſe, ſed etiam ſitum axis abſciſſarum et ordinatarum noſſe oportet; unde integrale non poterit eſſe aequatio generalis, ſed talis, quae curvae naturam pro certo coordinatarum ſitu exprimit. Algebra enim quaeſtioni perfecte ſatisfacere debet. Quare cum hiſce caſibus problema non curvae duntaxat naturam, ſed coordinatarum quoque ſitum quaerat, etiam hoc aequatio integralis determinare debet: id quod infra circuli exemplum clarius oſtendet.

§. 2. Sit A M Parabola, in qua $AP = x$, $PM = y$, parameter $= p$, ſubtangens $PT = t$, ſubnormalis $PN = u$, atque erit generatim in omni curva $t = \frac{y \partial x}{\partial y}$, $u = \frac{y \partial y}{\partial x}$, et in parabola $yy = px$. Cum itaque conſtet, in parabola Tab. V. Fig. 1.

eſſe

esse $t = 2x$, inquiramus, num aliis curvis eadem competat proprietas. Esse itaque debet $\frac{y\partial x}{\partial y} = 2x$, sive $\frac{2\partial y}{y} = \frac{\partial x}{x}$, unde fit integrando $2ly = lx + C$, seu $y^2 = ax$, quae est aequatio ad parabolam, abscissis in axe a vertice captis: unde patet, solam parabolam hac proprietate gaudere. Neque haec relatio in ulla curva adesse potest, si abscissae non a vertice A, sed ab alio quopiam puncto a computentur, ut nempe subtangens aequetur duplo abscissae, sive $PT = 2aP$. Quicunque enim valor constanti C tribuatur, erit $y^2 = e^{lx+C} = xe^C$, quae est aequatio ad parabolam, cuius latus rectum $= e^C$, abscissis a vertice sumtis.

Ponamus iam in genere $t = mx = \frac{y\partial x}{\partial y}$, h. e. $\frac{m\partial y}{y} = \frac{\partial x}{x}$, proinde $y^m = ax$, quae est aequatio ad parabolam $m$ti gradus. Relatio itaque $t = 2x$ parabolae Apollonianae est propria, haec autem $t = mx$ nonnisi parabolae $m$ti gradus competit.

Posito $m = \frac{1}{2}$, erit $\frac{y\partial x}{\partial y} = \frac{1}{2}x$, et $x^2 = ay$, quae iterum est pro parabola Apolloniana, abscissis sumtis a ver-
Fig. 2. tice axi normalibus. Appellatis nempe $AP = x$, $PM = y$, est $x^2 = py$, $PT = t$. Est autem $At = AQ = PM$, consequenter ob aequalitatem triangulorum ATt, PTM, $PT = TA$, seu $t = \frac{1}{2}x$, uti requiritur.

Quando m est numerus quicunque fractus $= \frac{\mu}{\nu}$, invenitur $y^\mu = ax^\nu$, quae aequatio parabolam repraesentat $\frac{\mu}{\nu}$ti gradus, si $\mu > \nu$; sin autem $\mu < \nu$, permutatis coordinatis curva est parabola $\frac{\nu}{\mu}$ti gradus. Unde perspicimus, parabolas ratione huius proprietatis in classes posse dispesci. Curva namque parabolica est $m$ti gradus, si in ea sit subtangens $= mx$.

Restat

Reſtat caſus, quo litera m ſeu $\frac{\mu}{\nu}$ valorem induit negativum, ita vt ſit $\frac{1}{y^{\mu}} = a x^{\nu}$, ſeu $a x^{\nu} y^{\mu} = 1$: quod indicat curvam hyperbolicam, coordinatis ſecundum aſymptotas captis. Poſito e. gr. $m = -1$, $AP = x$, $PM = y$, eſt Fig. 3. $xy = C$, proinde $x \partial y = -y \partial x$, unde ſequitur

$$t = \frac{y \partial x}{\partial y} = -x, \text{ ſeu } PT = AP,$$

quae eſt proprietas Hyperbolae notiſſima. Perſpicimus itaque, proprietatem hanc omnibus curvis hyperbolicis eſſe communem: ſi nempe abſciſſae x in una aſymptota ſumantur, applicatae autem alteri aſymptotae parallelae, ſemper eſſe ſubtangentem ad abſciſſam in ratione conſtante, prorſus ut in curvis parabolicis; modo notetur, in hyperbolis ſubtangentem et abſciſſam ſibi eſſe oppoſitas.

Quamobrem pro omnibus curvis parabolicis aequatio generalis eſt: $t = mx$, et pro hyperbolicis: $t = -mx$.

§. 3. Alia proprietas parabolae notiſſima eſt haec: $u = \frac{1}{2} p$, ſeu generatim $\frac{y \partial y}{\partial x} = C$, unde invenitur $y^2 = ax + C$, quae ergo relatio ſoli parabolae Apollonianae competit. Poſito autem $u = \frac{y \partial y}{\partial x} = a^2 x$, eſt $y^2 = a^2 x^2 + C$, quae aequatio aut hyperbolae aut duabus rectis convenit. Poſito enim $C = 0$, fit $(y + ax)(y - ax) = 0$. Ceterum patet, ſi in genere ſit $u = ax^m$, proditurus eſſe innumeras curvas pro diverſo valore literae m et conſtantis adiectae. Quare his non diutius immoror.

§. 4. Intercedit in parabola inter ſummam ſubtangentis et ſubnormalis atque normalem ipſam relatio admodum ſimplex. Scilicet ſi per quodvis parabolae punctum Fig. 1. M ducatur tangens MT atque normalis MN, capiantur-

que abſciſſae $TN = z$, ordinatae $NM = v$, reperitur aequatio $v^2 = az$, perfecte ſimilis ei, quae parabolae naturam exprimit per coordinatas orthogonales ad axem relatas. Eſt enim $TN : NM = NM : PN$, h. e. $v^2 = uz$. Quare cum in parabola ſit $u = \frac{y\partial y}{\partial x}$ conſtans, erit $v^2 = az$. Quae aequatio coniuncta cum generali omnibus curvis competenti, $v^2 = uz$, praebet $u = a$, ſeu ſubnormalem conſtantem. Vnde viciſſim ſequitur, hanc aequationem $v^2 = az$, ſoli parabolae competere (§. 3.), eiusque naturam non minus definire quam iſtam, $y^2 = ax$.

§. 5. Cum area parabolae Apollonianae aequalis ſit beſſi rectanguli ex abſciſſa et ordinata, facile patet, eandem relationem nulli alii curvae competere poſſe. Sin autem generaliter ponamus aream ſeu

$$\int y\,\partial x = \tfrac{m}{n}\,xy, \text{ h. e. } y\,\partial x = \tfrac{m}{n}(x\,\partial y + y\,\partial x),$$

reperietur $(n-m)y\,\partial x = m\,x\,\partial y$, vel $\frac{m\,\partial y}{y} = \frac{(n-m)\partial x}{x}$, ac integrando $y^m = a\,x^{n-m}$. Unde patet, curvam quaeſitam eſſe parabolici generis, ſi $n > m$, hyperbolici, ſi $m > n$, et rectam axi parallelam, ſi $m = n$. Poſito $m = 2$, $n = 3$, oritur aequatio ad parabolam Apollonianam: $y^2 = ax$.

§. 6. Inſignibus parabolae proprietatibus merito haec annumeratur, quae ob uſum ſuum in Catoptricis eſt notiſſima: ſi ex quovis curvae puncto M ducatur recta MF ad focum parabolae, aliaque Mn axi parallela, binae iſtae lineae aequaliter ad tangentem TMt inclinantur, ſive eſt $FMT = nMt$. Inquiramus iam generatim, utrum plures dentur curvae, in quibus punctum quoddam fixum F poſſit aſſignari, ex quo ſi ad quodcunque curvae punctum M ducatur recta, aliaque recta axi parallela per punctum M,

M, ut binae iſtae lineae aequaliter ad curvae tangentem in M inclinentur. Quem in finem pono $AF = f$, ut ſit

$$TF = TP - AP + AF = t - x + f.$$

Quare cum ſit $tMn = MTN$, requiritur ut ſit

$$MF = TF = t - x + f.$$

Eſt autem

$$MF = \sqrt{(y^2 + PF^2)} = \sqrt{(y^2 + x^2 - 2fx + f^2)},$$

et $t = \frac{y\partial x}{\partial y}$, unde ſequitur:

$$y^2 + x^2 - 2fx + ff = \frac{(y\partial x - x\partial y + f\partial y)^2}{\partial y^2}.$$

Hinc reperitur

$$y^2(\partial y^2 - \partial x^2) + 2xy\partial x\partial y - 2fy\partial x\partial y = 0, \text{ ſeu}$$
$$y(\partial y^2 - \partial x^2) + 2(x - f)\partial x\partial y = 0.$$

Ponatur $\partial y = p\partial x$, ut fiat

$$y(p^2 - 1) + 2(x - f)p = 0, \text{ ſeu}$$

$y = \frac{2p(x-f)}{1-p^2}$, unde differentiando naſcitur

$$\partial y = \frac{2p(1-p^2)\partial x + 2(x-f)(1+p^2)\partial p}{(1-pp)^2} = p\partial x.$$

Hinc nanciſcimur

$$2(x-f)(1+p^2)\partial p = p\partial x(p^4 - 1) = p\partial x(p^2+1)(p^2-1).$$

Unde concluditur aut $p^2 + 1 = 0$, quod praeberet valorem ipſius p impoſſibilem, aut

$$2(x-f)\partial p = p(p^2-1)\partial x, \text{ h. e.}$$
$$\frac{\partial x}{x-f} = \frac{-2\partial p}{p(1-p^2)}, \text{ et integrando}$$
$$l(x-f) = l(1+p) + l(1-p) - 2lp + la.$$

Proinde

$$x - f = \frac{a(1-p^2)}{p^2} = \frac{a\partial x^2}{\partial y^2} - a, \text{ ſeu}$$
$$a\partial x^2 = (a - f + x)\partial y^2,$$

unde invenitur $\partial y = \frac{a^{\frac{1}{2}} \partial x}{\sqrt{(a-f+x)}}$, atque iterum integrando, $y = b + 2\sqrt{a(a-f+x)}$, sive

$$(y-b)^2 = 4a(x+a-f);$$

quae aequatio docet, hanc proprietatem nonnisi parabolae Apollonianae competere.

§. 7. Quemadmodum parabola uno, sic hyperbola atque ellipsis binis praeditae sunt focis, quae proprietas num aliis quoque curvis competat, iam inquiramus. Praemonendum autem videtur, me nonnisi de foco proprie sic dicto hic loqui, qualis in Opticis consideratur. Radii nempe ex alterultro foco in curvam incidentes ita reflectuntur, ut vel in altero foco concilientur (quo casu focus *physicus* Ellipsin dat), vel ut facta reflexione omnes radii ex altero foco egressi videantur (quo casu focus *geometricus* seu *virtualis* Hyperbolam praebet). Ambo casus generatim sub uno facile comprehenduntur. Sint curvae A M bini foci F et G, per punctum quodvis M transeat tangens T t. Requiritur itaque, vt rectae a puncto M ad binos focos ductae tangentem T t sub aequalibus angulis secent, seu ut sit T M F = t M G, quod de ellipse et hyperbola valere constat; modo notetur, si G ad alteram puncti F partem cadat, fore T M F = T M G. Eadem vero relatio, quo utrumque casum complectatur, generaliter sic enunciatur. Est

Fig. 4.

$$\text{fin. T M F} = \frac{\text{F T. } \textit{fin.}\text{ M T F}}{\text{M F}}, \text{ et}$$

$$\text{fin. } t\,\text{M G} = \text{fin. T M G} = \frac{\text{T G. } \textit{fin.}\text{ M T F}}{\text{M G}};$$

quapropter esse oportet $\frac{\text{F T}}{\text{M F}} = \frac{\text{G T}}{\text{M G}}$. Nuncupatis iam A P = x, P M = y, A F = f, A G = g, cum sit subtangens

P T

$PT = \frac{y\partial x}{\partial y}$, habemus

$$TF = PT - AP + AF = \frac{y\partial x - x\partial y + f\partial y}{\partial y};$$

eodemque modo

$$TG = \frac{y\partial x - x\partial y + g\partial y}{\partial y}.$$

Praeterea eſt

$$MF = \sqrt{(PM^2 + PF^2)} = \sqrt{(y^2 + x^2 - 2fx + f^2)}, \text{ et}$$
$$MG = \sqrt{(y^2 + x^2 - 2gx + g^2)}.$$

Aequatio itaque propoſita eſt

$$\frac{y\partial x - x\partial y + f\partial y}{\sqrt{[y^2 + (x-f)^2]}} = \frac{y\partial x - x\partial y + g\partial y}{\sqrt{[y^2 + (x-g)^2]}};$$

quae eſt integranda. Quem in finem reddatur ea homogenea, ponendo $x - f = u$, et $x - g = v$, atque in parte aequationis priore ſubſtituatur $\partial x = \partial u$, in poſteriore $\partial x = \partial v$, eritque

$$\frac{y\partial u - u\partial y}{\sqrt{(y^2 + u^2)}} = \frac{y\partial v - v\partial y}{\sqrt{(y^2 + v^2)}}.$$

Poſito inſuper $u = py$, $v = qy$, ut ſit $\partial u = p\partial y + y\partial p$, $\partial v = q\partial y + y\partial q$, erit

$$\frac{\partial u - p\partial y}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{\partial v - q\partial y}{\sqrt{(1+q^2)}}, \text{ h. e. } \frac{y\partial p}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{y\partial q}{\sqrt{(1+q^2)}},$$

ideoque $\frac{\partial p}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{\partial q}{\sqrt{(1+q^2)}}$, cuius integrale eſt:

$$l[p + \sqrt{(1+p^2)}] = lc + l[q + \sqrt{(1+q^2)}], \text{ ſive}$$
$$p + \sqrt{(1+p^2)} = cq + c\sqrt{(1+q^2)}.$$

Quodſi nunc reſtituantur valores $p = \frac{u}{y}$, $q = \frac{v}{y}$, fiet

$$u + \sqrt{(y^2 + u^2)} = cv + c\sqrt{(y^2 + v^2)},$$

quare cum ſit $u = x - f$, $v = x - g$, habemus

$$\sqrt{[y^2 + (x-f)^2]} - c\sqrt{[y^2 + (x-g)^2]} = (c-1)x + f - cg.$$

Sumtis quadratis ſit

$$(c^2+1)(y^2+x^2) - 2(f+c^2 g)x + f^2 + c^2 g^2 - 2c\sqrt{[y^2+(x-f^2)][y^2+(x-g)^2]} = [c^2-2c+1)x^2 + 2(f-cg)(c-1)x + f^2 + c^2 g^2 - 2cfg,$$

seu

$$2c\sqrt{[y^2+(x-f)^2][y^2+(x-g)^2]} = (c^2+1)y^2 + 2cx^2 - 2c(f+g)x + 2cfg.$$

Sumantur denuo quadrata, atque legitimis factis reductionibus et diuisione per y^2 instituta, reperitur:

$$(c^2-1)^2 y^2 + 4c(c-1)^2 x^2 - 4c(c-1)^2 (f+g)x + 4cfg(c^2+1) - 4c^2(f^2+g^2) = 0.$$

Hinc iam patet, problemati nonnisi lineas secundi ordinis vel sectiones conicas satisfacere. Quo nunc constans arbitraria c determinetur, abscissae a vertice curvae computentur, vt casu $x = 0$ sit quoque $y = 0$: tum quoniam in aequatione integrali

$$u + \sqrt{(y^2+u^2)} = cv + c\sqrt{(y^2+v^2)}$$

esse nequit $c = 0$, in ultima aequatione habemus:

$$fg\,c^2 - (f^2+g^2)c + fg = 0,$$

unde resultat

$$c = \frac{f^2+g^2}{2fg} \pm \sqrt{\left(\frac{f^4+2f^2g^2+g^4}{4f^2g^2} - 1\right)} = \frac{f^2+g^2 \pm (f^2-g^2)}{2fg}.$$

Una itaque radix est $c = \frac{g}{f}$, altera $c = \frac{f}{g}$. Pro priore aequatio nostra est:

$$\frac{(g^2-f^2)^2}{f^4} y^2 + \frac{4g(g-f)^2}{f^3} x^2 - \frac{4g(g+f)(g-f)^2}{f^3} x = 0,$$

seu dividendo per $\frac{(g-f)^2}{f^4}$,

$$(g+f)^2 y^2 + 4fg\,x^2 - 4fg(f+g)x = 0.$$

Cum in hac aequatione literae f et g eodem prorsus modo contineantur, ad eandem quoque expressionem perveniremus, si

ſi alteram ſubſtituiſſemus radicem $c = \frac{f}{g}$. Quamobrem haec eſt aequatio generalis curvarum focis praeditarum, abſciſſis a vertice captis, in qua ellipſis, hyperbola et parabola continentus. In ellipſe ſi axis transverſus dicatur $2a$, coniugatus $2b$, eſt

$$f = a - \sqrt{(a^2 - b^2)},\ g = a + \sqrt{(a^2 - b^2)},\ f + g = 2a,\ fg = b^2,$$

vnde aequatio noſtra fit

$$4a^2y^2 + 4b^2x^2 - 8ab^2x = 0,\ \text{h. e.}\ y^2 = \tfrac{2b^2}{a}x - \tfrac{b^2}{a^2}x^2,$$

quae eſt notiſſima illa aequatio ad ellipſin. In hyperbola eſt

$$f = \sqrt{(a^2 + b^2)} - a,\ g = -\sqrt{(a^2 + b^2)} - a,\ f + g = -2a,\ fg = -b^2,$$

et aequatio noſtra:

$$4a^2y^2 - 4b^2x^2 - 8ab^2x = 0,\ \text{h. e.}\ y^2 = \tfrac{2b^2}{a}x + \tfrac{b^2}{a^2}x^2,$$

uti requiritur. In parabola eſt $g = \infty$, unde aequatio noſtra abit in hanc: $g^2y^2 - 4fg^2x = 0$, ſeu $y^2 = 4fx$, ubi eſt $4f$ latus rectum parabolae, quod e natura parabolae conſtat. In circulo denique eſt $f = g = a$, proinde aequatio noſtra: $4a^2y^2 + 4a^2x^2 - 8a^3x = 0$, ſeu $y^2 = 2ax - xx$, quemadmodum eſſe debebat.

§. 8. Si circuli diameter pro axe abſciſſarum aſſumatur, in quovis puncto normalis eſt aequalis ipſi circuli radio, qui ſimul eſt radius oſculi; unde duae oriuntur proprietates circuli principales, nempe 1.) quod *radius oſculi eſt conſtans*, et 2.) quod *normalis ubique radio oſculi eſt aequalis*. Si iam methodo inverſa examen inſtituamus, quibusnam curvis duae iſtae proprietates competant, videbimus, poſteriorem ſine priore eſſe non poſſe. Pro priore dicamus arcum $= s$, ut poſito ∂x conſtante ſit radius oſculi vel $\frac{\partial s^3}{\partial x \partial \partial y} = a$; atque poſito $\partial y = p\partial x$, erit $\partial s = \partial x\sqrt{(1 + pp)}$, ideo-

ideoque aequatio propoſita:

$$\partial x\,(1+pp)^{\frac{3}{2}} = a\,\partial p, \text{ ſeu } \partial x = \frac{a\,\partial p}{\sqrt{(1+pp)^3}}.$$

Quo nunc irrationalitas tollatur, ſtatuamus $1+p^2 = p^2 z^2$, unde ſit

$$p = \frac{1}{\sqrt{(z^2-1)}},\ \partial p = \frac{-z\,\partial z}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}},\ 1+p^2 = \frac{z^2}{z^2-1};$$

quibus valoribus ſubſtitutis habemus $\partial x = \frac{-a\,\partial z}{z\,z}$, et integrando $x = \frac{a}{z} + b$, ubi ſi reſtituatur

$$z = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{p},\ \text{fiet } x = \frac{a\,p}{\sqrt{(1+p^2)}} + b.$$

Hinc reperitur

$$p = \frac{x-b}{\sqrt{[a^2-(x-b)^2]}} = \frac{\partial y}{\partial x},$$

proinde

$$\partial y = \frac{(x-b)\,\partial x}{\sqrt{[a^2-(x-b)^2]}},$$

cuius integrale eſt

$$y = c - \sqrt{[a^2-(x-b)^2]},\ \text{ſeu}$$
$$(y-c)^2 = a^2-(x-b)^2;$$

quae eſt aequatio ad circulum generalis, cuius radius $= a$, diſtantia axis abſciſſarum a centro $= c$, initii abſciſſarum a centro $= b$. Solus itaque circulus ita eſt comparatus, ut radius oſculi ſit conſtans: quod per ſe patet.

§. 9. Conſideretur iam caſus, ubi normalis aequatur radio oſculi. Cum igitur normalis ſit $= \frac{y\,\partial s}{\partial x}$, eſſe oportet

$$\frac{y\,\partial s}{\partial x} = \frac{-\partial s3}{\partial x\,\partial\,\partial y},\ \text{h. e. } y\,\partial\,\partial y = -\partial s^2,$$

ſeu poſito ∂x conſtante, et

$$\partial y = p\,\partial x,\ y\,\partial p = -\partial x\,(1+pp),$$

ubi

vbi ſi ſubſtituatur $\partial x = \frac{\partial y}{p}$, nanciſcimur $\frac{\partial y}{y} = \frac{-p\partial p}{1+pp}$, vnde ſit integrando

$$ly = la - \tfrac{1}{2}l(1+pp), \text{ h. e. } y = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Sine ulteriore integratione hinc iam concludere licet, relationem propoſitam ſoli circulo competere. Cum enim ſit $\sqrt{(1+pp)} = \frac{\partial s}{\partial x}$, ex aequatione noſtra differentiali per primam integrationem reperta, $y\sqrt{(1+pp)} = a$, ſeu $\frac{y\partial s}{\partial x} = a$, ſequitur, in curva quaeſita normalem $\frac{y\partial s}{\partial x}$ eſſe conſtantem. Unde ob aequalitatem normalis et radii oſculi concluditur, radium oſculi eſſe conſtantem, quod cum ſoli circulo proprium ſit (§. 8.), prima iam integratio nos docuit, curvam quaeſitam nonniſi circulum eſſe. Nihil itaque ſupereſt, niſi ut ulterior integratio ſitum axis determinet. Cum autem propoſita relatio, quod nempe normalis ubique radio ſit aequalis, in circulo contingere nequeat, niſi axis abſciſſarum per centrum tranſeat, a priori iam aequationem integralem determinare licet; erit ſcilicet aequatio, quae circuli naturam definit, quando axis abſciſſarum per centrum tranſit. Idem ipſa integratio docet. Per aequationem enim modo repertam eſt

$$p = \frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{y} = \frac{\partial y}{\partial x}, \text{ et } \partial x = \frac{y\partial y}{\sqrt{(a^2-y^2)}},$$

cuius integrale eſt

$$x = b - \sqrt{(a^2-y^2)}, \text{ h. e.}$$
$$(x-b)^2 = a^2 - y^2, \text{ ſeu } y^2 = a^2 - (x-b)^2,$$

quae eſt aequatio ad circulum radii a, abſciſſis in diametro captis.

§. 10. Quemadmodum in expreſſione generali radii curvedinis ſignum $(-)$ indicat, curvam verſus axem eſſe

concavam, ſeu radium oſculi atque normalem ad eandem curvae partem cadere, ita haec aequatio: $\frac{y\,\partial s}{\partial x} = \frac{+\partial s3}{\partial x\,\partial\partial y}$ procul dubio ſignificat, radium oſculi normalemque eſſe quidem aequales, ſed ad oppoſitas partes cadere, h. e. curvam verſus axem eſſe convexam. Operae pretium videtur, in naturam illius curvae ſollertius inquirere, cui haec proprietas cum circulo eſt communis, quod radius oſculi ubique normali ſit aequalis ſed oppoſitus. Curvam reſultare videbimus transcendentem inſignibus proprietatibus affectam; res quoque per ſe eſt notatu digna, idem problema ad curvam perducere omnium ſimpliciſſimam, ſi curva verſus axem ſit concava, ad curvam autem transcendentem, ſi curva verſus axem ſit convexa.

§. 11. Eſt itaque aequatio propoſita: $y\,\partial\partial y = \partial s^2$, ſeu poſito $\partial y = p\,\partial x$,

$$y\,\partial p = \partial x\,(1 + p^2) = \frac{\partial y\,(1+p^2)}{p},$$

unde fit $\frac{\partial y}{y} = \frac{p\,\partial p}{1+pp}$, et integrando

$$ly = l\,a + \tfrac{1}{2}l\,(1 + p\,p),\ \text{h. e. } y = a\sqrt{(1 + p\,p)}.$$

Hinc porro habetur

$$p = \frac{\sqrt{(y^2 - a^2)}}{a} = \frac{\partial y}{\partial x},\ \text{et } \partial x = \frac{a\,\partial y}{\sqrt{(y^2 - a^2)}},$$

cuius integrale eſt

$$x - b = a\,l\,\frac{y + \sqrt{(y^2 - a^2)}}{a} = a\,l\,\frac{a}{y - \sqrt{(y^2 - a^2)}}.$$

Vnde porro habetur

$$e^{\frac{x-b}{a}} = \frac{y + \sqrt{(y^2 - a^2)}}{a},\ \sqrt{(y^2 - a^2)} = a\,e^{\frac{x-b}{a}} - y,$$

denotante nempe e baſin logarithmorum naturalium, ideoque

$$a^2\,e^{\frac{2(x-b)}{a}} - 2\,a\,y\,e^{\frac{x-b}{a}} + a^2 = 0,$$

vnde

vnde oritur

$$y = \tfrac{1}{2} a \left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{\frac{b-x}{a}}\right).$$

Cum univerſalitati nihil detrahetur, ſi una conſtantium determinetur, ponamus $a = 1$, atque habebimus hanc aequationem:

$$y = \frac{e^{x-b} + e^{b-x}}{2}.$$

Determinemus nunc alteram conſtantem b ita, ut aequationis forma reddatur quam ſimpliciſſima. Quem in finem notetur, caſu $x = \pm\infty$ fieri $y = +\infty$, nunquam autem fieri poſſe $y = 0$, ſeu curvam axi nunquam occurrere poſſe, vnde exiſtere debet valor quidam ipſius x finitus, ad quem y eſt Minimum, qui reperitur ponendo

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{e^{x-b} - e^{b-x}}{2} = 0, \text{ h. e.}$$

$$x - b = b - x, \text{ ſeu } x = b.$$

Ad utramque huius puncti partem in aequalibus diſtantiis ordinatae y eundem habent valorem. Poſito enim $x = b + c$, fit $y = \frac{e^c + e^{-c}}{2}$, ac poſito $x = b - c$, eſt $y = \frac{e^{-c} + e^c}{2}$, ut ante. Aſſumamus itaque hoc punctum, ubi $x = b$, pro initio abſciſſarum, quem in finem loco $x - b$ poni debet x, vt ſequentem nanciſcamur aequationem: $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, quae in ſeriem infinitam euoluta praebet ſeriem illam notiſſimam:

$$y = 1 + \tfrac{x^2}{1.2} + \tfrac{x^4}{1.2.3.4} + \tfrac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{cet.}$$

In hac igitur aequatione, valori $x = \pm c$, idem valor ipſius y reſpondet; poſito $x = 0$, fit $y = 1 = a$, qui minimus va-

lor eſt applicatarum y. Sive autem ponatur $x = +\infty$, ſive $x = -\infty$, utroque caſu fit $y = +\infty$. Cuicunque tandem valori ipſius x, ſive poſitivo, ſive negativo, unicus ipſius y valor reſpondet, isque ſemper realis. Quodſi itaque ex initio abſciſſarum erigatur normalis ad axem, ea erit curvae diameter, unde iam curvae figuram clare cognoſcere licet. Sit D B axis, C initium abſciſſarum, atque erecta normali C A $= a$, eaque pro unitate aſſumta, erit A curvae vertex, a quo puncto inde ad utramque diametri C A E partem curva binis ramis A M, A N, in infinitum excurrit.

[Fig. 5.]

§. 12. Captis iam abſciſſis in diametro C E, ut poſito C E $= x$, E M $= y$, aequatio ſupra (§. 11.) reperta fiat $y = l\,[x + \sqrt{(x^2 - 1)}]$, (poſito nempe $a = C\,A = 1$, et $b = 0$); cuicunque ipſius x valori unicus modo valor ipſius y realis reſpondere poſſet videri, cum tamen revera binos adeſſe debere valores reales eosque aequales, per ſuperiora conſtet. Dubium hoc penitus evaneſcet, ſi ſequentia obſervarimus. Cum ſit

$$x + \sqrt{(x^2 - 1)} = \frac{1}{x - \sqrt{(x^2 - 1)}},$$

erit quoque

$$y = -l\,[x - \sqrt{(x^2 - 1)}] = E\,M.$$

(Hic enim valor ipſius y ſemper eſt poſitivus, ob

$$x - \sqrt{(x^2 - 1)} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^3} + \frac{1}{16x^5},$$

quae ſeries valde convergens ob $x > 1$, ſemper unitate eſt minor). Verum ob ambiguitatem ſigni radicalis prior ipſius y valor proprie eſt $= +l\,[x \pm \sqrt{(x^2 - 1)}]$, pariterque poſterior $y = -l\,[x \mp \sqrt{(x^2 - 1)}]$, vnde duplex ordinatae y valor hac aequatione continetur: $y = \pm l\,[x \pm \sqrt{(x^2 - 1)}]$, ubi eſt

E M

$EM = +l[x+\sqrt{(x^2-1)}] = -l[x-\sqrt{(x^2-1)}]$, et
$EN = -l[x+\sqrt{(x^2-1)}] = +l[x-\sqrt{(x^2-1)}]$,

quos binos valores aequales esse sed oppositos, cuivis patet. Veritas horum ratiociniorum ex ipsa integratione patet (§. 11.), cuius ope nostram aequationem nacti sumus, in qua utrumvis signum $\pm$ radici praeponere licebat. Perspicuum quoque est, sive statuatur

$x = l[y+\sqrt{(y^2-1)}]$, sive
$x = l[y-\sqrt{(y^2-1)}]$,

eundem pro y valorem resultare. Est enim

$e^x - y = \pm\sqrt{(y^2-1)}$,

vnde sumendis quadratis utroque casu reperitur $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$,

h. e. eidem valori ipsius y, nempe BM et DN duplex abscissae x valor respondet, puta

$CB = l[y+\sqrt{(y^2-1)}]$, et
$CD = l[y-\sqrt{(y^2-1)}]$,

seu permutatis coordinatis, ad eandem abscissam $CE = x$, duplex ordinata y pertinet,

$EM = l[x+\sqrt{(x^2-1)}]$, et
$EN = l[x-\sqrt{(x^2-1)}] = -l[x+\sqrt{(x^2-1)}]$,

vnde semper $EN = -EM$, seu CE est curvae diameter. Ceterum patet, si $x < 1$, y semper fore impossibilem. Posito autem $x = 1$, fit $y = l\,1 = 0$. Casu $x = \infty$, pro signo (+) est $EM = +l\,2\infty = +\infty$, pro signo (−) autem est

$EM = -l\,0 = +\infty$;

eodem modo est

$EN = +l\,0 = -\infty$, et
$EN = -l\,2\infty = -\infty$.

Ambo itaque rami in infinitum excurrunt, sed ordinata E M est infinitum ordinis inferioris quam abscissa, unde et curvae nostrae figura Parabolici generis esse videtur. Sin autem x valorem induit negativum, ob $\sqrt{(x^2-1)} < x$, y semper fit impossibilis. Idem quoque ex aequatione priore $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ sequitur, ubi $y = \mathrm{BM}$ nunquam negativum recipere potest valorem: unde viciſſim concludere licet, numerorum negativorum logarithmos esse imaginarios.

§. 13. Redeamus nunc ad aequationem priorem inter $\mathrm{CB} = x$ et $\mathrm{BM} = y$, quae erat $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Hinc posito ∂x constante, continua differentiatione reperitur

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y;$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Eodemque modo invenitur

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = y; \quad \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial y}{\partial x};$$

et generatim

$$\frac{\partial^{2n} y}{\partial x^{2n}} = y = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{cet. et}$$

$$\frac{\partial^{2n+1} y}{\partial x^{2n+1}} = \frac{\partial y}{\partial x} = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{cet.}$$

Posito itaque $x = 0$, est $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = +1$, unde hoc casu y est Minimum, ut iam supra vidimus. Cum praeterea sit

$p =$

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ fiet } p^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4};$$

$$1 + p^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} = y^2, \text{ et } \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = y;$$

vnde habemus $\frac{y \partial p}{\partial x} = y^2 = 1 + p^2$, fiue

$$\frac{y}{\partial x} = \frac{\partial x (1 + p^2)}{\partial \partial y} = \frac{\partial s^2}{\partial x \partial \partial y}, \text{ ideoque } \frac{y \partial s}{\partial x} = \frac{\partial s^3}{\partial x \partial \partial y};$$

h. e. normalis = radio oſculi negative ſumto, quemadmodum requiritur.

§. 14. Inter inſignes huius curvae proprietates haec merito eſt referenda, quod eius quadratura et rectificatio geometrice poſſit aſſignari, conceſſa nempe curvae conſtructione, et quod una ab altera dependeat. Siquidem enim ſupra (§. 13.) invenimus $1 + p^2 = y^2$, inde fit $\partial s = \partial x \sqrt{(1 + p^2)} = y \partial x$; h. e. elementum areae $y \partial x$ aequatur elemento arcus ∂s ducto in lineam pro unitate aſſumtam, quae erat $AC = a$. Eſt itaque $y \partial x = a \partial s$. Cum igitur area ACBM et arcus AM ambo evaneſcant caſu $x = 0$, nulla conſtans adiicitur, eritque $ACBM = AC . AM$: unde patet, quo pacto quadratura pendeat a rectificatione et vice verſa. Utraque vero ſeorſim ſic reperitur. Cum ſit (§. 13.) $y = \frac{\partial p}{\partial x}$, habemus $y \partial x = a \partial s = \partial p$, ideoque arcus

$$AM = \frac{ACBM}{AC} = p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ducta itaque per verticem A recta axi parallela $A\mu$, in ea capiatur $Am = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, atque poſito $x = CB$, erit $Am = Cb =$ arcui AM, et rectangulum $CAmb =$ areae ACBM; unde ſi auferatur pars communis Ca, erit $Bm = AaM$. Quodſi inſuper fiat $a : x = y : C\beta$, ſeu $C\beta = xy$, erit rectangulum $C\mu = xy =$ rectangulo CM, et $B\mu = aE$.

Quare

Quare cum fit $Bm = AaM$, ſequitur $b\mu =$ areae AME. Biſecta denique $a\mu$ in μ', et ducta chorda AM, erit rectangulum $b\mu' =$ ſegmento AM inter arcum et chordam intercepto. Quoniam in problematis ſolutione (§. 10.) e circulo naſcebatur curva noſtra, radio negativo accepto, iſta curva tanquam circulus negativus poteſt conſiderari, quod etiam cum quadratura convenit. Quemadmodum enim ſectores *in* circulo arcui in dimidium radii ducto aequantur, ita hic area *extra* curvam deſcripta ACBM arcui AM in conſtantem AC, cuius duplum etiam pro radio curvae aſſumere licet (§. 19.), ducto reperitur aequalis: et quemadmodum curvae noſtrae quadratura et rectificatio a numero *e* h. e. a logarithmis realibus numerorum poſitivorum dependet, ſic eadem elementa in circulo logarithmis imaginariis exprimere licet.

§. 15. Ducto radio vectore CM, erit ſectoris ACM area

$$= ACBM - CBM = \frac{e^x - e^{-x} - xy}{2} = \frac{e^x(1-\frac{1}{2}x) - e^{-x}(1+\frac{1}{2}x)}{2}.$$

Haec expreſſio caſu $x = 2$ fit negativa, ideoque pro minore quodam ipſius x valore iam evaneſcit, quod indicat, radium vectorem CM, niſi ſit curvae tangens, illam bis eſſe ſecaturum, quem caſum *Fig. 6.* ob oculos ponit. Ibi, quoniam ſegmentum DEM eſt pars trianguli $CPM = \frac{xy}{2}$, non autem areae ACPM, utique fieri poteſt $CPM = ACPM$, ſi nempe $DEM = ACD$; ſin autem $DEM > ACD$, erit quoque $CPM > ACPM$. Noſtra igitur aequatione ſector ACD proprie invenitur, qui abſciſſae CB reſpondet. Sin autem iſte ſector ad abſciſſam CP referatur, cui radius CDM non minus reſpondet, per aequationem noſtram obtinemus $ACD - DEM$, quae igitur expreſſio evaneſcere immo negativum induere poteſt valorem. Unde non inutile erit expres-

preſſionem quaere ſegmenti DEM, cui abſciſſae CB = b et CP = c reſpondent.

§. 16. Ex §. 14. habemus $ACPM = \frac{e^c - e^{-c}}{2}$, et $ACBD = \frac{e^b - e^{-b}}{2}$, proinde

$$DBPME = \frac{e^c - e^{-c} - e^b + e^{-b}}{2}.$$

Cum praeterea ſit

$$CPM = \frac{CP \cdot PM}{2} = \frac{c\,e^c + c\,e^{-c}}{4}, \text{ et}$$

$$CBD = \frac{b\,e^b + b\,e^{-b}}{4}, \text{ nanciſcimur}$$

$$DBPMD = \frac{c\,e^c + c\,e^{-c} - b\,e^b - b\,e^{-b}}{4},$$

unde area DBPME ſubtracta relinquet ſegmentum

$$DEM = \frac{e^c(c-2) + e^{-c}(c+2) + e^b(2-b) - e^{-b}(2+b)}{4}.$$

Sin autem triangulum CBD auferatur ab area ACBD, reſiduum erit $ACD = \frac{e^b(2-b) - e^{-b}(2+b)}{4}$, vnde caſu $DEM = ACD$ eſſe oportet $e^c(c-2) + e^{-c}(c+2) = 0$, quod etiam reperitur, ſi expreſſionem pro ſectore ſupra (§. 15.) inventam $\frac{e^x(1-\frac{1}{2}x) - e^{-x}(1+\frac{1}{2}x)}{2}$ nihilo aequalem ponamus. Habetur hinc

$$e^{2x} = \frac{1+\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x}, \text{ et } 2x = l\frac{1+\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x},$$

unde fit

$$x = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{x^3}{3.2^3} + \tfrac{x^5}{5.2^5} + \text{cet. sive}$$

$$1 = \tfrac{x^2}{3.2^2} + \tfrac{x^4}{5.2^4} + \tfrac{x^6}{7.2^6} + \text{cet.}$$

ficque reperitur circiter $x = 1,9150094$. Tunc enim eſt $\frac{2+x}{2-x} = 46,064028$; proinde $l\frac{1+\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x} = 3,83001184$; at $2x = 3,83000188$. Pro hoc itaque valore ipſius x eſt $DEM = ACD$, ideoque

$$ACPM = CPM = \tfrac{xy}{2} = 3,319803;$$

ob $y = 3,46714$; atque angulus ACD, cuius tangens $= \frac{x}{y}$, reperitur $= 28^0.54'.48''$.

§. 17. Cum radius vector CM curvae bis occurrat in D et M, creſcente angulo ACD, linea CM tandem fieri debet curvae tangens, atque punctum contactus N ſic invenitur. Si tangens tNT axi occurrat in puncto T, erit

$$CT = CQ - QT = x - \frac{y\partial x}{\partial y} = x - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = x - \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1},$$

quae expreſſio evaneſcit, quando $xe^{2x} - x - e^{2x} - 1 = 0$, h. e. $e^{2x} = \frac{x+1}{x-1}$, ſive $2x = l\frac{x+1}{x-1}$, vnde eſſe oportet $x > 1$. Sine gravi errore ſumi poteſt $x = 1,2$; vnde fit $\frac{x+1}{x-1} = 11$, et $l\,11 = 2,3979$; qui valor haud multum deficit a $2x = 2,4$. Poſito itaque $CQ = 1,2$; tangens tNT per centrum C tranſit. Quare cum ſit $e^{1,2} = 3,3201154$; et

$$e^{-1,2} = 0,3011943; \text{ erit}$$

$$y = \frac{e^{1,2} + e^{-1,2}}{2} = 1,8106548,$$

et $x = 1,2$; unde ob tang. $ACD = \frac{x}{y}$, fiet angulus $ACD = 33^0.32'.3''$.

§. 18.

§. 18. Ducta adhuc NR normali ad tangentem Tt, erit subnormalis

$$QR = \frac{y\,\partial y}{\partial x} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{4} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4},$$

quae fit $= \pm\infty$, casu $x = \pm\infty$, ac evanescit casu $x = 0$, h. e. in vertice A. His si iungantur formulae §. 14. erit $QR = ys$, sive $a : y = s : QR$. Quare cum erat

$QT = \frac{y\,\partial x}{\partial y} = \frac{y}{s}$, habemus

$$TR = \frac{y\,\partial x}{\partial y} + \frac{y\,\partial y}{\partial x} = \frac{y\,\partial s^2}{\partial x\,\partial y} = \frac{y^3\,\partial x}{\partial y} = \frac{y^3}{s}.$$

Normalis ipsa atque radius osculi est

$$= \sqrt{(QR^2 + QN^2)} = \sqrt{\left(\frac{e^{4x} - 2 + e^{-4x}}{16} + \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}\right)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(e^{4x} + 4e^{2x} + 6 + 4e^{-2x} + e^{-4x})}.$$

Quare cum quantitas signo radicali affecta fit

$$= (e^{2x} + 2 + e^{-2x})^2 = (4yy)^2,$$

reperitur radius osculi NZ vel normalis $NR = yy$, quod breviore via inde reperitur, quod fit $\partial s = y\,\partial x$, $\partial\partial y = y\,\partial x^2$ (§. 13. 14.), vnde fit

$$NZ = \frac{\partial s^3}{\partial x\,\partial\partial y} = yy, \text{ et } NR = \frac{y\,\partial s}{\partial x} = yy,$$

seu radius osculi et normalis semper est tertia proportionalis ad lineam $CA = 1$, et ordinatam y. Quare cum semper quoque fit $QT \cdot QR = y^2$, sequitur $CA : QT = QR : NR$, et si capiatur $QS = 1 = CA$, et $SNV = 90^0$, erit $QV = NR$; unde sequitur $QV > QR$, ideoque ob $RNT = 90^0 = SNV$, punctum S inter Q et T cadere debet, seu esse oportet $QT < 1$; quod etiam ex ipsa formula derivatur

$$QT = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

ubi numerator ſemper maior denominatore. Eadem expreſſio fit infinita, ſi $x = 0$, quoniam in vertice A tangens axi parallela; at caſu $x = \infty$, ea fit $= 1$. Unitas igitur eſt limes, ad quem ſubtangens continuo appropinquat, quem autem nunquam attingit. Ceterum quia $QT = \infty$ ſi $x = 0$, eademque parum unitatem excedit, ſi x mediocrem habet valorem, concluditur, ſubtangentem mox fere eſſe conſtantem. E. gr. ſi $x = 3$, reperitur ſubtangens

$$= \frac{e^6 + 1}{e^6 - 1} = 1,00248;$$

et caſu $x = 4$, ſubtangens eſt

$$= \frac{e^8 + 1}{e^8 - 1} = 1,00067.$$

Cum denique caſu $x = \infty$ fiat normalis $NR = y^2 = \infty$, erit quoque radius oſculi infinitus, ſeu curvae rami tandem cum linea recta axi CA parallela confunduntur.

§. 19. Supra (§. 14.) iam obſervatum fuit, lineam $CA = a$ tanquam dimidium radii curvae poſſe conſiderari. Fig. 7. Quodſi itaque in axe CA capiatur $Cc = CA$, et per punctum c ducatur perpendicularis, in qua ſumantur abſciſſae cE, ad quodvis curvae punctum M habemus

$$y = EM = BM + 1 = \frac{e^x + e^{-x} + 2}{2} = \frac{(e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{-x}{2}})^2}{2}.$$

Biſecta itaque CB in puncto b, vt ſit $Cb = \frac{1}{2}x$, eſt $bm = \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{-x}{2}}}{2}$, proinde $EM = 2bm^2$, et $BM = 2bm^2 - 1$, quae inſignis ordinatarum relatio methodum praebet curvam conſtruendi ſimpliciſſimam, ſiquidem ſemper eſt EM quarta proportionalis ad CA, bm et $2bm$.

Nova

Nova hinc etiam naſcitur methodus admodum ſimplex curvam rectificandi ideoque et quadrandi (§. 14.). Nimirum ſi dato puncto m quaeratur arcus Am, ducatur AD abſciſſis CB, et md ordinatis AC parallela, tumque capta $dD = Ad$ atque ducta BM axi AC parallela, biſecetur DB in g, atque circulo ſuper Mg deſcripto erit $De =$ arcui Am. Poſito enim $CB = x$, eſt

$$DM = BM - 1 = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2} = \frac{(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}})^2}{2}.$$

Verum ob $Ad = \frac{1}{2}x$, eſt arcus $Am = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}}}{2}$ (§. 14.), vnde ſequitur $DM = 2Am^2$, ſive $\frac{1}{2}a : Am = Am : DM$; h. e. Am eſt media proportionalis inter Dg et DM, ſive $Am = De$.

SOLUTIO DUBII
CIRCA
RECTIFICATIONEM CURVARUM.

Auctore
F. T. SCHUBERT.

Conuentui exhib. die 30 Iun. 1791.

§. 1.

Saepe in Analyſi evenit, vt ad Problematis ſolutionem vel incognitarum definitionem perveniri nequeat niſi novis introductis incognitis et ope ſubſtitutionum, quibus calculus ſimplificatur. Immo haec idonearum ſubſtitutionum electio, unde calculus reddatur quam ſimpliciſſimus, res eſt, in qua Analyſtae *ingenium* optime diſcernitur: neque vero magis in hoc negotio *iudicio* vacare quis potuerit, quo omnes excludantur ſubſtitutiones, quas Problematis natura reſpuit. Et hic mihi quidem fons eſſe videtur, unde plurima naſcuntur Paradoxain Analyſi obvia. Profecto non mirum videri debet, ſi ex praemiſſis, quae rei naturae non ſunt conſentanea, elicitur concluſio Paradoxon vel contradictionem involvens; neque id Analyſeos defectum, ſed potius perfectionem indicare eſt cenſendum. Quare haud inutilem ſuſciperet laborem, qui eiusmodi Paradoxa colligeret, eorumque cauſam indagaret, quae inde plerumque eſt petenda, quod Analyſta ad calculum nimis attentus, minus inquiſiverit, an, quae calculus ſupponit, cum rei natura conſentiant. Inter

ter eiusmodi Paradoxa dubium illud merito est referendum, quod circa rectificationem curvarum oritur, quae ita sunt comparatae, ut punctum quodpiam fixum in iis possit assignari, e quo si ad quodvis curvae punctum ducatur *radius vector*, haec linea *ubique sit aequalis radio curvaturae* in eodem puncto. Speciali examini curvas istas subiecit Cel. Dn. *Fuss* in *Nov. Act. Acad. Petrop. Tom. IV. pag. 104. sqq.* plurimasque insignes earum proprietates exposuit, ubi autem rem multo generalius aggressus, dubium illud quo pacto sit solvendum, obiter tantum monuit (*loc. cit. pag. 115.*). Quamobrem haud inutile mihi videtur, Paradoxon hoc peculiariter enucleare, cum insigne exemplum praebeat, quo, quae ab initio diximus, optime illustrantur.

§. 2. Sit curva C M *m* ita comparata, ut punctum quoddam A fixum possit assignari, ex quo ubicunque ducatur radius vector A M, idem radio osculi M R sit aequalis. Omnes curvae, quibus haec relatio competit, id habent singulare, quod algebraice sunt rectificabiles. Iisdem autem curvis annumerandus esse videtur circulus circa centrum A quovis radio descriptus, semper scilicet existente A M radio osculi h. e. radio circuli aequali; unde circuli rectificabilitas calculo ista affirmari videtur. Quod dubium quo plenarie tollatur, primum curvae naturam per radios e puncto fixo ductos exprimamus, unde calculus longe simplicior reddetur. Neque vero ceterae curvas definiendi methodi sunt omittendae, ne quis obiiciat una forsan methodo rectificationem obtineri generaliorem quam altera. Tab. VI. Fig. 1.

§. 3. Sit itaque A B axis a quo capiantur anguli B A M $= x$, distantiae A M $= y$; sit *m* punctum proximum, et M μ arcus circuli radio A M descripti: eritque M A *m* $= \partial x$,

M μ

$M\mu = y\,\partial x$, $m\mu = \partial y$, et $Mm = \sqrt{(\partial y^2 + y^2\,\partial x^2)} = \partial s$, posito nempe arcu curvae $= s$. Ductis iam normalibus ad curvam in M, m, in puncto R sibi invicem occurrentibus, erit MR radius curvaturae, positoque angulo $MRm = \partial\Phi$, erit $Mm = \partial s = MR\,.\,\partial\Phi$. Quare cum per hypothesin sit $MR = y$, hanc pro curva aequationem habemus:

$$\partial s = \sqrt{(\partial y^2 + y^2\,\partial x^2)} = y\,\partial\Phi.$$

Posito angulo, sub quo radius vector et radius osculi se invicem secant, seu $AMR = \psi$, vt fiat $AmR = \psi + \partial\psi$, erit in triangulis AMO, RmO, angulus externus

$$AOR = \psi + \partial x = \psi + \partial\psi + \partial\Phi,$$

unde sequitur $\partial\Phi = \partial x - \partial\psi$. Est autem angulus

$$mM\mu = 90^0 - OM\mu = \psi,$$

ideoque tang. $\psi = \frac{\partial y}{y\,\partial x}$, et cos. $\psi = \frac{y\,\partial x}{\partial s}$; unde reperitur

$$\partial.\,\text{tang.}\,\psi = \frac{y\,\partial x\,\partial\partial y - \partial x\,\partial y^2}{y^2\,\partial x^2},$$

posito nempe ∂x constante; proinde

$$\partial\psi = \partial.\,\text{tang.}\,\psi\,.\,\text{cos}^2\psi = \frac{\partial x\,(y\,\partial\partial y - \partial y^2)}{\partial s^2}.$$

Nanciscimur hinc

$$\partial\Phi = \partial x - \partial\psi = \frac{\partial x\,(\partial s^2 - y\,\partial\partial y + \partial y^2)}{\partial s^2} = \frac{\partial x\,(2\,\partial y^2 + y^2\,\partial x^2 - y\,\partial\partial y)}{\partial y^2 + y^2\,\partial x^2},$$

et aequatio ad curvam haec est:

$$\partial s = \sqrt{(\partial y^2 + y^2\,\partial x^2)} = y\,\partial\Phi = \frac{y\,\partial x\,(2\,\partial y^2 + y^2\,\partial x^2 - y\,\partial\partial y)}{\partial y^2 + y^2\,\partial x^2};$$

unde porro fit

$$(\partial y^2 + y^2\,\partial x^2)^{\frac{3}{2}} = y\,\partial x\,(2\,\partial y^2 + y^2\,\partial x^2 - y\,\partial\partial y),$$

quae posito $\partial y = p\,\partial x$, abit in sequentem

$$\partial x\,(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = y\,(2\,p^2\,\partial x + y^2\,\partial x - y\,\partial p), \text{ sive}$$

$$\partial y\,(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = y\,(2\,p^2\,\partial y + y^2\,\partial y - y\,p\,\partial p), \text{ ob } \partial x = \frac{\partial y}{p}.$$

Quae

Quae aequatio cum ſit homogenea, ſubſtituatur $p = uy$, ut ſit $\partial p = u\partial y + y\partial u$, ac aequatio noſtra ita transformabitur:

$$\partial y (u^2+1)^{\frac{3}{2}} = 2u^2\partial y + \partial y - u^2\partial y - uy\partial u,$$

unde ſit

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{-u\partial u}{(u^2+1)[\sqrt{(u^2+1)}-1]},$$

cuius integrale per logarithmos reperitur

$$y = \frac{a\sqrt{(u^2+1)}}{\sqrt{(u^2+1)}-1} = \frac{a\sqrt{(p^2+y^2)}}{\sqrt{(p^2+y^2)}-y}.$$

Habemus itaque $y^2 = (y-a)\sqrt{(p^2+y^2)}$, et per quadrata,

$$p^2 = \frac{y^2(2ay-aa)}{(a-y)^2}.$$

Quapropter cum erat

$$\partial s = \partial x\sqrt{(p^2+y^2)} = \frac{\partial y\sqrt{(p^2+y^2)}}{p},$$

ſubſtituendo

$\sqrt{(p^2+y^2)} = \frac{y^2}{a-y}$, et $p = \frac{y\sqrt{(2ay-aa)}}{a-y}$, fit

$\partial s = \frac{y\partial y}{\sqrt{(2ay-aa)}}$, ac integrando

arcus $s = b + \frac{(a+y)\sqrt{(2ay-aa)}}{3a}$.

§. 4. Hanc ſi expreſſionem ad circulum applicare velimus, novimus, propoſitam relationem aequalitatis inter radium rectorem A M radiumque curvedinis R M in circulo non obtinere, niſi ſit punctum A centrum circuli, ſeu y conſtans; unde etiam expreſſio arcus indefiniti s valorem haberet conſtantem, quod eſt abſurdum. Ipſa igitur aequatio integralis docet, circulum hac methodo integrari non poſſe; unde vero tantum abeſt ut dubium ſolvatur, ut potius inde maiorem vim recipiat. Si enim revera iſta ex calculo ſequatur abſurditas, arcum ſcilicet circuli perpetuo eiusdem eſſe magnitudinis, calculus ſine dubio erroris erit

acuſandus, quare dubii huius ſolutio altius eſt petenda. Oſtendi nempe oportet, curvis iſta methodo rectificatis circulum non comprehendi.

Conſtans a ope aequationis $y = \frac{a\sqrt{(u^2+1)}}{\sqrt{(u^2+1)}-1}$ (§. 3.) facile determinatur. Cum enim in circulo y ſit conſtans, h. e. $p = 0$, et $u = 0$, habemus etiam $a = 0$, ſi quantitatem radicalem affirmative ſumamus; at $a = 2y$, ſi eam negative accipiamus. Prior valor dat

$$s = b + \frac{y\sqrt{(2y-a)}}{3\sqrt{a}} = b + \infty;$$

poſterior autem $s = b$; quod utrumque eſt abſurdum.

§. 5. An vero inde generatim concludere liceat, circulum omnino non eſſe rectificabilem, decidere non auſim. Videmur equidem ſic ratiocinari poſſe: Pro omnibus curvis, quibus propoſita relatio una cum circulo competit, calculus praebet expreſſionem arcus algebraicam, quae autem ita eſt comparata, ut pro ſolo circulo abſurdi quid inde naſcatur; unde ſequi videtur, expreſſionem arcus circularis algebraicam eſſe abſurdam, h. e. circulum algebraice rectificari omnino non poſſe. Quod vero cum a ſcopo noſtro ſit alienum, inquiramus potius, quomodo calculus ipſe doceat, formulam pro elemento arcus ∂s inventam non poſſe integrari, ſi curva ſit circulus, h. e. ſi y ſit conſtans. Dubium enim, de quo hic agitur, in eo conſiſtit, quod calculus noſter in genere affirmet, omnes curvas iſta proprietate praeditas eſſe rectificabiles, nihilo tamen minus circulus, cui iſta proprietas aeque competit, rectificari nequeat, quod calculo contradicere videtur. Quod dubium penitus tolletur, ſi oſtenderimus, calculo ipſo circulum excludi, ſeu quod eodem redit, circulum ſub illis curvis non compre-

prehendi, quae Problemati ſubiiciuntur. Si nempe demonſtratum fuerit, integrationem certam conditionem neceſſario requirere, quae in circulo ſubſiſtere nequit, exceptio a circulo petita calculo minime contradicit. Hoc etenim caſu non omnes iſtas curvas generaliter eſſe rectificabiles calculus declarat, ſed eas tantum, in quibus haec conditio locum habet, ideoque ipſe circulum excludit. Idem vero dubium aliter adhuc conſiderari poteſt. Cum enim circuli irrectificabilitas (ut ita dicere liceat) vix unquam rigoroſe fuerit demonſtrata, e Problemate noſtro inferre quis poſſet, inſignem hanc quaeſtionem tandem affirmative eſſe decidendam, ſi nempe conſtaret, circulum ſub integrali generali vere contineri. Huic autem concluſioni iam ſupra occurrimus monendo, calculum ad circulum relatum abſurdi quid involvere, ideoque quaeſtionem negative potius decidere. Sed haec obiter: nunc methodum integrandi denuo conſideremus, quo pateat, quasnam conditiones integratio, ſiquidem ſuccedere debeat, ſupponat.

§. 6. A ſequentibus egreſſi ſumus aequationibus:

$$\partial s = \sqrt{(\partial y^2 + y^2 \partial x^2)},$$

quae in omnibus omnino curvis locum habet; altera vero $\partial s = y \partial \Phi$, iis curvis eſt propria, quae Problemati ſatisfaciunt. Iam vero ad generalem harum curvarum rectificabilitatem demonſtrandam, unde nec circulus excluderetur, opus eſſet, ut formulae $y \partial \Phi$ integrabilitas in quovis caſu oſtenderetur. Id vero fieri non potuit: ſed ope duplicis aequationis pro ∂s, h. e. binos ipſius ∂s valores

$$\sqrt{(\partial y^2 + y^2 \partial x^2)} \text{ et } y \partial \Phi$$

aequando, novam pro ∂s nacti ſumus aequationem homogeneam, in qua variabiles ſeparare licuit. Integrabilitas

itaque formulae ∂s comparatione duplicis iſtius aequationis nititur, unde procul dubio illae curvae excluduntur, in quibus eiusmodi comparatio locum habere nequit, veluti ſi duae iſtae aequationes non eſſent diverſae ſed identicae: id quod in circulo contingit. Altera enim aequatio e Triangulo M A m fuit petita, altera e Triangulo M R m, quae duo triangula in circulo coincidunt, cuius A et R eſt centrum; unde ſubſidium, quo ad integrandam formulam ∂s uſi ſumus, in circulo adhiberi nequit. Idem et ipſae formulae docent. Aequatio enim

$$(\partial y^2 + y^2 \partial x^2)^{\frac{3}{2}} = y \partial x (2 \partial y^2 + y^2 \partial x^2 - y \partial \partial y),$$

quae integrationis erat fundamentum, caſu $\partial y = 0$, ſeu y conſtante, fit identica, utraque ſcilicet expreſſio abit in hanc $y^3 \partial x^3$. Abſurditas itaque, quam in aequatione integrali ad circulum relata deprehendimus, inde eſt orta, quod integrale ſubſtitutione eſt inventum, quae circuli naturae contradicit. Quare ſi integrale ſine iſta ſubſtitutione quaeratur, abſurdum continere non poterit. Elementum arcus integravimus ope ſubſtitutionis $p = \frac{y\sqrt{2ay - aa}}{a - y}$, quae in circulo locum non habet, ubi $p = 0$. Quare ſi curva C M ſit circulus, in unica aequatione $\partial s = y \partial \Phi$, ſeu quae cum illa eſt identica,

$$\partial s = \sqrt{(\partial y^2 + y^2 \partial x^2)} = y \partial x,$$

acquieſcere oportet. Poſterior, ob y conſtantem, praebet $s = xy$, quae eſt aequatio circuli elementaris et quadraturam circuli ſupponit. Altera aequatio $\partial s = y \partial \Phi$, ob $\partial \Phi = \partial x - \partial \psi$, et y conſtantem, praebet $s = yx - y\psi$, ſeu quoniam in circulo ψ evaneſcit, $s = xy$, ut ante.

§. 7. Oſtendimus itaque, ex ipſo calculo ſequi, omnes curvas, quarum radius oſculi radio vectori ubique eſt

eſt aequalis, eſſe rectificabiles, eo tantum caſu excepto, quo radius oſculi et vector eſt conſtans, h. e. circulo excepto, ideoque omnium curvarum ſimpliſſima; quod paradoxon ſequenti exemplo optime illuſtrari videtur. Una ex calculi integralis elementis propoſitio haec eſt;

$$\int x^n \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

unde autem unicum caſum excipiendum eſſe conſtat, nempe $n = -1$, quoniam integrale formulae $\frac{\partial x}{x}$ ſeu lx eſt tranſcendens, quamvis formula generali enuncietur algebraicum. Quae autem ſi ad caſum iſtum ſpecialem applicaretur, foret $\int \frac{\partial x}{x} = \frac{x^0}{0} = \infty$, unde eadem reſultaret abſurditas ac in Problemate noſtro, valorem nempe $\int \frac{\partial x}{x}$ eſſe conſtantem $= \infty$, quicunque variabili x tribuatur valor. Nemo vero calculum hinc eſſe vituperandum cenſuit, cum tamen hic eadem fere ratio calculum ad hunc caſum applicare prohibeat, ac in Problemate noſtro. Propoſitio enim

$$\int x^n \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

inde demonſtratur, quod ſit $\partial . x^{n+1} = (n+1) x^n \partial x$, quae autem aequatio ſit identica, caſu $n = -1$. Tunc enim eſt $x^{n+1} = 1$, ideoque $\partial . x^{n+1} = 0$, et $n+1 = 0$, ergo aequatio haec: $0 = 0$, unde nil concludere licet.

§. 8. Quod hic oſtendimus locum habere, ſi curvae natura per radios e puncto fixo ductos exprimatur, idem et evenit, ſi coordinatae ſint orthogonales. Poſito nempe Fig. 2. $AP = x$, $PM = y$, habemus radium oſculi

$$MR = MA, \text{ h. e. } \frac{-\partial s^3}{\partial x \partial \partial y} = \sqrt{(x^2 + y^2)};$$

unde posito $\partial y = p\,\partial x$, $\partial p = q\,\partial x$, fit

$$(1 + p\,p)^{\frac{3}{2}} = -q\sqrt{(x^2 + y^2)},$$

quae substitutis $y = u\,x$, $q = \frac{v}{x}$, abit in hanc:

$$(1 + p\,p)^{\frac{3}{2}} = -v\sqrt{(1 + u\,u)},$$

unde oritur $v = -\sqrt{\frac{(1+p\,p)^3}{1+u\,u}}$. Est autem

$$\partial y = u\,\partial x + x\,\partial u = p\,\partial x, \text{ et } \partial p = q\,\partial x = \frac{v\,\partial x}{x}.$$

E priore reperitur $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$, ex altera $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial p}{v}$, quibus aequatis nanciscimur

$$v = \frac{(p-u)\,\partial p}{\partial u} = -\sqrt{\frac{(1+p\,p)^3}{1+u\,u}},$$

consequenter

$$(1 + p\,p)^{\frac{3}{2}}\,\partial u = (u - p)\,\partial p\sqrt{(1 + u\,u)}.$$

Haec est aequatio ista differentialis, cuius magnus *Eulerus* in *Calc. Integr. Vol. II. pag. 66. sqq.* solutionem docuit. Ibidem autem monet, solutionem eius non patere, nisi anguli introducantur, quod bene est notandum. Aliam eiusdem solutionem admodum ingeniosam dedit Cel. *Fuss (loc. cit. pag. 107. sqq.)*, quam tamen non minus ad istos angulos debuit revocare. Posito itaque

$p = \text{tang}\,\Phi$, $u = \text{tang}\,\omega$, erit

$\partial p = \frac{\partial \Phi}{cos^2 \Phi}$, $\partial u = \frac{\partial \omega}{cos^2 \omega}$,

$\sqrt{(1 + p^2)} = \frac{1}{cos\,\Phi}$, $\sqrt{(1 + u^2)} = \frac{1}{cos\,\omega}$,

$u - p = \frac{sin\,(\omega - \Phi)}{cos\,\omega\,cos\,\Phi}$,

et aequatio nostra:

$\frac{\partial \omega}{cos^2 \omega\,cos 3\,\Phi} = \frac{\partial \Phi\,sin\,(\omega - \Phi)}{cos^2 \omega\,cos 3\,\Phi}$, sive

$\partial \omega = \partial \Phi\,\text{sin}\,(\omega - \Phi)$,

quae

quae ita poterit repraeſentari:

$$\partial\Phi = \frac{-(\partial\omega - \partial\Phi)}{1 - \mathit{sin}\,(\omega - \Phi)},$$

cuius integrale eſt:

$$a - \Phi = \frac{1 + \mathit{sin}\,(\omega - \Phi)}{\mathit{cos}\,(\omega - \Phi)} = \sqrt{\frac{1 + \mathit{sin}\,(\omega - \Phi)}{1 - \mathit{sin}\,(\omega - \Phi)}},$$

unde reperitur

$$\mathit{sin}\,(\omega - \Phi) = \frac{(a-\Phi)^2 - 1}{(a-\Phi)^2 + 1}, \text{ et } \mathit{cos}\,(\omega - \Phi) = \frac{2(a-\Phi)}{(a-\Phi)^2 + 1}.$$

Habetur hinc

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u} = \frac{-\partial\omega\,\mathit{cos}\,\Phi}{\mathit{cos}\,\omega\,\mathit{sin}\,(\omega - \Phi)} = \frac{-\partial\Phi\,\mathit{cos}\,\Phi}{\mathit{cos}\,\omega},$$

vnde ob

$$\mathit{cos}\,\omega = \mathit{cos}\,\Phi\,\mathit{cos}\,(\omega - \Phi) - \mathit{sin}\,\Phi\,\mathit{sin}\,(\omega - \Phi)$$

nanciſcimur

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{-\partial\Phi\,\mathit{cos}\,\Phi\,[(a-\Phi)^2 + 1]}{2(a-\Phi)\,\mathit{cos}\,\Phi - \mathit{sin}\,\Phi\,[(a-\Phi)^2 - 1]},$$

cuius expreſſionis numerator cum ſit differentiale denominatoris, per logarithmos integrando deducitur

$$\frac{x}{b} = 2(a - \Phi)\,\mathit{cos}\,\Phi + \mathit{sin}\,\Phi - (a - \Phi)^2\,\mathit{sin}\,\Phi.$$

Eſt itaque

$$\partial x = -b\,\partial\Phi\,\mathit{cos}\,\Phi\,[(a-\Phi)^2 + 1], \text{ et}$$

$$\partial s = \partial x\sqrt{(1 + p^2)} = \frac{\partial x}{\mathit{cos}\,\Phi} = -b\,\partial\Phi\,[(a-\Phi)^2 + 1],$$

proinde

$$\text{arcus } s = c - b\Phi + \frac{b(a-\Phi)^3}{3}.$$

§. 9. Haec arcus expreſſio circuli quadraturam ſupponere videtur, quoniam angulum Φ continet, cuius tangens p datur; verum haec expreſſio circularis facile ad algebraicam reducitur. Erat nempe

$$\text{tang.}\,(\omega - \Phi) = \frac{(a-\Phi)^2 - 1}{2(a-\Phi)}, \text{ ſeu}$$

$$\omega =$$

$$\omega = \Phi + \text{Arc. tang.} \tfrac{(a-\Phi)^2-1}{2(a-\Phi)},$$

proinde

$$\text{tang}\,\omega = \frac{\text{tang}\,\Phi + \frac{(a-\Phi)^2-1}{2(a-\Phi)}}{1 - \frac{(a-\Phi)^2-1}{2(a-\Phi)}\text{tang}\,\Phi} = \frac{2(a-\Phi)\,\text{tang}\,\Phi + (a-\Phi)^2 - 1}{2(a-\Phi) - [(a-\Phi)^2-1]\,\text{tang}\,\Phi}$$
$$= \frac{2(a-\Phi)\,\text{fin}\,\Phi + [(a-\Phi)^2-1]\,\text{cof}\,\Phi}{2(a-\Phi)\,\text{cof}\,\Phi - [(a-\Phi)^2-1]\,\text{fin}\,\Phi},$$

unde ob $\text{tang}\,\omega = u = \frac{y}{x}$, et

$$x = b\,[2\,(a-\Phi)\,\text{cof}\,\Phi - [(a-\Phi)^2-1]\,\text{fin}\,\Phi],$$

nanciſcimur

$$\frac{y}{b} = 2\,(a-\Phi)\,\text{fin}\,\Phi + [(a-\Phi)^2-1]\,\text{cof}\,\Phi.$$

Sumtis utrinque quadratis, fit

$$\frac{x\,x+y\,y}{b\,b} = 4\,(a-\Phi)^2 + (a-\Phi)^4 - 2\,(a-\Phi)^2 + 1$$
$$= [(a-\Phi)^2+1]^2,$$

ſeu poſito

$$\sqrt{(x\,x+y\,y)} = z, \quad (a-\Phi)^2 = \tfrac{z-b}{b},$$

unde reperitur

$$a-\Phi = \sqrt{\tfrac{z-b}{b}}, \text{ et } b\,\Phi = a\,b - \sqrt{(b\,z - b\,b)},$$

ſicque aequatio ad arcum ſupra inventa

$$s = c - b\,\Phi + \tfrac{b\,(a-\Phi)^3}{3},$$

abit in ſequentem

$$s = c - a\,b + \sqrt{(b\,z - b\,b)} + \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{(z-b)^3}{b}}$$
$$= c - a\,b + \tfrac{3\,b+(z-b)}{3\sqrt{b}}\sqrt{(z-b)}, \text{ ſive}$$
$$s = c - a\,b + \tfrac{(2\,b+z)\sqrt{(z-b)}}{3\sqrt{b}};$$

quae expreſſio cum ea, quam ſupra (§. 3.) invenimus,

$$s = b' + \tfrac{(a'+z)\sqrt{(2\,z-a')}}{3\sqrt{a'}}$$

prorſus convenit, ſi ponamus

$$2b = a', \text{ et } c = b' + ab = b' + \tfrac{1}{2}a\,a'.$$

§. 10. Hic ſtatim abſurditas reſultat ſimilis ei, quam in priore methodo deprehendimus. Relatio enim propoſita in circulo locum habere nequit, niſi abſciſſae a centro in diametro capiantur, ut nempe ſit radius oſculi $MR = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Cum itaque ſit

$$\text{tang}\,\Phi = p = \frac{\partial y}{\partial x}, \text{ et } \text{tang}\,\omega = u = \frac{y}{x};$$

reperitur *(Fig. 3.)*

$$\Phi = M\,m\,\mu = R\,M\,P, \text{ et } \omega = M\,R\,P.$$

Conſtantem c, quae nonniſi initium arcus s arbitrio noſtro relictum definit, ſemper ponere licet $= 0$, unde ſit

$$\tfrac{s}{b} = -\Phi + \tfrac{1}{3}(a - \Phi)^3.$$

Iam vero poſito $x = 0$, quo caſu $y = PM$ cum radio RA coincidens in arcum AM eſt normalis, angulus Φ evaneſcit, dum ω fit angulo recto aequalis, unde aequatio integralis prior $a - \Phi = \frac{1 + \sin(\omega - \Phi)}{\cos(\omega - \Phi)}$ (§. 8.) abit in hanc: $a = \frac{2}{0} = \infty$, quo valore ſubſtituto fit arcus $s = \frac{1}{3}a^3 b$, h. e. arcus ubique valorem habet conſtantem et quidem infinitum, quae abſurditas cum ea prorſus convenit, quam methodo priore (§. 4.) ac in exemplo (§. 7.) allegato deprehendimus. Idem etiam ſequitur e formulis

$$\sin(\omega - \Phi) = \frac{(a - \Phi)^2 - 1}{(a - \Phi)^2 + 1}, \text{ et } \cos(\omega - \Phi) = \frac{2(a - \Phi)}{(a - \Phi)^2 + 1}, \text{ (§. 8.)}$$

quarum prior, caſu $\omega = 90^0$ et $\Phi = 0$, fieri debet $= 1$, altera autem evaneſcere, quod utrumque praebet $a = \infty$. Unde concludere licet, hanc integrandi methodum ope angulorum Φ et ω locum habere non poſſe, ubi fit $\omega - \Phi = 90^0$.

§. 11. Quo autem obiectioni occurramus, hoc nonnisi in singulis circuli punctis, puta iis, ubi angulus M R P recto fit aequalis, contingere, ideoque generalem circuli rectificationem nihilo minus calculo isto probari, rem sollertius examinemus. Unica elementum arcus ∂s integrandi methodus in eo consistebat, quod in aequatione differentiali substituebatur $p = \text{tang}\,\Phi$, et $u = \text{tang}\,\omega$, quare nonnisi earum curvarum rectificabilitas est demonstrata, in quibus haec substitutio fieri potest, minime autem eiusmodi curvarum, quae hanc substitutionem respuunt, h. e. ubi ternae istae aequationes

$$p = \text{tang}\,\Phi, \quad u = \text{tang}\,\omega, \text{ et}$$

$$(1 + p\,p)^{\frac{3}{2}}\,\partial u = (u - p)\,\partial p \sqrt{(1 + u\,u)},$$

simul locum habere nequeunt: id quod in circulo evenire facile patet. His enim valoribus loco p et u in postrema aequatione substitutis, ea abit in sequentem: $\partial\omega = \partial\Phi \sin(\omega - \Phi)$, uti iam supra invenimus. Verum in circulo est $\omega = \text{M R P}$, et $\Phi = \text{R M P}$, unde semper est $\omega + \Phi = 90^0$, sive $\partial\omega = -\partial\Phi$. Quare esse oportet $\partial\Phi = -\partial\Phi \sin(\omega - \Phi)$, h. e. $\sin(\omega - \Phi) = -1$, sive $\omega - \Phi = 270^0$; quae aequatio cum priore $\omega + \Phi = 90^0$ coniuncta praeberet $\omega = 180^0$, et $\Phi = -90^0$, quod est absurdum; et tota ista substitutio in circulo adhiberi nequit, siquidem ω et Φ supponuntur esse variabiles, non constantes, et hac variabilitate totum integrationis artificium nititur. Unde patet, neque sub curvis, quarum rectificabilitas hac altera methodo fuit demonstrata, circulum comprehendi.

§. 12. Breviter adhuc casum consideremus, ubi curvae natura per rectas e puncto fixo ductas atque normales ad curvae tangentem exprimitur. Sit itaque A M $= x$, A T $=$

Fig. 4.

$AT = y$, et relatio propoſita haec: $RM = AM$. Poſito angulo $AMR = \psi$, et $M\mu$ ad AM, Am, normali, erit

$$AmR = \psi + \partial\psi,\ M\mu = \sqrt{(\partial s^2 - \partial x^2)},$$

atque $\psi = MAT$, ideoque

$$\text{tang}\,\psi = \frac{\sqrt{(x^2 - y^2)}}{y},\ \text{cof}\,\psi = \frac{y}{x};\ \text{et}$$

$$\partial.\,\text{tang}\,\psi = \frac{x(y\partial x - x\partial y)}{yy\sqrt{(x^2 - y^2)}},$$

unde fit

$$\partial\psi = \text{cof}^2\psi\,\partial.\,\text{tang}\,\psi = \frac{y\partial x - x\partial y}{x\sqrt{(x^2 - y^2)}}.$$

Quare cum fit

$$AOR = \psi + MAm = \psi + \partial\psi + MRm,\ \text{et}$$

$$MAm = \frac{M\mu}{AM} = \frac{\sqrt{(\partial s^2 - \partial x^2)}}{x},$$

poſito $MRm = \partial\Phi$, habemus

$$\partial\Phi = MAm - \partial\psi = \frac{\sqrt{(\partial s^2 - \partial x^2)}}{x} - \frac{y\partial x - x\partial y}{x\sqrt{(x^2 - y^2)}};\ \text{et}$$

$$\partial s = x\partial\Phi = \sqrt{(\partial s^2 - \partial x^2)} - \frac{y\partial x - x\partial y}{\sqrt{(x^2 - y^2)}},$$

ae aequatio quomodo integrari poſſit, niſi $\sqrt{(\partial s^2 - \partial x^2)}$ eliminetur, non video. Cum autem ſit

$$\psi = 90^0 - RM\mu = mM\mu,\ \text{erit}$$

$$\text{tang}\,\psi = \frac{\partial x}{\sqrt{(\partial s^2 - \partial x^2)}},$$

quare cum ſupra invenimus

$$\text{tang}\,\psi = \frac{\sqrt{(x^2 - y^2)}}{y},$$

nanciſcimur

$$\sqrt{(\partial s^2 - \partial x^2)} = \frac{y\partial x}{\sqrt{(x^2 - y^2)}};$$

quo valore in aequatione priore ſubſtituto habemus

$$x\partial\Phi = \partial s = \frac{x\partial y}{\sqrt{(x^2 - y^2)}}.$$

Verum ex aequatione

$$\partial s^2 - \partial x^2 = \frac{y^2\partial x^2}{x^2 - y^2}\ \text{fit}\ \partial s = \frac{x\partial x}{\sqrt{(x^2 - y^2)}};$$

quo valore priori pro ∂s modo invento aequato, ſequitur $\partial x = \partial y$, et $x = a + y$; quae proprietas ſimpliciſſima omnibus curvis relatione propoſita affectis propria notatu maxime eſt digna. Praeterea inde habemus

$$\sqrt{(x^2 - y^2)} = \sqrt{(2ax - aa)},$$

proinde

$$\partial s = \frac{x\,\partial x}{\sqrt{(2ax - aa)}};$$

cuius integrale eſt

$$\text{arcus } s = b + \tfrac{1}{2}\sqrt{(2ax - aa)} + \frac{(2ax - aa)^{\frac{3}{2}}}{6aa}.$$

§. 13. Quoniam in circulo puncta A et R in centrum cadere debent, atque ipſe radius A M ſeu R M ubique tangenti normaliter inſiſtit, h. e. lineae A M et A T coincidunt: pro hocce caſu habemus $x = y$, ſeu $a = 0$, unde arcus indefinitus s valorem induit conſtantem, nempe

$$b + \frac{(2ax)^{\frac{3}{2}}}{6a^2} = b + \infty;$$

unde circulum iſta methodo rectificari non poſſe perſpicimus. Ipſo quoque calculo circulum iam excludi facile patet. Integratio ideo ſuccedebat, quod anguli M A T et m M μ reperiebantur aequales, unde ope trianguli M A T quantitatem irrationalem $\sqrt{(\partial s^2 - \partial x^2)}$ eliminare licebat. In circulo autem, quemadmodum iam vidimus, triangulum M A T prorſus evaneſcit, unde neque hanc eliminationem neque rectificationem in circulo locum habere, ipſe calculus abunde docet.

OB-

OBSERVATIONES CIRCA SERIES QVIBVS SINVS ET COSINVS ANGVLORVM MVLTIPLORVM EXPRIMI SOLENT.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Conuentui exhib. die 17 Nov. 1791.

§. 1.

EVLERVS, in Introductione ſua in Analyſin Infinitorum, primus, ni fallor, ſequentes dedit ſeries pro ſinu et coſinu anguli multipli cuiuscunque:

$$\text{ſin.}\, n\Phi = x\left[(2y)^{n-1} - \frac{n-2}{1}(2y)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2y)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}(2y)^{n-7} + \text{etc.}\right]$$

$$\text{coſ.}\, n\Phi = \tfrac{1}{2}\left[(2y)^{n} - \frac{n}{1}(2y)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}(2y)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2y)^{n-6} + \text{etc.}\right]$$

denotante x ſinum et y coſinum anguli ſimplicis Φ. Harum expreſſionum, ex natura ſerierum recurrentium, ope ſcalae relationis $2y, -1$, deriuatarum, ampliſſimus eſt vſus in angulorum multiplorum quantumuis magnorum ſinubus

et cosinubus expedite assignandis. Interim tamen nemo inficiabitur, his seriebus varia incommoda iure obiici posse. Primo enim eae merae inductioni innituntur, legitimae quidem, at ex casibus specialissimis, ope scalae relationis formatis, petitae. 2°.) Earum lex progressionis non ita est perspicua, vt forma serierum memoriae inhaereat et in promtu sit dum requiritur. 3°. Earum vsus restringitur ad numeros tantum integros et positivos litterae n tribuendos. 4°.) Eas vlterius continuare non licet, quam quoad exponens ipsius y fiat negatiuus, ita vt omnes termini litteram y in denominatore habentes reiiciendi sint, cuius tamen regulae ratio, cum series nunquam abrumpantur, minime perspicitur. 5°.) Igitur omnibus plane casibus, nisi illa regula stricte obseruetur, series illae a veritate maxime recedent, quemadmodum, leuissima facta applicatione, cuique patebit.

§. 2. Hae imperfectiones sagacitatem immortalis serierum illarum vt et vniuersi calculi sinuum auctoris minime effugere, vt qui non solum, vnde memorata incommoda originem ducant, insigni quo pollebat ingenii acumine detexit, sed etiam iis corrigendis multum operae dedit, in Dissertatione: *Dilucidationes super formulis quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exprimi solent, etc.* vbi ostendit series illas pro sinu atque cosinu anguli multipli datas, supra initio memoratas, non sufficere ad veros eorum valores exprimendos, sed cum vtraque insuper aliam coniungendam esse seriem, cuius termini y in denominatore habeant, quaeque omnibus casibus, quibus n est numerus integer positiuus, terminos illos, quos reiicere iubet regula, sponte destruat; pro casibus autem, quibus n est numerus fractus, siue etiam numerus integer negatiuus, cum seriebus illis

illis in infinitum excurrentibus coniunctim finum et cofinum anguli $n\Phi$ reuera exhibeant. Hae feries geminatae ita fe habent:

$$\text{fin. } n\Phi = x\left\{\begin{array}{l}(2y)^{n-1} - \frac{n-2}{1}\cdot(2y)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}\cdot(2y)^{n-5} - \text{etc.}\\ -\frac{1}{(2y)^{n+1}} - \frac{n+2}{1}\cdot\frac{1}{(2y)^{n+3}} - \frac{(n+3)(n+4)}{1.2}\cdot\frac{1}{(2y)^{n+5}} - \text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$\text{cof. } n\Phi = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}(2y)^{n} - \frac{n}{1}\cdot(2y)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}\cdot(2y)^{n-4} - \text{etc.}\\ +\frac{1}{(2y)^{n}} + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{(2y)^{n+2}} + \frac{n(n+3)}{1.2}\cdot\frac{1}{(2y)^{n+4}} + \text{etc.}\end{array}\right\}.$$

§. 3. Methodus, qua Eulerus vſus eſt in indagandis his ſeriebus pro ſinu et cofinu anguli $n\Phi$, ſequenti fundamento innititur. Poſito cof. $\Phi = y$ et cof. $n\Phi = s$, erit

$$\partial\Phi = -\frac{\partial y}{\sqrt{(1-yy)}} \text{ et } n\,\partial\Phi = -\frac{\partial s}{\sqrt{(1-ss)}},$$

conſequenter

$$\frac{\partial s^2}{1-ss} = \frac{nn\,\partial y^2}{1-yy}, \text{ ſiue } \partial s^2(1-yy) = nn\,\partial y^2(1-ss)$$

vnde denuo differentiando, ſumto ſcilicet ∂y conſtante, ſequens oritur aequatio differentialis ſecundi gradus:

$$\frac{\partial\partial s}{\partial y^2}(1-yy) - y\frac{\partial s}{\partial y} + nns = 0;$$

vnde ſi haec ſeries fingatur

$$s = Ay^{\lambda} + By^{\lambda-2} + Cy^{\lambda-4} + Dy^{\lambda-6} + \text{etc.}$$

et ſerierum inde pro $\frac{\partial\partial s}{\partial y^2}$, $yy\frac{\partial\partial s}{\partial y^2}$, $y\frac{\partial s}{\partial y}$, nns naſcentium termini ſeorſim nihilo aequentur, ſtatim ex primo termino y^{λ} reſultat haec conditio: $nn - \lambda(\lambda-1) - \lambda = 0$, quae duplicem praebet valorem pro exponente λ: fit enim tam $\lambda = +n$, quam $\lambda = -n$, ita vt pro s duplex emergat ſeries, ſcilicet:

$s =$

$$\bar{s} = \begin{Bmatrix} A z^n + B z^{n-2} + C z^{n-4} + D z^{n-6} + \text{etc.} \\ \frac{\mathfrak{A}}{z^n} + \frac{\mathfrak{B}}{z^{n+2}} + \frac{\mathfrak{C}}{z^{n+4}} + \frac{\mathfrak{D}}{z^{n+6}} + \text{etc.} \end{Bmatrix}$$

qui valor, coëfficientibus rite definitis, in ipſam illam ſeriem geminatam abit, quam ſupra pro cof. $n\Phi$ attulimus. Simili plane modo altera eruitur ſeries geminata pro ſin. $n\Phi$.

§. 4. Emendatis hoc modo binis illis ſeriebus ſimplicibus, quibus vulgo ſinus et coſinus anguli $n\Phi$ exprimi ſolent, omnia incommoda ſupra memorata (§. 1.) ſolo ſecundo excepto, penitus tolluntur, et circa veritatem harum expreſſionum nullum amplius dubium ſupereſſe poteſt. Interim tamen ipſa methodus, qua celeberrimus auctor vſus eſt, nimis longe repetita videtur, vt quae adeo duplicem integrationem aequationis differentio-differentialis requirat. Potiſſimum autem in hoc negotio determinatio binarum conſtantium per duplicem integrationem ingreſſarum haud parum ſagacitatis poſtulat, et, quoniam ex conſideratione valoris infiniti ipſius y (quod hic *coſinum* denotat) eſt deducta, primo intuitu, vt ipſe auctor monet, ſuſpecta videtur. Hanc ob rem aliam methodum magis directam, easdem ſeries inueſtigandi, tentare volui, quod quomodo ſucceſſerit, ex ſequentibus problematibus, Geometrarum iudicio permiſſis, patebit.

Problema 1.

§. 5. *Exiſtente* $p = y + \sqrt{(yy-1)}$, *poteſtatem* p^n *in ſeriem conuertere ſecundum poteſtates ipſius* y *progredientem.*

Solutio.

Ponatur breuitatis gratia $\sqrt{(yy-1)} = v$, ita vt ſit $p^n = (y+v)^n$, et ſi, vt iam aliquoties factum eſt, coëfficientes

tes poteſtatis n^{mae} binomii characteribus

$$[\tfrac{n}{1}],\ [\tfrac{n}{2}],\ [\tfrac{n}{3}],\ [\tfrac{n}{4}],\ \text{etc.}$$

deſignemus, facta euolutione erit

$$p^n = y^n + [\tfrac{n}{1}]\,y^{n-1}v + [\tfrac{n}{2}]\,y^{n-2}v^2 + [\tfrac{n}{3}]\,y^{n-3}v^3 + \text{etc.}$$

et ſi poteſtates impares ipſius v pariter euoluantur, habebimus

$$v = y - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{y} - \tfrac{1.1}{2.4}\cdot\tfrac{1}{y^3} - \tfrac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\tfrac{1}{y^5} - \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\tfrac{1}{y^7} - \text{etc.}$$
$$v^3 = y^3 - \tfrac{3}{2}\,y + \tfrac{3.1}{2.4}\cdot\tfrac{1}{y} + \tfrac{3.1.1}{2.4.6}\cdot\tfrac{1}{y^3} + \tfrac{3.1.1.3}{2.4.6.8}\cdot\tfrac{1}{y^5} + \text{etc.}$$
$$v^5 = y^5 - \tfrac{5}{2}y^3 + \tfrac{5.3}{2.4}\cdot y - \tfrac{5.3.1}{2.4.6}\cdot\tfrac{1}{y} - \tfrac{5.3.1.1}{2.4.6.8}\cdot\tfrac{1}{y^3} - \text{etc.}$$
$$v^7 = y^7 - \tfrac{7}{2}y^5 + \tfrac{7.5}{2.4}\cdot y^3 - \tfrac{7.5.3}{2.4.6}\cdot y + \tfrac{7.5.3.1}{2.4.6.8}\cdot\tfrac{1}{y} + \text{etc.}$$
etc. etc.

quibus ſubſtitutis poteſtas quaeſita p^n ſequenti ſerie exprimetur:

$$p^n = A\,y^n - B\,y^{n-2} + C\,y^{n-4} - D\,y^{n-6} + \text{etc.}$$

cuius coëfficientes A, B, C, D, etc. erunt

$$A = 1 + [\tfrac{n}{1}] + [\tfrac{n}{2}] + [\tfrac{n}{3}] + [\tfrac{n}{4}] + [\tfrac{n}{5}] + \text{etc.}$$
$$B = \tfrac{1}{2}[\tfrac{n}{1}] + \tfrac{2}{2}[\tfrac{n}{2}] + \tfrac{3}{2}[\tfrac{n}{3}] + \tfrac{4}{2}[\tfrac{n}{4}] + \tfrac{5}{2}[\tfrac{n}{5}] + \text{etc.}$$
$$C = \tfrac{1.1}{2.4}[\tfrac{n}{1}] + \tfrac{3.1}{2.4}[\tfrac{n}{3}] + \tfrac{4.2}{2.4}[\tfrac{n}{4}] + \tfrac{5.3}{2.4}[\tfrac{n}{5}] + \text{etc.}$$
$$D = \tfrac{1.1.3}{2.4.6}[\tfrac{n}{1}] - \tfrac{5.1.1}{2.4.6}[\tfrac{n}{3}] + \tfrac{5.3.1}{2.4.6}[\tfrac{n}{5}] + \tfrac{6.4.2}{2.4.6}[\tfrac{n}{6}] + \text{etc.}$$
$$E = -\tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}[\tfrac{n}{1}] + \tfrac{3.1.1.3}{2.4.6.8}[\tfrac{n}{3}] - \tfrac{5.3.1.1}{2.4.6.8}[\tfrac{n}{5}] + \tfrac{7.5.3.1}{2.4.6.8}[\tfrac{n}{7}] + \text{etc.}$$
etc. etc.

vbi igitur totum negotium eo redit, vt harum ſerierum ſummae inueſtigentur et coëfficientium A, B, C, D, etc. valores finite exprimantur. Hunc in finem pono

$$X = (1+x)^n,$$
$$X' = \tfrac{1}{2\partial x}\partial . X,$$
$$X'' = \tfrac{1}{4\partial x}\partial . \tfrac{X'^2}{x},$$
$$X''' = \tfrac{1}{6\partial x}\partial . \tfrac{X''}{x},$$
$$X^{IV} = \tfrac{1}{8\partial x}\partial . \tfrac{X'''}{x},$$
etc.

et facta euolutione erit

$$X = 1 + [\tfrac{n}{1}]x + [\tfrac{n}{2}]x^2 + [\tfrac{n}{3}]x^3 + [\tfrac{n}{4}]x^4 + \text{etc.}$$
$$X' = \tfrac{1}{2}[\tfrac{n}{1}] + \tfrac{2}{2}[\tfrac{n}{2}]x + \tfrac{3}{2}[\tfrac{n}{3}]x^2 + \tfrac{4}{2}[\tfrac{n}{4}]x^3 + \tfrac{5}{2}[\tfrac{n}{5}]x^4 + \text{etc.}$$
$$X'' = -\tfrac{1.1}{2.4}[\tfrac{n}{1}]\tfrac{1}{x^2} + \tfrac{3.1}{2.4}[\tfrac{n}{3}] + \tfrac{4.2}{2.4}[\tfrac{n}{4}]x + \tfrac{5.3}{2.4}[\tfrac{n}{5}]x^2 + \text{etc.}$$
$$X''' = \tfrac{1.1.3}{2.4.6}[\tfrac{n}{1}]\tfrac{1}{x^4} - \tfrac{3.1.1}{2.4.6}[\tfrac{n}{3}]\tfrac{1}{x^2} + \tfrac{5.3.1}{2.4.6}[\tfrac{n}{5}] + \tfrac{6.4.2}{2.4.6}[\tfrac{n}{6}]x + \text{etc.}$$
$$X^{IV} = -\tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}[\tfrac{n}{1}]\tfrac{1}{x^6} + \tfrac{3.1.1.3}{2.4.6.8}[\tfrac{n}{3}]\tfrac{1}{x^4} - \tfrac{5.3.1.1}{2.4.6.8}[\tfrac{n}{5}]\tfrac{1}{x^2} + \text{etc.}$$
etc. etc.

vbi ſtatim manifeſtum eſt, poſito $x = 1$ fore

$$X = A,\ X' = B,\ X'' = C,\ X''' = D,\ \text{etc.}$$

Porro erit per expreſſiones finitas

$$X = (1+x)^n,$$
$$X' = \tfrac{n}{2}(1+x)^{n-1},$$
$$X'' = \frac{n}{2.4}\frac{(1+x)^{n-2}}{x^2}(nx-2x-1),$$
$$X''' = \frac{n}{2.4.6}\frac{(1+x)^{n-3}}{x^3}[(nx-5x-3)(nx-2x-1)+(n-2)(1+x)],$$
etc. etc.

Sumto autem $x = 1$ fiet

X

$$X = A = 2^n,$$
$$X' = B = \tfrac{n}{1} \cdot 2^{n-2},$$
$$X'' = C = \tfrac{n(n-3)}{1.2} \cdot 2^{n-4},$$
$$X''' = D = \tfrac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} \cdot 2^{n-6},$$
$$X^{IV} = E = \tfrac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4} \cdot 2^{n-8},$$
etc. etc.

quibus ſubſtitutis ſeries quaeſita erit

$$p^n = (2y)^n - \tfrac{n}{1}(2y)^{n-2} + \tfrac{n(n-3)}{1.2}(2y)^{n-4} - \tfrac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2y)^{n-6} + \text{etc.}$$

Corollarium.

§. 6. Quod ſi binomium $q = y - \sqrt{(yy-1)}$, ad poteſtatem n eleuatum, in talem ſeriem, ſecundum poteſtates n, $n-2$, $n-4$, etc. ipſius y progredientem, conuertere velimus, id facillime praeſtabitur, ſi notetur eſſe

$$q = \frac{1}{y + \sqrt{(yy-1)}} = \frac{p}{1},$$

ideoque $q^n = p^{-n}$. Tantum igitur opus eſt in ſerie ſuperiore exponentem n negatiue capere, quo facto fiet

$$q^n = \frac{1}{(2y)^n} + \frac{n}{1}\frac{1}{(2y)^{n+2}} + \frac{n(n+3)}{1.2}\frac{1}{(2y)^{n+4}} + \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}\frac{1}{(2y)^{n+6}} + \text{etc.}$$

Problema 2.

§. 7. *Exiſtente* $p = y + \sqrt{(yy-1)}$ et $\sqrt{(yy-1)} = v$, *expreſſionem* $\frac{p^n}{2v}$ *in ſeriem conuertere ſecundum poteſtates* $n-1$, $n-3$, $n-5$, *etc. ipſius* y *progredientem.*

Solutio.

Cum fit

$$\frac{p^n}{v} = \frac{y^n}{v} + \left[\frac{n}{1}\right] y^{n-1} + \left[\frac{n}{2}\right] y^{n-2} v + \left[\frac{n}{3}\right] y^{n-3} v^2 + \text{etc.}$$

ſi loco $\frac{1}{v}$, v, v^2, v^3, etc. valores ſubſtituantur per y expreſſi, prodibit huiusmodi ſeries:

$$\frac{p^n}{v} = A\,y^{n-1} - B\,y^{n-3} + C\,y^{n-5} - D\,y^{n-7} + \text{etc.}$$

cuius coëfficientes A, B, C, D, etc. ſequentibus ſeriebus exprimuntur:

$$A = 1 + \left[\tfrac{n}{1}\right] + \left[\tfrac{n}{2}\right] + \left[\tfrac{n}{3}\right] + \left[\tfrac{n}{4}\right] + \left[\tfrac{n}{5}\right] + \left[\tfrac{n}{6}\right] + \text{etc.}$$

$$B = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{n}{2}\right] + \tfrac{2}{2}\left[\tfrac{n}{3}\right] + \tfrac{3}{2}\left[\tfrac{n}{4}\right] + \tfrac{4}{2}\left[\tfrac{n}{5}\right] + \tfrac{5}{2}\left[\tfrac{n}{6}\right] + \text{etc.}$$

$$C = \tfrac{1.3}{2.4} - \tfrac{1.1}{2.4}\left[\tfrac{n}{2}\right] + \tfrac{3.1}{2.4}\left[\tfrac{n}{4}\right] + \tfrac{4.2}{2.4}\left[\tfrac{n}{5}\right] + \tfrac{5.3}{2.4}\left[\tfrac{n}{6}\right] + \text{etc.}$$

$$D = -\tfrac{1.3.5}{2.4.6} + \tfrac{1.1.3}{2.4.6}\left[\tfrac{n}{2}\right] + \tfrac{3.1.1}{2.4.6}\left[\tfrac{n}{4}\right] + \tfrac{5.3.1}{2.4.6}\left[\tfrac{n}{6}\right] + \text{etc.}$$

$$E = \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\left[\tfrac{n}{2}\right] + \tfrac{3.1.1.3}{2.4.6.8}\left[\tfrac{n}{4}\right] + \tfrac{5.3.1.1}{2.4.6.8}\left[\tfrac{n}{6}\right] - \text{etc.}$$

etc. etc.

Quo nunc hos coëfficientes commodiſſime definire queamus, ſtatuamus

$$X = (1+x)^n,$$
$$X_{/} = \tfrac{1}{2\partial x}\partial.\tfrac{X}{x},$$
$$X_{//} = \tfrac{1}{4\partial x}\partial.\tfrac{X_{/}}{x},$$
$$X_{///} = \tfrac{1}{6\partial x}\partial.\tfrac{X_{//}}{x},$$
$$X_{IV} = \tfrac{1}{8\partial x}\partial.\tfrac{X_{///}}{x},$$
etc

hincque euoluendo erit per ſeries:

$$X = 1$$

$$X = 1 + \left[\tfrac{n}{1}\right] x + \left[\tfrac{n}{2}\right] x^2 + \left[\tfrac{n}{3}\right] x^3 + \left[\tfrac{n}{4}\right] x^4 + \left[\tfrac{n}{5}\right] x^5 + \text{etc.}$$

$$X_{/} = -\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{x^2} + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{n}{2}\right] + \tfrac{2}{2}\left[\tfrac{n}{3}\right] x + \tfrac{3}{2}\left[\tfrac{n}{4}\right] x^2 + \tfrac{4}{2}\left[\tfrac{n}{5}\right] x^3 + \text{etc.}$$

$$X_{//} = \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\tfrac{1}{x^4} - \tfrac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\left[\tfrac{n}{2}\right]\tfrac{1}{x^2} + \tfrac{3\cdot 1}{2\cdot 4}\left[\tfrac{n}{4}\right] + \tfrac{4\cdot 2}{2\cdot 4}\left[\tfrac{n}{5}\right] x + \tfrac{5\cdot 3}{2\cdot 4}\left[\tfrac{n}{6}\right] x^2 + \text{etc.}$$

$$X_{///} = -\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\tfrac{1}{x^6} + \tfrac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left[\tfrac{n}{2}\right]\tfrac{1}{x^4} - \tfrac{3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}\left[\tfrac{n}{4}\right]\tfrac{1}{x^2} + \tfrac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}\left[\tfrac{n}{6}\right] + \text{etc.}$$

$$X_{IV} = +\tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\tfrac{1}{x^7} - \tfrac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left[\tfrac{n}{2}\right]\tfrac{1}{x^5} + \tfrac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left[\tfrac{n}{4}\right]\tfrac{1}{x^3} - \text{etc.}$$

etc. etc.

ita vt posito $x = 1$ habeamus

$$X = A,\ X_{/} = B,\ X_{//} = C,\ X_{///} = D,\ \text{etc.}$$

Porro erit per expressiones finitas

$$X = (1+x)^n,$$

$$X_{/} = \frac{(1+x)^{n-1}}{2xx}(nx - x - 1),$$

$$X_{//} = \frac{(1+x)^{n-2}}{2.4x^4}[(nx-4x-2)(nx-x-1) + (n-1)x(1+x)],$$

etc. etc.

Posito autem $x = 1$, inuenitur

$$X = A = 2^n,$$

$$X_{/} = B = \tfrac{n-2}{1}\cdot 2^{n-2},$$

$$X_{//} = C = \tfrac{(n-3)(n-4)}{1.2}\cdot 2^{n-4},$$

$$X_{///} = D = \tfrac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}\cdot 2^{n-6},$$

etc. etc.

quibus substitutis series quaesita sequenti modo se habebit:

$$\frac{p^n}{2v} = (2y)^{n-1} - \frac{n-2}{1}(2y)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2y)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}(2y)^{n-7} + \text{etc.}$$

Corollarium.

§. 8. Sin autem, posito $q = y - \sqrt{(yy-1)}$ expressionem $\frac{q^n}{2v}$ etiam in huiusmodi seriem transformare velimus, quoniam, vt supra §. 6. vidimus, est $q^n = p^{-n}$, sumto exponente n negatiuo habebimus:

$$\frac{q^n}{2v} = \frac{1}{(2y)^{n+1}} + \frac{n+2}{1} \cdot \frac{1}{(2y)^{n+3}} + \frac{(n+3)(n+4)}{1.2} \cdot \frac{1}{(2y)^{n+5}} + \frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{1.2.3} \cdot \frac{1}{(2y)^{n+7}} + \text{etc.}$$

Problema 3.

§. 9. *Quicunque numerus pro* n *accipiatur, inuenire tam pro sinu quam pro cosinu anguli* nΦ *series secundum potestates cosinus anguli simplicis* Φ *descendentes.*

Solutio.

Ponatur $y = \text{cos.}\,\Phi$ et $x = \text{sin.}\,\Phi$, ita vt sit

$$v = \sqrt{(yy-1)} = x\sqrt{-1},$$

eritque

$$p = \text{cos.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\Phi,$$
$$q = \text{cos.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\Phi,$$

consequenter

$$p^n = \text{cos.}\,n\Phi + \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,n\Phi,$$
$$q^n = \text{cos.}\,n\Phi - \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,n\Phi,$$

vnde statim colligitur:

cos.

$$\text{cof. } n\Phi = \frac{p^n + q^n}{2},$$

$$\text{fin. } n\Phi = \frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}} = \frac{\int x\,(p^n - q^n)}{2v},$$

Hinc ſi loco p^n, q^n, $\frac{p^n}{2v}$, $\frac{q^n}{2v}$, ſeries illae §. §. 5, 6, 7, 8, inuentae ſubſtituantur, erit

$$\text{fin. } n\Phi = x\left\{\begin{array}{l} (2y)^{n-1} - \frac{n-2}{1}(2y)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2y)^{n-5} \\ \quad - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}(2y)^{n-7} + \text{etc.} \\ - \frac{1}{(2y)^{n+1}} - \frac{(n+2)}{1}\frac{1}{(2y)^{n+3}} - \frac{(n+3)(n+4)}{1.2}\frac{1}{(2y)^{n+5}} \\ \quad - \frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{1.2.3}\frac{1}{(2y)^{n+7}} - \text{etc.} \end{array}\right.$$

$$\text{cof. } n\Phi = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} (2y)^n - \frac{n}{1}(2y)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}(2y)^{n-4} \\ \quad - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2y)^{n-6} + \text{etc.} \\ + \frac{1}{(2y)^n} + \frac{n}{1}\frac{1}{(2y)^{n+2}} + \frac{n(n+3)}{1.2}\frac{1}{(2y)^{n+4}} \\ \quad + \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}\frac{1}{(2y)^{n+6}} + \text{etc.} \end{array}\right.$$

quae ſunt eae ipſae ſeries geminatae, quas Eulerus in laudata Diſſertatione per longe aliam methodum inuenit.

Corol-

Corollarium.

§. 10. Cum fit

$$\text{fin. } n\Phi = \frac{x(p^n - q^n)}{2v} \text{ et } \text{cof. } n\Phi = \frac{p^n + q^n}{2},$$

ſeries autem initio ex Introductione Euleri in Analyſin Infinitorum excerptae, tantum ſint: prima $= \frac{p^n x}{2v}$ (§. 7.); altera $= \frac{p^n}{2}$, manifeſtum eſt, a priore ſubtrahi debere $\frac{q^n x}{2v}$, ad alteram vero addi $\frac{q^n}{2}$, quo verus valor ipſius fin. $n\Phi$ et cof. $n\Phi$ obtineatur.

Scholion.

§. 11. Cum hae expreſſiones immediate ex euolutione binomii $[y + \sqrt{(yy - 1)}]^n$ ſint deriuatae, euidens eſt eas generaliter veras eſſe debere, quicunque valor exponenti n tribuatur; vnde etiam pro iis caſibus valere debent, quos excludebant ſeries in Introductione in Analyſin Infinitorum exhibitae et ſupra §. 1. relatae, quae tantum pro numeris integris poſitiuis ipſi n tributis adhiberi poterant, pro quibus caſibus ſi adhibeantur ſeries geminatae modo demonſtratae, altera ſeries, vt Eulerus oſtendit, terminos ſuperfluos alterius deſtruit. Nemo autem non videt, has novas expreſſiones valde eſſe incommodas, et ſi vſum ſpectare velimus, cum ſeriebus aſcendentibus minime comparari poſſe, quas Eulerus in Introductione, pag. 199 et 203. pro ſin $n\Phi$ dederat. Interim tamen et hae ſeries nulla demonſtratione ſtricte ſic dicta ſunt munitae. Maxime igitur mirandum eſt, hunc inſignem Geometram neque in Introductione

ne, neque alibi, quotiescunque de multiplicatione et diuiſione angulorum egerit, alias ſeries huic ſcopo magis accommodatas, legeque magis perſpicua procedentes, in medium protuliſſe, cuiusmodi varias excogitare licet facillimae indaginis, quibusque adeo demonſtrandis prima calculi angulorum principia ſufficiunt, quemadmodum, vt vnicum ſpecimen afferam, ex ſequente Theoremate patebit.

Theorema.

§. 12. *Denotante* Φ *angulum et* n *numerum quemcunque, ſemper erit*

$$\text{ſin.}\, n\Phi = \text{cof.}\,\Phi^n\,(+[\tfrac{n}{1}]\,\text{tg.}\,\Phi - [\tfrac{n}{3}]\,\text{tg.}\,\Phi^3 + [\tfrac{n}{5}]\,\text{tg.}\,\Phi^5 - \text{etc.}),$$
$$\text{cof.}\, n\Phi = \text{cof.}\,\Phi^n\,(1 - [\tfrac{n}{2}]\,\text{tg.}\,\Phi^2 + [\tfrac{n}{4}]\,\text{tg.}\,\Phi^4 - [\tfrac{n}{6}]\,\text{tg.}\,\Phi^6 + \text{etc.}),$$

vbi characteres $[\frac{n}{1}]$, $[\frac{n}{2}]$, $[\frac{n}{3}]$, *etc. denotant coëfficientes* n^{mae} *poteſtatis binomii.*

Demonſtratio.

Ponatur $\text{ſin.}\,\Phi^2 + \text{cof.}\,\Phi^2 = p\,q$, ita vt ſit

$$p = \text{cof.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi,$$
$$q = \text{cof.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

eritque, vti ex elementis Calculi ſinuum conſtat,

$$p^n = \text{cof.}\, n\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\, n\Phi,$$
$$q^n = \text{cof.}\, n\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\, n\Phi,$$

vnde ſequitur fore

$$\text{ſin.}\, n\Phi = \frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}},$$
$$\text{cof.}\, n\Phi = \frac{p^n + q^n}{2}.$$

Hinc ſi loco p et q quantitates angulares reſtituantur, ob

$$p^n = \text{cof. } \Phi^n (1 + \sqrt{-1} \text{ tang. } \Phi)^n,$$
$$q^n = \text{cof. } \Phi^n (1 - \sqrt{-1} \text{ tang. } \Phi)^n,$$

habebimus

$$\text{ſin. } n\Phi = \frac{\text{cof. } \Phi^n}{2\sqrt{-1}} [(1+\sqrt{-1} \text{ tang. } \Phi)^n - (1-\sqrt{-1} \text{ tang. } \Phi)^n],$$

$$\text{cof. } n\Phi = \frac{\text{cof. } \Phi^n}{2} [(1+\sqrt{-1} \text{ tang. } \Phi)^n + (1-\sqrt{-1} \text{ tang. } \Phi)^n].$$

Facta iam euolutione binomiorum reperietur:

$$(1+\sqrt{-1} \text{ tang. } \Phi)^n = 1 + [\tfrac{n}{1}]\sqrt{-1} \text{ tang. } \Phi - [\tfrac{n}{2}] \text{tang. } \Phi^2 - [\tfrac{n}{3}]\sqrt{-1} \text{ tang. } \Phi^3 + [\tfrac{n}{4}] \text{tang. } \Phi^4 + [\tfrac{n}{5}]\sqrt{-1} \text{ tang. } \Phi^5 - \text{etc.}$$

$$(1-\sqrt{-1} \text{ tang. } \Phi)^n = 1 - [\tfrac{n}{1}]\sqrt{-1} \text{ tang. } \Phi - [\tfrac{n}{2}] \text{tang. } \Phi^2 + [\tfrac{n}{3}]\sqrt{-1} \text{ tang. } \Phi^3 + [\tfrac{n}{4}] \text{tang. } \Phi^4 - [\tfrac{n}{5}]\sqrt{-1} \text{ tang. } \Phi^5 - \text{etc.}$$

quibus ſubſtitutis pro ſinu et coſinu anguli multipli $n\Phi$ ſequentes emergunt ſeries ſemper verae et ſecundum legem valde ſimplicem progredientes:

$$\text{ſin. } n\Phi = \text{cof. } \Phi^n [[\tfrac{n}{1}] \text{tang. } \Phi - [\tfrac{n}{3}] \text{tang. } \Phi^3 + [\tfrac{n}{5}] \text{ tang. } \Phi^5 - \text{etc.}]$$
$$\text{cof. } n\Phi = \text{cof. } \Phi^n [1 - [\tfrac{n}{2}] \text{tang. } \Phi^2 + [\tfrac{n}{4}] \text{tang. } \Phi^4 - [\tfrac{n}{6}] \text{tang. } \Phi^6 + \text{etc.}],$$

Corollarium 1.

§. 13. Quod ſi hic litterae n ſucceſſiue valores tribuantur 1, 2, 3, 4, etc. ſequentes inde reſultabunt relationes:

Pro ſinubus:

$$\text{ſin. } \Phi = \text{cof. } \Phi . \text{tang. } \Phi,$$
$$\text{ſin. } 2\Phi = \text{cof. } \Phi^2 . 2 \text{ tang. } \Phi,$$
$$\text{ſin. } 3\Phi = \text{cof. } \Phi^3 (3 \text{ tang. } \Phi - \text{tang. } \Phi^3),$$
$$\text{ſin. } 4\Phi = \text{cof. } \Phi^4 (4 \text{ tang. } \Phi - 4 \text{ tang. } \Phi^3),$$

ſin.

$$\text{fin. } 5\Phi = \text{cof. } \Phi^5(5\,\text{tang. } \Phi - 10\,\text{tang. } \Phi^3 + \text{tang. } \Phi^5),$$
$$\text{fin. } 6\Phi = \text{cof. } \Phi^6(6\,\text{tang. } \Phi - 20\,\text{tang. } \Phi^3 + 6\,\text{tang. } \Phi^5);$$
etc etc.

Pro cofinubus:

$$\text{cof. } \Phi = \text{cof. } \Phi,$$
$$\text{cof. } 2\Phi = \text{cof. } \Phi^2(1 - \text{tang. } \Phi^2),$$
$$\text{cof. } 3\Phi = \text{cof. } \Phi^3(1 - 3\,\text{tang. } \Phi^2),$$
$$\text{cof. } 4\Phi = \text{cof. } \Phi^4(1 - 6\,\text{tang. } \Phi^2 + \text{tang. } \Phi^4),$$
$$\text{cof. } 5\Phi = \text{cof. } \Phi^5(1 - 10\,\text{tang. } \Phi^2 + 5\,\text{tang. } \Phi^4),$$
$$\text{cof. } 6\Phi = \text{cof. } \Phi^6(1 - 15\,\text{tang. } \Phi^2 + 15\,\text{tang. } \Phi^4 - \text{tang. } \Phi^6),$$
etc. etc.

quarum veritatem per notiſſimas angulorum proprietates facile examinare et demonſtrare licet.

Corollarium 2.

§. 14. Cum autem, poſito $\text{fin. } \Phi = x$, $\text{cof. } \Phi = y$, fit $\text{tang. } \Phi = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{(1-yy)}}{y}$, expreſſiones modo datas in ſequentes transformare licet:

$\text{fin. } \Phi = x$	$\text{cof. } \Phi = y$
$\text{fin. } 2\Phi = x \cdot 2y$	$\text{cof. } 2\Phi = 2y^2 - 1$
$\text{fin. } 3\Phi = x(4y^2 - 1)$	$\text{cof. } 3\Phi = 4y^3 - 3y$
$\text{fin. } 4\Phi = x(8y^3 - 4y)$	$\text{cof. } 4\Phi = 8y^4 - 8y^2 + 1$
$\text{fin. } 5\Phi = x(16y^4 - 12y^2 + 1)$	$\text{cof. } 5\Phi = 16y^5 - 20y^3 + 5y$
$\text{fin. } 6\Phi = x(32y^5 - 26y^3 + 6y)$	$\text{cof. } 6\Phi = 32y^6 - 48y^4 + 18y^2 - 1$
etc.	etc.

quae cum notiſſimis ſinuum atque coſinuum angulorum 2Φ, 3Φ, 4Φ, etc. expreſſionibus perfecte congruunt. Ex quo intelligitur, ope harum ſerierum, aeque expedite ac per vſitatas, ſinum et coſinum anguli multipli quantumuis magni exprimi poſſe per ſinum et coſinum anguli ſimplicis Φ.

Corollarium 3.

§. 15. Cum ſeries in Theoremate exhibitae pro numeris integris poſitiuis ipſius n ſemper abrumpantur, ſecus ac euenit in ſeriebus initio allatis, eae exacte verae ſunt; pro numeris autem integris negatiuis, vt et pro fractis, eae in infinitum vsque extendentur; et ex natura poteſtatum binomii iam ſcimus, ſeries etiam his caſibus omnibus veras eſſe debere. Examinemus aliquot caſus, tribuendo primo multiplicatori n valorem negatiuum, puta -1, eritque

$$[\tfrac{n}{1}]=-1,\ [\tfrac{n}{2}]=+1,\ [\tfrac{n}{3}]=-1,\ [\tfrac{n}{4}]=+1,\ [\tfrac{n}{5}]=-1,\ \text{etc.}$$

vnde habebimus

$$\text{ſin.}\Phi=\frac{1}{\text{coſ.}\Phi}[\text{tang.}\Phi-\text{tang.}\Phi^3+\text{tang.}\Phi^5-\text{tang.}\Phi^7+\text{etc.}]$$

$$\text{coſ.}\Phi=\frac{1}{\text{coſ.}\Phi}[1-\text{tang.}\Phi^2+\text{tang.}\Phi^4-\text{tang.}\Phi^6+\text{etc.}],$$

hincque per coſ. Φ multiplicando prodit

$$\text{tang.}\Phi-\text{tang.}\Phi^3+\text{tang.}\Phi^5-\text{tang.}\Phi^7+\text{etc.}=\frac{\text{ſin.}2\Phi}{2},$$

$$1-\text{tang.}\Phi^2+\text{tang.}\Phi^4-\text{tang.}\Phi^6+\text{tang.}\Phi^8-\text{etc.}=\frac{1+\text{coſ.}2\Phi}{2},$$

quarum ſerierum geometricarum veritas per ſe eſt manifeſta. Poſito enim:

$$s=\text{tang.}\Phi-\text{tang.}\Phi^3+\text{tang.}\Phi^5-\text{tang.}\Phi^7+\text{etc. erit}$$

$$s\,\text{tang.}\Phi^2=\text{tang.}\Phi^3-\text{tang.}\Phi^5+\text{tang.}\Phi^7-\text{etc.},$$

vnde fit $s(1+\text{tang.}\Phi^2)=\text{tang.}\Phi$, ideoque $s=\frac{\text{ſin.}2\Phi}{2}$, hinc-

hincque porro deducitur

$$\frac{s}{tang.\Phi} = 1 - tang.\Phi^2 + tang.\Phi^4 - tang.\Phi^6 + etc. = \frac{1+cof.2\Phi}{2}.$$

Quod ſi nunc loco Φ ſucceſſiue ſcribatur $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, reſultabunt ſeries notiſſimae:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + etc. = \frac{1}{2},$$
$$1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + etc. = \frac{1}{4},$$
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + etc. = \frac{3}{4}.$$

Corollarium 4.

§. 16. Sumatur etiam $n = -2$, et cum ſit

$$[\tfrac{n}{1}] = -2,\ [\tfrac{n}{2}] = +3,\ [\tfrac{n}{3}] = -4,\ [\tfrac{n}{4}] = +5,$$

et ita porro, orientur ſequentes expreſſiones:

$$\text{ſin. } 2\Phi = \frac{1}{cof.\Phi^2}[2\,tang.\Phi - 4\,tang.\Phi^3 + 6\,tang.\Phi^5 - 8\,tang.\Phi^7 + etc.]$$
$$\text{cof. } 2\Phi = \frac{1}{cof.\Phi^2}[1 - 3\,tang.\Phi^2 + 5\,tang.\Phi^4 - 7\,tang.\Phi^6 - 9\,tang.\Phi^8 + etc.]$$

vnde ſequentes ſummationes deriuare licet:

$$1 - 2\,tang.\Phi^2 + 3\,tang.\Phi^4 - 4\,tang.\Phi^6 + etc. = cof.\Phi^4,$$
$$1 - 3\,tang.\Phi^2 + 5\,tang.\Phi^4 - 7\,tang.\Phi^6 + etc. = cof.\Phi^2\,cof.2\Phi,$$

quarum poſterior in priorem abit, ſi diuidatur per $1 - tang.\Phi^2 = \frac{cof.2\Phi}{cof.\Phi^2}$. Prioris autem veritas ita facillime demonſtratur: Sit eius ſumma

$$s = 1 - 2\,tang.\Phi^2 + 3\,tang.\Phi^4 - 4\,tang.\Phi^6 + etc.$$

erit multiplicando per $tang.\Phi^2$

$$s\,tang.\Phi^2 = tang.\Phi^2 - 2\,tang.\Phi^4 + 3\,tang.\Phi^6 - etc.$$

hinc addendo

$$s(1 + tang.\Phi^2) = 1 - tang.\Phi^2 + tang.\Phi^4 - tang.\Phi^6 + etc.$$

ideoque

$$s(1 + tang.\Phi^2) = \frac{1+cof.2\Phi}{2},$$

ſiue $\frac{s}{cof.\Phi^2} = cof.\Phi^2$, ergo $s = cof.\Phi^4$.

Quod ſi iam hic angulo Φ ſucceſſiue tribuantur valores $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, prodibunt hae ſeries:

$$1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{9} - \tfrac{4}{27} + \tfrac{5}{81} - \tfrac{6}{243} + \text{etc.} = \tfrac{9}{16},$$
$$1 - \tfrac{3}{3} + \tfrac{5}{9} - \tfrac{7}{27} + \tfrac{9}{81} - \tfrac{11}{243} + \text{etc.} = \tfrac{3}{8},$$
$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.} = \tfrac{1}{4},$$
$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \text{etc.} = 0,$$
$$1 - 2.3 + 3.3^2 - 4.3^3 + 5.3^4 - \text{etc.} = \tfrac{1}{16},$$
$$1 - 3.3 + 5.3^2 - 7.3^3 + 9.3^4 - \text{etc.} = -\tfrac{1}{8},$$

quarum veritatem facile variis modis demonſtrare licet. Verbi gratia pro binis poſtremis ponatur:

$$s = 1 - 2.3 + 3.3^2 - 4.3^3 + 5.3^4 - 6.3^5 + \text{etc.}$$

eritque

$$3s = 1.3 - 2.3^2 + 3.3^3 - 4.3^4 + 5.3^5 - \text{etc.}$$

hincque addendo

$$4s = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + 3^4 - 3^5 + \text{etc.}$$

cuius ſumma notiſſima eſt $4s = \frac{1}{4}$, ideoque $s = \frac{1}{16}$. Tum vero pro vltima ſtatuatur

$$t = 1 - 3.3 + 5.3^2 - 7.3^3 + 9.3^4 - \text{etc.},$$

eritque

$$1 + 3t = 1 + 1.3 - 3.3^2 + 5.3^3 - 7.3^4 + \text{etc.}$$

hincque addendo

$$1 + 4t = 2 - 2.3 + 2.3^2 - 2.3^3 + 2.3^4 - \text{etc.}$$

ſiue

$$\frac{1+4t}{2} = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + 3^4 - \text{etc.} = \frac{1}{4},$$

vnde fit $t = -\frac{1}{8}$.

Corol-

Corollarium 5.

§. 17. Ponamus nunc in ſeriebus generalibus pro ſinu et coſinu anguli $n\Phi$ inuentis angulum $\Phi = \frac{\pi}{4}$, eritque

$$\text{ſin.}\frac{n\pi}{4} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}}\left[\left[\tfrac{n}{1}\right] - \left[\tfrac{n}{3}\right] + \left[\tfrac{n}{5}\right] - \left[\tfrac{n}{7}\right] + \left[\tfrac{n}{9}\right] - \text{etc.}\right],$$

$$\text{coſ.}\frac{n\pi}{4} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}}\left[1 - \left[\tfrac{n}{2}\right] + \left[\tfrac{n}{4}\right] - \left[\tfrac{n}{6}\right] + \left[\tfrac{n}{8}\right] - \left[\tfrac{n}{10}\right] + \text{etc.}\right],$$

ita vt ſequentium ſerierum ex vnciis poteſtatum binomii formatarum ſummas aſſignare valeamus:

$$\left[\tfrac{n}{1}\right] - \left[\tfrac{n}{3}\right] + \left[\tfrac{n}{5}\right] - \left[\tfrac{n}{7}\right] + \left[\tfrac{n}{9}\right] - \text{etc.} = 2^{\frac{1}{2}n}\,\text{ſin.}\,\tfrac{n\pi}{4},$$

$$1 - \left[\tfrac{n}{2}\right] + \left[\tfrac{n}{4}\right] - \left[\tfrac{n}{6}\right] + \left[\tfrac{n}{8}\right] - \text{etc.} = 2^{\frac{1}{2}n}\,\text{coſ.}\,\tfrac{n\pi}{4},$$

quarum porro ſumma et differentia ad ſequentes perducit ſeries omnes plane vncias continentes:

$$1 + \left[\tfrac{n}{1}\right] - \left[\tfrac{n}{2}\right] - \left[\tfrac{n}{3}\right] + \left[\tfrac{n}{4}\right] + \left[\tfrac{n}{5}\right] - \left[\tfrac{n}{6}\right] - \text{etc.} = 2^{\frac{1}{2}n}\left(\text{coſ.}\tfrac{n\pi}{4} + \text{ſin.}\tfrac{n\pi}{4}\right)$$

$$1 - \left[\tfrac{n}{1}\right] - \left[\tfrac{n}{2}\right] + \left[\tfrac{n}{3}\right] + \left[\tfrac{n}{4}\right] - \left[\tfrac{n}{5}\right] - \left[\tfrac{n}{6}\right] + \text{etc.} = 2^{\frac{1}{2}n}\left(\text{coſ.}\tfrac{n\pi}{4} - \text{ſin.}\tfrac{n\pi}{4}\right).$$

Corollarium 6.

§. 18. Statuatur angulus $\Phi = \frac{\pi}{3}$, erit

$$\text{ſin.}\frac{n\pi}{3} = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2^n}\left[\left[^n\right] - 3\left[\tfrac{n}{3}\right] + 3^2\left[\tfrac{n}{5}\right] - 3^3\left[\tfrac{n}{7}\right] + \text{etc.}\right]$$

$$\text{coſ.}\frac{n\pi}{3} = \frac{3^{\frac{1}{2}n}}{2^n}\left[1 - 3\left[\tfrac{n}{2}\right] + 3^2\left[\tfrac{n}{4}\right] - 3^3\left[\tfrac{n}{6}\right] + \text{etc.}\right]$$

et

et posito $\Phi = \frac{\pi}{6}$ prodibit

$$\text{fin.}\frac{n\pi}{6} = \frac{1}{2^n \cdot \sqrt{3}}\left[\left[\tfrac{n}{1}\right] - \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{n}{3}\right] + \tfrac{1}{9}\left[\tfrac{n}{5}\right] - \tfrac{1}{27}\left[\tfrac{n}{7}\right] + \text{etc.}\right]$$

$$\text{cos.}\frac{n\pi}{6} = \frac{1}{2^n}\left[1 - \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{n}{2}\right] + \tfrac{1}{9}\left[\tfrac{n}{4}\right] - \tfrac{1}{27}\left[\tfrac{n}{6}\right] + \tfrac{1}{81}\left[\tfrac{n}{8}\right] - \text{etc.}\right]$$

vnde iterum haud inelegantes proprietates vnciarum deducere licet.

DE

DE TEMPORE OSCILLATIONIS PENDVLORVM, DVM ARCVS DATAE AMPLITVDINIS CVIVSCVNQVE DESCRIBVNT.

Auctore

W. L. KRAFFT.

Conuentui exhib. die 31 Octobr. 1793.

§. 1.

Argumentum de quo hic agere conſtitui, Ill. Eulerus ſuo more, id eſt, ſummo Analyſeos acumine iam perſcrutatus eſt (*). Poſt Euleri autem meſſem ſpicilegia vt tentarem, disquiſitiones meae *de Penduli ſimplicis ſingula minuta ſecunda oſcillantis longitudine in diuerſis Imperii Ruſſici locis obſeruata* (**) occaſionem mihi praebuerunt; et laboris non plane fruſtranei ſpem ea inprimis attulere, quae Ill. Vir indicauit in ſua ipſius methodo etiamnum deſiderari poſſe; pro ampliſſimis enim oſcillationibus non niſi per ſerierum ſummationes admodum intricatas et ſingularia calculi et integrandi artificia poſtulantes temporis determinatione potitus eſt,

(*] Vid. Acta Acad. Petrop. pro anno 1777. Pars poſter. p. 159.

(**) Vid. Nov. Acta Acad. Petrop. Tom VII. p. 215.

eſt, neque ipſa iſta ſolutio ad oſcillationes mediocriter amplas applicari poteſt, cum ſerie contineatur conuergente quidem illa, ſed quae tam abſtruſa lege progreditur, vt quarti iam termini determinatio, ipſo illuſtri Viro iudice, calculos nimis intricatos poſtulet, nec vllum pateat artificium analyticum, quo iſte labor ſubleuari poſſet. Quae igitur cum ſequerer veſtigia; contigit, vt totius Problematis ſolutionem haud parum planiorem inuenire mihi liceret; 1°.) enim ſerierum ſummatione quidem, ſed ſatis facili illa et conſuetis integrandi methodis perficienda opus eſſe deprehendi; 2°.) ſolutionum quas reperi, illa quoque, quae amplioribus oſcillationibus accommodata eſt, ſerie exprimitur conuergente, cuius adeo manifeſta lex eſt, vt eam absque omni opera, quovsque libuerit, continuare liceat. Cum qualescunque iſtae meditationes meae ad pleniorem enodationem egregii huius et difficillimi argumenti mechanici aliquid conferre poſſe videantur: eas hic ſuccincte et ad diſſertationem Eulerianam ſpicilegii ad inſtar exponere mihi propoſitum eſt.

Lemmata ex doctrina ſerierum petita.

§. 2. Denotent α, β, γ, etc. vncias Binomii $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ in ſeriem euoluti, vt ſit

$$\alpha = \tfrac{1}{2};\ \beta = \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4};\ \gamma = \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6};\ \text{etc.}$$

ſintque ex iis compoſitae ſeries infinitae:

$$\alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma + \tfrac{1}{4}\delta + \ldots\ldots = s$$
$$\beta + \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{3}\delta + \tfrac{1}{4}\varepsilon + \ldots\ldots = s'$$
$$\gamma + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{4}\zeta + \ldots\ldots = s''$$
$$\delta + \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\zeta + \tfrac{1}{4}\eta + \ldots\ldots = s'''$$
$$\varepsilon + \tfrac{1}{2}\zeta + \tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{1}{4}\theta + \ldots\ldots = s''''$$
etc. etc.

erit

erit	erit quoque
$2.s' - 1.s = 1 = 2.\alpha$	$s = 2.\log.2 = \log.4$; hinc
$4.s'' - 3.s' = \frac{3}{4} = 2.\beta$	$s' = \alpha[\log.4 + 1]$
$6.s''' - 5.s'' = \frac{3.5}{4.6} = 2.\gamma$	$s'' = \beta[\log.4 + 1 + \frac{1}{2}]$
$8.s'''' - 7.s''' = \frac{3.5.7}{4.6.8} = 2\delta$	$s''' = \gamma[\log.4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}]$
etc.	etc.

Etſi fortaſſe ſummationes iſtae propoſitarum ſerierum iam aliunde conſtant, neque etiam methodus, qua in iis inueniendis vſus ſum, difficulter ex principiis calculi integralis repetitur; eam tamen vt breuiter ſubiungerem, ordo tractationis poſtulare videbatur.

Demonſtratio.

§. 3. Seriebus propoſitis ſequentes tribuantur formae generales characteribus Σ, Σ', Σ'', etc. deſignatae:

$$\alpha x + \tfrac{1}{2}\beta x^2 + \tfrac{1}{3}\gamma x^3 + \tfrac{1}{4}\delta x^4 + \ldots\ldots = \Sigma,$$
$$\beta x + \tfrac{1}{2}\gamma x^2 + \tfrac{1}{3}\delta x^3 + \tfrac{1}{4}\varepsilon x^4 + \ldots\ldots = \Sigma',$$
$$\gamma x + \tfrac{1}{2}\delta x^2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon x^3 + \tfrac{1}{4}\zeta x^4 + \ldots\ldots = \Sigma'',$$
$$\delta x + \tfrac{1}{2}\varepsilon x^2 + \tfrac{1}{3}\zeta x^3 + \tfrac{1}{4}\eta x^4 + \ldots\ldots = \Sigma''',$$
etc.

ita, vt poſito $x = 1$ fiat $\Sigma = s$; $\Sigma' = s'$; $\Sigma'' = s''$; etc. Cum igitur ſit

$$1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{etc.} = (1 - x)^{-\frac{1}{2}};$$

differentiando et pro α, β, γ, etc. ſubſtituendo valores numericos, colligitur:

$$2.\partial\Sigma' - 1.\partial\Sigma = 2.\frac{\partial x}{x^2\sqrt{(1-x)}} - \frac{\partial x}{x\sqrt{(1-x)}} - 2.\frac{\partial x}{x^2}.$$
$$4.\partial\Sigma'' - 3.\partial\Sigma' = 4.\frac{\partial x}{x^3\sqrt{(1-x)}} - 3.\frac{\partial x}{x^2\sqrt{(1-x)}} - 4.\frac{\partial x}{x^3} + \frac{\partial x}{x^2}.$$

$$6.\partial\Sigma''' - 5.\partial\Sigma'' = 6.\frac{\partial x}{x^4\sqrt{(1-x)}} - 5.\frac{\partial x}{x^3\sqrt{(1-x)}} - 6.\frac{\partial x}{x^4} + 2.\frac{\partial x}{x^3} + \frac{1}{4}.\frac{\partial x}{x^2}.$$

etc.

Ex principiis autem calculi integralis conſtat eſſe in genere:

$$2(\lambda-1)\int\frac{\partial x}{x^\lambda\sqrt{(1-x)}} - (2\lambda-3)\int\frac{\partial x}{x^{\lambda-1}\sqrt{(1-x)}} - 2(\lambda-1)\int\frac{\partial x}{x^\lambda} = \frac{2}{x^{\lambda-2}[1+\sqrt{(1-x)}]}.$$

Lemmate hoc in vſum vocato, et poſito breuitatis cauſſa $1+\sqrt{(1-x)} = 2X$, habebitur integrando:

$$2.\Sigma' - 1.\Sigma = \frac{2}{1+\sqrt{(1-x)}} = \frac{1}{X},$$

$$4.\Sigma'' - 3.\Sigma' = \frac{2}{x[1+\sqrt{(1-x)}]} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2^2.X^2},$$

$$6.\Sigma''' - 5.\Sigma'' = \frac{2}{x^2[1+\sqrt{(1-x)}]} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4x} = \frac{1+X}{2^4.X^3},$$

etc.

qui valores cum poſito $x = 0$ adeoque $X = 1$ euaneſcere debeant; ſequentia habentur integralia completa:

$$2.\Sigma' - 1.\Sigma = \frac{1-X}{X},$$

$$4.\Sigma'' - 3.\Sigma' = \frac{1-X}{2^2.X^2}(1+X),$$

$$6.\Sigma''' - 5.\Sigma'' = \frac{1-X}{2^4.X^3}(1+2X+2X^2)$$

et eadem methodo ad differentialia $\partial\Sigma^{IV}$, $\partial\Sigma^{V}$, etc. progrediendo, quae breuitatis gratia hic praetermiſi, reperi:

$$8.\Sigma^{IV} - 7.\Sigma''' = \frac{1-X}{2^6.X^4}(1+3X+5X^2+5X^3),$$

$$10.\Sigma^{V} - 9.\Sigma^{IV} = \frac{1-X}{2^8.X^5}(1+4X+9X^2+14X^3+14X^4),$$

etc.

vbi

vbi coëfficientes numerici manifesto ad genus serierum pertinent, quas commode *collectiuas* vocant, cum singuli ex summis coëfficientium seriei proxime praecedentis formentur, vltimo bis repetito; ita, vt istae aequationes, quovsque libuerit, continuari queant.

$1 + 1$
$1 + 2 + 2$
$1 + 3 + 5 + 5$
$1 + 4 + 9 + 14 + 14$

Cum iam sit

$$\partial \Sigma = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots\ldots)\partial x = \frac{\partial x}{x\sqrt{(1-x)}} - \frac{\partial x}{x}$$
$$= \frac{\partial x}{[1+\sqrt{(1-x)}]\sqrt{(1-x)}} = -\frac{2\partial X}{X};$$

integrale ita sumtum, vt casu $x = 0$ adeoque $X = 1$ euanescat, dat $\Sigma = -2 \operatorname{Log.} X$; qua summa inuenta, etiam reliquae Σ', Σ'', etc. innotescunt, hincque pro diuersis valoribus quantitatis variabilis x variae series notatu dignae summari possunt. His autem summationibus hic immorari a proposito nostro alienum foret, cum hic tantum de seriebus s, s', s'', etc., in quas istae posito $x = 1$ abeunt, quaestio sit. Posito itaque $x = 1$ hincque $X = \frac{1}{2}$, reperimus

$2s' - 1.s = 1 = 2.\alpha$ hincque ob $s = \operatorname{Log.} 4$, erit quoque

$4s'' - 3.s' = \frac{3}{4} = 2.\beta$ $\qquad s' = \alpha(\operatorname{Log.} 4 + 1)$

$6s''' - 5.s'' = \frac{3.5}{4.6} = 2.\gamma$ $\qquad s'' = \beta(\operatorname{Log.} 4 + 1 + \frac{1}{2})$

etc. $\qquad$ etc.

vnde superiorum Lemmatum veritas demonstratur.

Expressio differentialis pro tempore descensus Penduli per arcum circularem amplitudinis cuiuscunque.

§. 4. Dato Pendulo vtcunque composito, circa axem A oscillationes suas peragente, sit centrum oscillationis eius in B huiusque centri ab axe suspensionis A distantia, siue Penduli simplicis isochroni longitudo $AB = b$. Penduli huius

Tab. VI. Fig. 5.

ius fit maxima a ſitu verticali A B excurſio B A G $= \zeta$, et elapſo tempore $= t$ peruenerit id ex G in Z, deſcripto arcu circulari G Z $= s$. Circulo ex centro A et radio A B $= b$ deſcripto, in eius diametro verticali b B capiantur ex vertice coordinatae orthogonales punctо Z reſpondentes b P $= x$ et P Z $= y$; eritque $y^2 = (2b - x).x$ et $\partial s = \frac{b.\partial x}{\sqrt{(2b-x)x}}$. Ducta ex G linea horizontali G D F poſitaque altitudine D B $= h$, vt ſit b D $= 2b - h$ et $h = b(1 - \text{cof.}\,\zeta) = 2b.\,\text{fin.}\frac{1}{2}\zeta^2$; erit celeritati quam acquiſiuit Pendulum in punctо Z, debita altitudo D P $= x - 2b + h$; quare ſi haec celeritas ponatur $= c$, erit $c = 2\sqrt{[g(x - 2b + h)]}$, denotante g altitudinem, per quam grauia primo minuto ſecundo ex quiete libere delabuntur. Hisce poſitis conſtat ex principiis mechanicis, eſſe tempus deſcenſus Penduli per arcum G Z, idque in minutis ſecundis expreſſum

$$t = \int \frac{\partial s}{c} = \frac{b}{2\sqrt{g}} \cdot \int \frac{\partial x}{\sqrt{(2b-x).x.(x-2b+h)}},$$

integrali ita ſumto, vt pro $x = b$ D $= 2b - h$ euaneſcat; quod igitur integrale, ſi ad $x = 2b$ extendatur, dabit tempus deſcenſus Penduli per arcum G B $= \zeta$, ſiue tempus dimidiae oſcillationis; quare poſito integrae oſcillationis per arcum G B F $= 2\zeta$, tempore $= T$; erit

$$T = \frac{b}{\sqrt{g}} \cdot \int \frac{\partial x}{\sqrt{(2b-x).x.(x-2b+h)}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 2b-h \\ \text{ad } x = 2b \end{bmatrix},$$

ex cuius formulae differentialis integratione, duplici modo inſtituta, bina ſequentia obtinui theoremata:

Theorema 1.

Pro mediocri amplitudine oſcillationis vsque ad 180^0.

§. 5. Si Penduli ſimplicis, cuius longitudo $= b$, ſit maxima a ſitu verticali excurſio ſiue dimidia amplitudo oſcil-

oſcillationis $= \zeta$, et ponatur $m = \frac{1 - \text{cof. } \zeta}{3 + \text{cof. } \zeta}$; erit tempus vnius integrae oſcillationis in minutis ſecundis expreſſum

$$T = \pi \left[1 + \frac{1.3}{4.4} m^2 + \frac{1.3\ 5.7}{4.4\ 8.8} m^4 + \frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12} m^6 + \ldots \right] \sqrt{\frac{(1+m)\,b}{2g}},$$

denotante π ſemiperipheriam circuli cuius radius $= 1$.

Demonſtratio.

Conſtat ex elementis calculi integralis, eſſe

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(2b - x)(x - 2b + b)}} = 2 . \text{Arc. fin. } \sqrt{\frac{x - 2b + b}{b}},$$

Poſito duplo hoc arcu $= \Phi$, vt ſit

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(2b - x)(x - 2b + b)}} = \partial\Phi, \text{ erit } x = 2b - h . \text{cof.}^2 \tfrac{1}{2}\Phi.$$

Sit breuitatis gratia $m = \frac{b}{4b - b}$, et per notas reductiones habebitur

$$x = \frac{2b}{1 + m} (1 - m \text{ cof. } \Phi),$$

vbi ob $h = 2b . \text{fin.}^2 \frac{1}{2}\zeta$, erit

$$m = \frac{\text{fin.}^2 \frac{1}{2}\zeta}{1 + \text{cof. } \frac{1}{2}\zeta^2} = \frac{1 - \text{cof. } \zeta}{3 + \text{cof. } \zeta}.$$

Subſtitutis his valoribus erit

$$T = \sqrt{\frac{(1+m) . b}{2g}} . \int \frac{\partial \Phi}{\sqrt{(1 - m \text{ cof. } \Phi)}},$$

integrali ita ſumto, vt pro $\Phi = 0$ euaneſcat et ad $\Phi = 180^0$ extendatur. Quodſi iam quantitas radicalis $(1 - m \text{ cof. } \Phi)^{-\frac{1}{2}}$ in ſeriem $A + B . \text{cof. } \Phi + C . \text{cof. } 2\Phi + \text{etc.}$, ſecundum coſinus multiplorum anguli Φ progredientem euoluatur; erit integrando $T = \pi . A . \sqrt{\frac{(1+m)\,b}{2g}}$, propterea quod, praeter primum integralis terminum, reliqui omnes vtpote finibus iſtorum angulorum affecti, pro vtroque caſu $\Phi = 0$ et $\Phi = 180^0$ euaneſcunt. Cognitum vero eſt ex principiis analyti-

lyticis, esse

$$A = 1 + \frac{1.3}{4.4} m^2 + \frac{1.3.5.7}{4.4.8.8} m^4 + \frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12} m^6 + \text{etc.}$$

erit ergo

$$T = \pi \left(1 + \frac{1.3}{4.4} m^2 + \ldots\ldots\right) \sqrt{\frac{(1+m)b}{2g}} \text{ . q. e. d.}$$

Corollaria.

§. 6. Theoremati huic sequentia addimus Corollaria:

I.) Si Penduli a situ verticali excursio fuerit infinite parua et integrae oscillationis infinite paruae ponatur tempus $= \Theta$; ob angulum ζ infinite paruum hincque quantitatem m prae vnitate euanescentem erit $A = 1$, hincque vti constat, $\Theta = \pi . \sqrt{\frac{b}{2g}}$. Substituto hoc valore erit in genere

$$T = \Theta \left(1 + \frac{1.3}{4.4} m^2 + \frac{1.3.5.7}{4.4.8.8} m^4 + \ldots\ldots\right) \sqrt{(1+m)};$$

quae series adeo conuergit, vt, si amplitudo integrae oscillationis ad semicirculum vsque excrescat, quo casu fit $\zeta = 90^0$ et $m = \frac{1}{3}$, non tamen nisi tribus eius terminis opus sit ad tempus oscillationis cum praecisione vnius partis millesimae minuti secundi inueniendum; erit scilicet

$$T = \frac{2\Theta}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1.3}{4.4} . \frac{1}{9} + \frac{1.3.5.7}{4.4.8.8} . \frac{1}{81}\right) = \frac{2\Theta}{\sqrt{3}} . 1,02210 = 1,180\,\Theta;$$

vnde si hoc Pendulum oscillationes infinite paruas singulis minutis secundis absoluat, vt sit $\Theta = 1$ secund; pro eodem Pendulo, dum integra oscillatione 180 gradus percurrit, erit tempus cuiusque oscillationis $= 1,180$. Sec.

II.) Facile hinc concludere licet, seriem nostram ita conuergere, vt pro oscillationibns valde paruis absque vllo errore sensibili fit

$$T = \Theta \sqrt{(1+m)} = \frac{2\Theta}{\sqrt{(3 + \cos.\zeta)}}.$$

Ita,

Ita, exempli cauſſa, D. de Maupertuis, in opusculo de Figura Terrae obſeruationem recenſet, qua reperit, Pendulum quod integra oſcillatione arcum $3^0.\,0'$ percurrit, iſta oſcillationis amplitudine $1^0.\,20'$ aucta, tempore vnius diei medii, $3\frac{1}{2}''$ vel $4''$ plus quam priori caſu, retardaſſe (*). Formula noſtra dat priori caſu $T = 1,0000428.\,\Theta$; poſteriori $T = 1,0000894.\,\Theta$; differentia $= 0,0000466.\,\Theta$ per 86400 multiplicata dat $4,02.\,\Theta$; vnde Pendulum ſi oſcillationes infinite paruas ſingulis minutis ſecundis abſoluit, poſteriori caſu vtique 4 Sec. plus, quam priori, retardare debuit.

III.) In vſu practico oſcillationis amplitudo commodius cordae eam ſubtendentis longitudine quam arcus graduatione menſuratur, cui vt accomodemus formulam noſtram, ponamus in data a puncto ſuſpenſionis A diſtantia verticali quacunque $A\,o = d$, fixam eſſe regulam horizontalem $M\,o\,N$ et ſuper ea integrae oſcillationis $F\,A\,G = 2\zeta$ reperiri cordam $m\,n = c$, vt ſit $c = 2\,d.\,\text{tang.}\,\zeta$; vnde ſi c fuerit quantitas valde parua, erit $\text{cof.}\,\zeta = 1 - \frac{c^2}{8\,d^2}$; hincque Tab. VI. Fig. 6.

$$T = \frac{\Theta}{\sqrt{(1 - \frac{c^2}{32.\,d^2})}} = \Theta\,(1 + \frac{c^2}{64.\,d^2}).$$

Si ergo habeatur Pendulum oſcillationes *reapſe* infinite parvas ſingulis minutis ſecundis peragens, vt ſit $\Theta = 1$; facile hinc computabitur huius Penduli retardatio diurna inde oriunda, quod oſcillationes non ſint niſi minimae et tantum *quaſi* infinite paruae; erit enim haec retardatio diurna $= 86400 \cdot \frac{c^2}{64\,d^2}$ ſecundorum; quae expreſſio vt ad praxin maxime accommodetur, cum diſtantia regulae horizontalis a

(*) Vid. Acta Acad. Petr. pro anno 1777. Pars poſter. pag. 111.

a puncto ſuſpenſionis ſit arbitraria, capiatur ea ita, vt ſit $64.d^2 = 86400$, adeoque $d = 36,74$; vnde ſi fuerit $d =$ 36, 74 poll. $=$ 3 ped. 0 poll. 9 lin. et amplitudinis corda $mn = c$. poll. erit retardatio Penduli diurna $= c^2$. ſecund. id quod perfecte conſentit cum iis, quae Le Paute docet in tractatu ſuo de arte horologica.

IV.) Cum ſit $1 - \text{cof.}\,\zeta = \text{ſin. verſ.}\,\zeta$; erit $1 + m = \frac{4}{4 - \text{ſin. v}\,\zeta}$, hincque

$$T = \frac{\Theta}{\sqrt{(1 - \frac{\text{ſin.}\cdot\zeta}{4})}} = \Theta\,(1 + \tfrac{1}{8}\,\text{ſin. verſ.}\,\zeta),$$

quam expreſſionem dedit Ill. Dan. Bernoulli in ſpecimine philoſophico de compenſationibus horologicis (*).

V.) Si Penduli a ſitu verticali digreſſio fuerit maxima poſſibilis, id eſt, dimidiae circuli peripheriae aequalis, quo caſu Pendulum in ſitu verticali ſurſum ſumto poſitum in aequilibrio ſubſiſtere debere per ſe manifeſtum eſt; erit $\zeta = 180^0$ et $m = 1$; vnde fit

$$T = \Theta\,(1 + \tfrac{1.3}{4.4} + \tfrac{1.3.5.7}{4.4.8.8} + \tfrac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12} + \ldots)\sqrt{2}.$$

Seriei autem huius patet ſummam infinitam eſſe, cum caſu $m = 1$ formula noſtra differentialis in hanc

$$\frac{\partial\Phi}{\sqrt{(1 - \text{cof.}\,\Phi)}} = \frac{\partial\Phi}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi\sqrt{2}}$$

abeat, cuius integrale $= \sqrt{2}$. Log. tang. $\frac{1}{4}\Phi$, pro termino integrationis $\Phi = 0$ fit infinitum. Tempus itaque oſcillationis hoc caſu fit infinitum, adeoque Pendulum a ſitu verti-

(*) Vid. Acta Acad. Petrop. l. c.

ticali vsque ad 180^0 digreſſum *poſt* tempus infinitum oſcillationem peraget, id eſt, plane non oſcillabit.

VI.) Quantumuis autem conuergat ſeries noſtra; tamen ſi amplitudo oſcillationis integrae praegrandis eſt et ſemicirculum notabiliter excedit; etiam iſta ſeries nimis lente conuergit, quam vt tempus oſcillationis inde ſaltem proxime definire liceat. Eiusmodi autem oſcillationibus praegrandis amplitudinis, atque adeo ad integram circuli peripheriam prope accedentibus accommodatum eſt ſequens theorema.

Theorema 2.

Pro oſcillationis amplitudine quantumuis magna.

§. 7. Si Penduli ſimplicis cuius longitudo $= b$, ſit maxima a ſitu verticali excurſio ſiue dimidia amplitudo oſcillationis $= \zeta$, et ponatur $k = \text{cof.} \frac{1}{2}\zeta$; erit tempus vnius oſcillationis integrae in minutis ſecundis expreſſum:

$$T = (\text{M. Log. hyp.} \tfrac{4}{k} - Nk^2 - Ok^4 - Pk^6 - Qk^8 - \text{etc.}) \sqrt{\tfrac{2b}{g}},$$

exiſtente

$$M = 1 + \alpha^2 k^2 + \beta^2 k^4 + \gamma^2 k^6 + \delta^2 k^8 + \ldots.$$
$$N = \alpha(1-\alpha),$$
$$O = \beta(\tfrac{1-\beta}{2} + \alpha - \beta),$$
$$P = \gamma(\tfrac{1-\gamma}{3} + \tfrac{\alpha-\gamma}{2} + \beta - \gamma),$$
$$Q = \delta(\tfrac{1-\delta}{4} + \tfrac{\alpha-\delta}{3} + \tfrac{\beta-\delta}{2} + \gamma - \delta),$$
$$\text{etc.}$$

cuius ergo ſeriei lex ita regularis eſt, vt quovsque libuerit continuari poſſit.

Demonſtratio.

§. 8. Conſtat ex elementis calculi integralis, eſſe

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(2b-x)x}} = 2.\text{Arc. fin.} \sqrt{\frac{x}{2b}}.$$

Poſito itaque $\sqrt{\frac{x}{2b}} = \text{cof. } u$; adeoque

Arc. fin. $\sqrt{\frac{x}{2b}} = 90^0 - u$; erit

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(2b-x)x}} = -2\,\partial u, \text{ et } x = 2b.\text{cof. } u^2.$$

Sit breuitatis cauſſa $\frac{2b-b}{2b} = k^2$ vt ob $h = 2b.\text{fin.}\frac{1}{2}\zeta^2$, habeatur $k = \text{cof.}\frac{1}{2}\zeta$, eritque

$$x - 2b + h = 2b(\text{cof. } u^2 - k^2).$$

Subſtitutis his valoribus habebitur (§. 4.)

$$T = -\sqrt{\frac{2b}{g}}\int \frac{\partial u}{\sqrt{(\text{cof. } u^2 - k^2)}},$$

integrali ita ſumto, vt caſu cof. $u = k$ ſiue $u = \frac{1}{2}\zeta$ euaneſcat et ad cof. $u = 1$ ſiue $u = 0$ extendatur. Sit iam

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(\text{cof. } u^2 - k^2)}} = U \text{ adeoque } T = -U.\sqrt{\frac{2b}{g}};$$

atque differentiale ∂U ita repraeſentare licet, vt ſit

$$\partial U = \frac{\partial u.\text{fin. } u}{\text{cof. } u.\sqrt{(1-\frac{k^2}{\text{cof. } u^2})(1-\text{cof. } u^2)}}.$$

Producto radicali denominatoris in ſeriem euoluto, erit:

$$\partial U = \partial u.\frac{\text{fin. } u}{\text{cof. } u}[A + B(\text{cof. } u^2 + \frac{k^2}{\text{cof. } u^2}) + C(\text{cof. } u^4 + \frac{k^4}{\text{cof. } u^4}) + D(\text{cof. } u^6 + \frac{k^6}{\text{cof. } u^6}) + \text{etc.}$$

exiſtente

$$A = 1 + \alpha\alpha k^2 + \beta\beta k^4 + \gamma\gamma k^6 + \text{etc.} = M$$
$$B = \alpha + \alpha\beta k^2 + \beta\gamma k^4 + \gamma\delta k^6 + \text{etc.}$$

$C =$

$$C = \beta + \alpha\gamma k^2 + \beta\delta k^4 + \gamma\varepsilon k^6 + \text{etc.}$$
$$D = \gamma + \alpha\delta k^2 + \beta\varepsilon k^4 + \gamma\zeta k^6 + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Eſt vero pro iſtis terminis integrationis

$$\int \partial u \cdot \tfrac{\text{ſin. } u}{\text{coſ. } u} = \text{Log. hyp. } k, \text{ et}$$
$$\int \partial u \cdot \frac{\text{fin. } u}{\text{cof. } u}\left[\text{cof. } u^{2\lambda} + \frac{k^{2\lambda}}{\text{cof. } u^{2\lambda}}\right] = -\frac{(1 - k^{2\lambda})}{\lambda},$$

vnde colligitur

$$U = M \cdot \text{log. hyp. } k - B(1 - k^2) - \tfrac{1}{2}C(1 - k^4) - \tfrac{1}{3}D(1 - k^6) - \text{etc.}$$

Eſt autem

$$B + \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{3}D + \ldots\ldots = \alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma + \ldots\ldots + (\beta + \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{3}\delta + \ldots.)\,\alpha k^2 + (\gamma + \tfrac{1}{2}\ldots + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \ldots.)\,\beta k^4 + \text{etc.} = s + s'\alpha k^2 + s''.\beta k^4 + \text{etc. et}$$

$$B + \tfrac{1}{2}Ck^2 + \tfrac{1}{3}Dk^4 \ldots\ldots = \alpha + (\tfrac{1}{2} + \alpha)\beta k^2 + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\alpha + \beta)\gamma k^4 + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \gamma)\delta k^6 + \text{etc.}$$

Subſtitutis his valoribus, habebitur

$$U = M \cdot \text{log. hyp. } k - s - (s' - 1)\,\alpha k^2 - (s'' - \alpha - \tfrac{1}{2})\,\beta k^4 - (s''' - \beta - \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{3})\,\gamma k^6 - (s'''' - \gamma - \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{3}\alpha - \tfrac{1}{4})\,k^8 - \text{etc.}$$

ſiue, per Lemmata §. 2. praemiſſa,

$$U = \text{M. log. hyp.}\,\tfrac{k}{4} + \alpha(1-\alpha)\,k^2 + \beta\left(\tfrac{1-\beta}{2} + \alpha - \beta\right)k^4 + \gamma\left(\tfrac{1-\gamma}{3} + \tfrac{\alpha-\gamma}{2} + \beta - \gamma\right)k^6 + \text{etc.}$$

Inuento hoc valore U, cum fuerit $T = -U\,.\,\sqrt{\tfrac{2b}{g}}$, erit

$$T = (\text{M. log. hyp.}\,\tfrac{4}{k} - N\,k^2 - O\,k^4 - P\,k^6 - \ldots.)\sqrt{\tfrac{2b}{g}},$$

q. e. d.

Corollaria.

§. 9. Theoremati huic ſequentia addimus Corollaria:

I.) Si oſcillationis infinite paruae ponatur tempus $= \Theta$; ob $\Theta = \pi\,.\,\sqrt{\tfrac{b}{2g}}$; erit in genere

$$T = \tfrac{2\Theta}{\pi}(\text{M. log.}\,\tfrac{4}{k} - N\,k^2 - O\,k^4 - P\,k^6 - \text{etc.})$$

vbi quantitatum M, N, O, etc. valores numerici reperiuntur ſequentes:

$$M = 1 + 0,25000\,.\,k^2 + 0,14063\,.\,k^4 + 0,09766\,.\,k^6 + 0,07477\,.\,k^8 + \text{etc.}$$

$$N = 0,25000; \quad O = 0,16405; \quad P = 0,12044; \quad Q = 0,09488; \text{ etc.}$$

II.) Expreſſionem hanc pro tempore oſcillationis inventam patet eo magis conuergere, quo maior fuerit oſcillationis amplitudo, eamque, ſi Penduli a ſitu verticali excurſio fuerit maxima poſſibilis, id eſt, dimidiae circuli peripheriae aequalis, ob $\zeta = 180^0$ adeoque $k = 0$, praebere, vti fieri debere vidimus, $T = \infty$.

III.)

III.) Etſi autem, quo minor fuerit oſcillationis amplitudo, minus conuergit iſta ſeries: tamen, etiamſi Penduli a ſitu verticali excurſio tantum 90 graduum fuerit, ea adhuc ita conuergit, vt praeter terminum logarithmicum non niſi quatuor eius terminis opus ſit ad tempus oscillationis cum praeciſione vnius partis milleſimae minuti ſecundi inueniendum. Pro ampliſſimis autem oſcillationibus terminus logarithmicus ſufficit, ita, vt, ſi Pendulum integra oſcillatione arcum deſcribat integra peripheria circuli parum minorem, absque omni errore ſenſibili habeatur

$$T = \Theta . \tfrac{2M}{\pi} . \log . \tfrac{4}{k} .$$

IV.) Cum logarithmus hic occurrens hyperbolicus ſit, ob log. hyp. $x = 2,3025851$. log. tabul. x et ob $\pi = 3,141592$ habebitur, poſito breuitatis gratia,

$$\Delta = 1,46587 + 0,36647 . k^2 + 0,20614 . k^4 + 0,14315 . k^6 + 0,10960 . k^8 + \text{etc.}$$

ſequens expreſſio calculo numerico accommodata:

$$T = \Theta \left\{ \Delta . \log . \text{tab} . \tfrac{4}{k} - \left\{ \begin{array}{l} 0,15915 . k^2 \\ 0,10445 . k^4 \\ 0,07667 . k^6 \\ 0,06040 . k^8 \\ \text{etc.} \end{array} \right. \right.$$

ex qua igitur ſequens Problema alioquin difficillimum reſoluere licet:

Pro-

Problema.

§. 10. *Si Pendulum ſimplex, cuius longitudo* $= b$, *integra oſcillatione arcum percurrat quantumuis magnum, definire tempus oſcillationis eius.*

Solutio.

1.) Quaeratur oſcillationis Penduli infinite paruae tempus $\Theta = \pi . \sqrt{\frac{b}{2g}}$.

2.) Ex data oſcillationis amplitudine $= 2\zeta$ quaeratur valor $k = \text{cof.} \frac{1}{2}\zeta$; ope cuius definiatur quantitas Δ ex aequatione modo data

$$\Delta = 1,46587 + 0,36647 . k^2 \text{ etc.}$$

quae ob valorem ipſius k valde paruum vehementer convergit, ita, vt plerumque tres vel quatuor eius terminos ſumſiſſe ſufficiat. Tum vero integrae oſcillationis erit tempus quaeſitum

$$T = \Theta \left\{ \begin{array}{l} \Delta . \text{log. tab.} \frac{4}{k} \\ \qquad - 0,15915 . k^2 \\ \qquad - 0,10445 . k^4 \\ \qquad - 0,07667 . k^6 \\ \qquad - 0,06040 . k^8 \\ \qquad - \text{etc.} \end{array} \right.$$

Exemplum 1.

§. 11. Si Pendulum integra oſcillatione ſemiperipheriam circuli percurrat; erit $2\zeta = 180^0$, adeoque

$$k = \text{cof.} 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

hincque ſumtis quinque ſeriei pro valore ipſius Δ datae terminis, $\Delta = 1,72537$. vnde habebitur

$$T = \Theta$$

$$T = \Theta \left\{ 1,29841 - \left\{ \begin{matrix} 0,07957 \\ 0,02611 \\ 0,00958 \\ 0,00377 \end{matrix} \right\} = 1,180 . \Theta ,\right.$$

quod plane congruit cum eo, quod supra §. 6. inuenimus.

Exemplum 2.

§. 12. Si Pendulum integra oscillatione arcum 350 graduum percurrat; erit $2\zeta = 350^0$; adeoque

$$k = \text{cos. } 87^0. 30'. = 0,0436194;$$

hincque, cum binos priores seriei pro Δ datae terminos sumsisse hic sufficiat, $\Delta = 1,46657$; vnde habebitur

$$T = \Theta . \Delta . \text{log. tab. } \tfrac{4}{k} = 2,877. \Theta ,$$

neglectis reliquis terminis, qui ne vnicam quidem partem millesimam ipsius Θ efficiunt.

Exemplum 3.

§. 13. Si Pendulum integra oscillatione arcum 358 graduum percurrat; erit $2\zeta = 358^0$, adeoque

$$k = \text{cos. } 89^0. 30'. = 0,0087265;$$

hincque, cum terminum ipsius Δ absolutum hic sumsisse sufficiat, $\Delta = 1,46587$; vnde habebitur

$$T = \Theta . \Delta . \text{log. tab. } \tfrac{4}{k} = 3,900\, \Theta .$$

reliquis terminis ob eandem, ac in praecedente exemplo, rationem neglectis.

§. 14. Quodſi igitur hoc Pendulum tale eſt, vt oscillationes infinite paruas ſingulis minutis ſecundis peragat; ob $\Theta = 1$ ſec. erit

Pro amplitudine oſcillationis.	Tempus oſcillationis eiusdem Penduli.
180 graduum	1, 180 ſecund.
350 - - - -	2, 877 - - -
358 - - - -	3, 900 - - -

a quibus oſcillationum temporibus ea, quae methodo III. Euleri in allegata diſſertatione expoſita inueniuntur, plane nihil differunt, etſi ea, quae ibi pro duobus poſterioribus exemplis aſſignantur, haud mediocriter maiora ſunt.

SO-

SOLVTIO QVAESTIONIS, QVOT MODIS POLYGONVM *n* LATERVM IN POLYGONA *m* LATERVM, PER DIAGONALES RESOLVI QVEAT.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Conuentui exhib. die 9 Sept. 1793.

§. 1.

In litteris a Clariſſimo Pfaff Helmſtadio die 15mo menſis proxime ſuperioris ad me datis, quibus acutiſſimus iſte Geometra plura inſignia inuenta, integrationem potiſſimum formularum differentialium irrationalium ſpectantia, beneuole mecum communicare voluit, mentio quoque fit Problematis: quot modis *n*gonum in *m*gona per diagonales reſolvere liceat? cuius ſolutionem generalem ſe conſecutum ſignificabat Cl. Pfaff, quaerendo ex me, num mihi, praeter caſum $m = 3$, ſolutio aliqua huius quaeſtionis innotuerit. Cum igitur, praeter hunc caſum memoratum, olim a Segnero in Tomo VII. nouorum Commentariorum tractatum, nulla mihi innotuerit ſolutio huius Problematis maxime curioſi, abſtinere non potui, quominus ipſe, quomodo inueſtigatio iſta in genere ſuſcipienda ſit, tentarem. Methodum a me adhibitam, conatuumque meorum ſucceſſus hic exhibere conſtitui.

§. 2. Propoſitum igitur ſit Polygonum n laterum, per diagonales, vtcunque, ſiue ex eodem angulo, ſiue ex diuerſis angulis ductas, in Polygona m laterum diuidendum; atque ſtatim intelligitur, certam relationem inter numeros m et n ſubſiſtere debere, quo diuiſio ſuccedat, ita vt, quomodocunque ea inſtituatur, nulla figura remaneat, cuius numerus laterum minor fuerit quam m. Ex hac enim conditione manifeſto ſequitur, litteram n alios valores recipere non poſſe, praeter m, $2m-2$, $3m-4$, $4m-6$, $5m-10$, et in genere $im-(i-2)$, denotante i numerum quemcunque integrum poſitiuum; qui ſcilicet numeri progreſſionem arithmeticam conſtituunt, cuius termini creſcunt differentia $m-2$. Si enim Polygono cuicunque $m$gonum iungatur, bina latera contigua in diagonalem abeunt, et laterum noui Polygoni ex hac coniunctione orti numerus tantum increſcit numero $m-2$.

§. 3. Examinemus nunc accuratius, ſeriem horum Polygonorum $2m-2$, $3m-4$, $4m-6$, $5m-8$ . . . . $im-(2i-2)$ laterum, atque ante omnia videamus quot diagonales ad cuiuslibet reſolutionem in $m$gona requirantur. Perſpicuum autem eſt ad $(2m-2)$gonum in duo $m$gona diuidendum vnica tantum diagonali opus eſſe; duabus vero pro reſolutione $(3m-4)$goni in tria $m$gona; tribus porro pro reſolutione $(4m-6)$goni in quatuor $m$gona. Atque in genere $i-1$ diagonales requirentur ad $[im-(2i-2)]$gonum in i $m$gona reſoluendum. Perinde autem eſt, ſiue hae diagonales ex vno eodemque angulo, ſiue ex diuerſis angulis educantur, eorum numerus ſemper erit $i-1$. Si enim i $m$gona inuicem iungantur, $i-1$ laterum paria $i-1$ diagonales efficiunt, et Polygoni, ex i illis $m$gonis compoſiti, numerus laterum erit $im-2(i-1)$, vti requiritur.

§. 4.

§. 4. Praemiſſis his obſeruationibus, nulla difficultate obnoxiis, diſpiciamus quot diuerſis modis in Polygono propoſito $im - (i-2)$ laterum $i-1$ diagonales ita ducere liceat, vt Polygonum in i $m$gona diuidatur. Hunc in finem vocetur iſte reſolutionum numerus.

Pro m---gono $= A$,
$--2m-2--= B$,
$--3m-4--= C$,
$--4m-6--= D$,
$----------$,
$----------$,
Pro $[(i-3)m-(2i-8)]$ gono $= W$,
$--[(i-2)m-(2i-6)]---= X$,
$--[(i-1)m-(2i-4)]---= Y$,
$--[im-(2i-2)]----= Z$,

inſtituaturque primo enumeratio pro Polygoni propoſiti angulo quolibet A. Ex hoc igitur angulo A manifeſto duas diagonales educere licet, a quarum vtraque Polygonum ita diuiditur, vt ex vna parte reperiatur $m$gonum, ex altera vero $[(i-1)m-(2i-4)]$gonum, quorum illud, per hypotheſin, A modis, hoc vero Y modis diuerſis in $m$gona reſolui poterit, ita vt hoc modo 2 A Y reſolutionum modi oriantur. Tum vero ex eodem angulo A duplici modo diagonalis ita educi poterit, vt ad vnam eius partem reperiatur $(2m-2)$-gonum, ad alteram vero $[(i-2)m-(i-6)]$-gonum, quorum illud B modis, hoc vero X modis reſolutionem in $m$gona admittit, vnde 2 B X reſolutiones naſcuntur. Ex eodem porro angulo itidem duplici modo diagonalem ducere licet, ita vt ab vtraque Polygo-

num in duo secetur, $(3m-4)$gonum, nimirum, C resolutiones, et $[(i-3)m-(2i-8)]$-gonum, W resolutiones admittens, vnde 2CW resolutiones prodeunt. Hoc modo progrediendo tandem, si i fuerit numerus impar, peruenietur ad par medium diagonalium, $m$gonum medium includens, et resolutionum numerus hinc oriundus per duplum productum ex duabus litteris ordine sequentibus, veluti 2MN, exprimetur. Sin autem i fuerit numerus par, peruenietur tandem ad vnicam diagonalem mediam, Polygonum propositum in duo $[\frac{1}{2}im-(i-2)]$gona secantem, quorum si vtrumque M resolutiones permittere statuatur, numerus resolutionum hinc oriundorum erit M^2, ita vt, vbi productum ex binis valorum A, B, C, D, - - - - W, X, Y, abeat in quadratum, hoc quadratum semel sumendum, siue coefficiens 2 delendus sit.

§. 5. Quod si nunc hos omnes resolutionum modos in vnam summam colligamus, numerus omnium omnino resolutionum, quas consideratio solius anguli A suppeditat, ita exprimetur:

$$2AY+2BX+2CW+2DV+\text{etc.}$$

quorum terminorum numerus erit $\frac{i}{2}$, quando i est numerus par; $\frac{i-1}{2}$ vero, quoties i fuerit numerus impar. Hic igitur numerus si ducatur in numerum angulorum, tum vero, ne singulae diagonales bis in computum veniant, per binarium diuidatur, prodibit numerus omnium modorum ex hac enumeratione oriundorum ita expressus:

$$\frac{im-(2i-2)}{2}(2AY+2BX+2CW+2DV+\text{etc.}).$$

Hic autem probe notandum est, in ista enumeratione omes illas $i-1$ diagonales, quae ad singulas resolutiones Polygoni

goni propoſiti in *m*gona requiruntur, vnamquamque ſeorſim, in computum ductam fuiſſe, cum omnibus ſuis combinationibus; ita vt ſinguli reſolutionis modi $i-1$ vicibus in numero illo inuento contineantur. Facta igitur diuiſione per $i-1$, verus numerus omnium reſolutionum inter ſe diverſorum erit

$$Z = \frac{im-(2i-2)}{2i-2}(2AY+2BX+2CW+2DV+\text{etc.})$$

§. 6. Tribuamus nunc litterae i ſucceſſiue valores 1, 2, 3, 4, memores eorum quae ſupra circa valores pares imparesque numeri i obſeruata ſunt. Poſtremae autem denominationes ſupra §. 4. introductae pro variis ipſius i valoribus ſequentes ſubibunt mutationes:

Si $i=1$, Z abit in A,

Si $i=2$, $\left\{\begin{matrix} Z \text{ abit in } B \\ Y - - - A \end{matrix}\right\}$,

Si $i=3$, $\left\{\begin{matrix} Z \text{ abit in } C \\ Y - - - B \\ X - - - A \end{matrix}\right\}$,

Si $i=4$, $\left\{\begin{matrix} Z \text{ abit in } D \\ Y - - - C \\ X - - - B \\ W - - - A \end{matrix}\right\}$,

etc. etc.

quibus notatis, riteque ſubſtitutis, expreſſio noſtra generalis pro numero reſolutionum Polygoni indefiniti n, ſiue $im-(2i-2)$ laterum, in *m*gona, in §. praecedente inventa, ſequentes nobis ſubminiſtrat, pro variis Polygonis, reſo-

reſoluendis in *m*gona, valores litterarum A, B, C, D, etc. quibus reſolutionum numeros indicauimus:

Pro m --- gono $A = 1$,
" $(2m-2)$ --- $B = (m-1)A^2$,
" $(3m-4)$ --- $C = \frac{3m-4}{4} \cdot 2AB$,
" $(4m-6)$ --- $D = \frac{4m-6}{6}(2AC + B^2)$,
" $(5m-8)$ --- $E = \frac{5m-8}{8}(2AD + 2BC)$,
" $(6m-10)$ --- $F = \frac{6m-10}{10}(2AE + 2BD + C^2)$,
" $(7m-10)$ --- $G = \frac{7m-12}{12}(2AF + 2BE + 2CD)$,
" $(8m-14)$ --- $H = \frac{8m-14}{14}(2AG + 2BF + 2CE + D^2)$,
" $(9m-16)$ --- $I = \frac{9m-16}{16}(2AH + 2BG + 2CF + 2DE)$,
etc. etc.

quorum igitur valorum, lege perſpicua progredientium, quisque per praecedentes determinatur.

§. 7. Subſidio harum expreſſionum, concinnitate in hoc argumento inexpectata praeditarum, facile erit tabulam condere, quae pro variis ipſius *m* valoribus numerum reſolutionum *n*goni in *m*gona numerice exhibeat.

Ta-

TABVLA

exhibens numerum resolutionum $[i\,m - (2\,i - 2)]$goni in $m$gona, ab $i = 1$ vsque ad $i = 10$.

Polygona resoluenda.	Polygona resoluentia.		
	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
m	1	1	1
$2\,m - 2$	2	3	4
$3\,m - 4$	5	12	22
$4\,m - 6$	14	55	140
$5\,m - 8$	42	273	969
$6\,m - 10$	132	1428	7084
$7\,m - 12$	429	7752	53820
$8\,m - 14$	1430	43263	420732
$9\,m - 16$	4862	246675	3362260
	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$
m	1	1	1
$2\,m - 2$	5	6	7
$3\,m - 4$	35	51	70
$4\,m - 6$	285	506	819
$5\,m - 8$	2530	5481	10472
$6\,m - 10$	23751	62832	141778
$7\,m - 12$	231880	749398	1997688
$8\,m - 14$	2330445	9203634	28989675
$9\,m - 16$	23950355	115607310	430321633

Additamentum.

§. 8. Conſideretur hoc Polynomium indefinitum:

$$1 + A x + B x^2 + C x^3 + D x^4 + \ldots . Z x^i,$$

cuius poteſtatem $(m-1)^{mam}$ ponamus

$$A + B x + C x^2 + D x^3 + E x^4 + \text{etc.}$$

Dabitur enim vtique eiusmodi relatio inter coëfficientes A, B, C, D, etc. vt haec aequalitas locum habere queat. Quaeramus igitur iſtam relationem, quod, vti conſtat, facillime praeſtabitur, ſumendo differentialia logarithmica, quibus inter ſe aequatis reperietur

$$B = (m-1) A^2,$$
$$C = \tfrac{3m-4}{2} A B,$$
$$D = \tfrac{4m-6}{3} A C + \tfrac{2m-3}{3} B^2,$$
$$E = \tfrac{5m-8}{4} A D + \tfrac{5m-8}{4} B C,$$
$$F = \tfrac{6m-10}{5} A E + \tfrac{6m-10}{5} A D + \tfrac{3m-5}{5} C^2,$$
$$G = \tfrac{7m-12}{6} A F + \tfrac{7m-12}{6} B E + \tfrac{7m-12}{6} C D,$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

primum autem coëfficientem A vnitati eſſe aequalem ipſa poſitio $(1 + A x + B x^2 + C x^3 + \text{etc.})^{m-1}$

$$= A + B x + C x^2 + D x^3 + \text{etc.},$$

ſtatuendo $x = 0$, declarat. Hae determinationes cum iis quas ſupra §. 5. inuenimus, perfecte congruunt. Hinc igitur intelligitur, numerum reſolutionum $[i m - (2 i - 2)]$-goni in $m$gona eſſe coëfficientem poteſtatis x^{i-1} in Polynomio

$$1 + A x + B x^2 + C x^3 + \ldots . Z x^i,$$

ad

ad poteſtatem $m-1$ eleuato; quae proprietas egregie conuenit cum principiis in doctrina de Combinationibus ſtabilitis, quibus ſolutionem noſtram Problematis propoſiti ſtatim ſuperſtruere licuiſſet, niſi methodus ſupra adhibita, euidentia aeque ac breuitate longe praeſtantiſſima, quaſi ſponte ſe obtuliſſet. Interim tamen hunc conſenſum obſeruaſſe intereſt, etiamſi ſolutio noſtra tali confirmatione minime egeat.

DE LA DESCENTE D'UN CORPS SUR UN PLAN INCLINÉ DONT UNE EXTRÉMITÉ EST APPUYÉE SUR UN FOND ÉLASTIQUE.

Par
NICOLAS FUSS.

Présenté à l'Académie le 23 Décembre, 1793.

§. 1.

En voyant des enfans s'amuser à faire gliſſer des livres ſur une planche, dont ils avoient appuyé une extrémité ſur le couſſin d'une chaiſe à reſſorts, il m'eſt venu l'idée d'examiner le mouvement d'un corps aſſez peſant, pour faire céder, d'une maniere ſenſible, le fond élaſtique au poids, de ſorte que l'extrémité élevée du plan incliné ſe baiſſe au commencement & ſe relève à meſure que le corps descend.

§. 2. Je conſidère pour cet effet un plan incliné Tab. VI. Fig. 7. $AB = a$, qui eſt mobile autour du point B, & qui repoſe ſur un reſſort CE, fixé verticalement en C, à une diſtance arbitraire du point B, que nous nommerons cependant $BC = b$, quoiqu'elle ſorte dans la ſuite du calcul. Je ſuppoſe que le

le plan A B, en ſe baiſſant & en ſe relevant, puiſſe gliſſer librement ſur l'extremité E du reſſort, & que celui-ci garde conſtamment ſa poſition verticale (*). Je ſuppoſe de plus que le corps qu'on veut faire descendre pèſe P livres & que ce poids placé en A faſſe baiſſer le plan incliné A B de maniére que l'angle d'inclinaiſon ſoit $A B C = \alpha$, & par conſéquent la longueur du reſſort dans cette poſition initiale $= b \text{ tag. } \alpha$.

§. 3. Ayant établi de cette façon l'état initial, je ſuppoſe que le corps P ſoit descendu aprés t ſecondes de tems, en vertu de ſa peſanteur, du point A jusqu'en P; & que le plan A B ſe ſoit relevé de maniere que l'angle $A B C = \Phi$, de ſorte que la longueur du reſſort ſoit $= b \text{ tag. } \Phi$. Je nomme pour la poſition préſente du plan: Tab. VI. Fig. 8.

$$B P = v, \quad B X = x, \quad X P = y,$$

de ſorte que

$$x = v \text{ cof. } \Phi, \quad y = v \text{ ſin. } \Phi.$$

J'indique la preſſion que le corps exerce en P ſur le plan A B par la lettre Π & le frottement par $\lambda \Pi$, où λ eſt une fraction dont la valeur dépend du degré d'aſpérité ou du tiſſu des ſurfaces du plan & du poids, & qui doit être déterminée dans chaque cas par des expériences.

(*) J'avois commencé par ſuppoſer le reſſort attaché par un bout à l'extrémité A du plan incliné & par l'autre bout au point D du plan horizontal D B, à la diſtance $B D = B A$; mais voyant que le calcul deviendroit plus ſimple en concevant le reſſort perpendiculaire à D B & libre en E, j'ai préféré cette ſuppoſition. Pour éviter que le reſſort ne puiſſe s'écarter de la poſition verticale, & pour ſe dispenſer des recherches difficiles que cet écart rendroit néceſſaires, on n'a qu'à le ſuppoſer enchaſſé dans un tuyau cylindrique planté verticalement.

§. 4. Il y a donc, outre la propre peſanteur, encore deux autres forces qui agiſſent ſur le corps P, ſavoir: la preſſion, qui agit dans la direction P Q, perpendiculaire au plan A B, donne, par la réaction une force ſelon P R $= \Pi$, & le frottement donne ſelon la direction P A une force $= \lambda \Pi$. En décompoſant ces deux forces ſelon la direction horizontale B X & ſelon la direction verticale X P, il en réſulte en tout cinq forces qui agiſſent ſur le corps P, ſavoir:

Une force ſelon P T $= \Pi$ ſin. Φ;
- - - - - - - P U $= \Pi$ coſ. Φ;
- - - - - - - P S $= \lambda \Pi$ coſ. Φ;
- - - - - - - P V $= \lambda \Pi$ ſin. Φ;
- - - - - - - P X $=$ P.

Les principes de Mécanique nous fourniſſent donc les deux équations ſuivantes:

I. $\frac{P \partial \partial x}{2g \partial t^2} = \lambda \Pi$ coſ. $\Phi - \Pi$ ſin. Φ;

II. $\frac{P \partial \partial y}{2g \partial t^2} = \lambda \Pi$ ſin. $\Phi + \Pi$ coſ. $\Phi - P$;

g étant la hauteur de laquelle un corps tombe librement dans la premiere ſeconde de ſa chûte, & l'élément du tems ∂t une quantité conſtante.

§. 5. Pour l'accélération angulaire du plan incliné; je ſuppoſe ſon poids $=$ M, concentré dans le milieu O de la droite A B, & je mets le moment d'inertie $=$ M $k k$. Soit Q la force initiale du reſſort, capable de réſiſter au poids M du plan incliné & au corps P placé en A, & qui faſſe équilibre avec ces deux forces dans la poſition initiale A B C $= \alpha$; & parce que les momens de ces forces ſont: $\frac{1}{2} a$ M coſ. α, a P coſ. α & b Q, il faudra que

b Q $= \frac{1}{2} a$ M coſ. $\alpha + a$ P coſ. α,

d'où

d'où l'on obtient la force initiale du reſſort $Q = \frac{a\,R\ cof.\,\alpha}{b}$, en mettant pour abrêger $\frac{1}{2}M + P = R$.

§. 6. En ſuppoſant donc que la force du reſſort ſoit en raiſon inverſe de ſa longueur, on trouvera la force qu'il aura lorsque le corps ſera parvenu en P, égale à $\frac{Q\,tag.\,\alpha}{tag.\,\Phi} = \frac{a\,R\ ſin.\,\alpha}{b\,tag.\,\Phi}$ & ſon moment $= \frac{a\,R\ ſin.\,\alpha}{tag.\,\Phi}$, qui tend à augmenter l'angle Φ. Le poids M, agiſſant ſur le point O dans la direction verticale, donne un moment $= \frac{1}{2}\,a\,M\ cof.\,\Phi$, tendant à diminuer l'accélération angulaire, ce qui eſt auſſi l'effet de la preſſion Π, dont le moment eſt $= v\,\Pi$. Tous ces momens de force nous fourniſſent une troiſième équation qui eſt:

$$\text{III.}\quad \frac{M\,k\,k\,\partial\partial\Phi}{2\,g\,\partial t^2} = \frac{a\,R\ ſin.\,\alpha}{tag.\,\Phi} - \frac{1}{2}\,a\,M\ cof.\,\Phi - v\,\Pi.$$

§. 7. Ces trois équations différentielles du ſecond degré renferment la ſolution complette de notre Problème, qui eſt achevée, quant à ſa partie phyſique. Ce qui nous reſte à faire eſt du reſſort de l'Analyſe qui ne nous abandonne que trop ſouvent dans des recherches de cette nature. Nous allons voir jusqu'à quel point nous pouvons compter ſur ſes ſecours dans le cas préſent.

§. 8. Commençons par faire ſortir du calcul la preſſion Π qui nous eſt inconnue. Pour cet effet nous ferons les combinaiſons ſuivantes:

1°.) I. $cof.\,\Phi + II.\ ſin.\,\Phi$;

2°.) II. $cof.\,\Phi - I.\ ſin.\,\Phi$.

La premiere combinaiſon donne

$$\frac{P\,(\partial\partial x\ cof.\,\Phi + \partial\partial y\ ſin.\,\Phi)}{2\,g\,\partial t^2} = \lambda\,\Pi - P\ ſin.\,\Phi;$$

&

& la ſeconde fournit:

$$\frac{P(\partial\partial y \cdot \text{cof.}\,\Phi - \partial\partial x \cdot \text{ſin.}\,\Phi)}{2g\partial t^2} = \Pi - P\,\text{cof.}\,\Phi.$$

Or comme $x = v\,\text{cof.}\,\Phi$ et $y = v\,\text{ſin.}\,\Phi$, on aura

$\partial x = \partial v\,\text{cof.}\,\Phi - v\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$;

$\partial y = \partial v\,\text{ſin.}\,\Phi + v\partial\Phi\,\text{cof.}\,\Phi$;

$\partial\partial x = \partial\partial v\,\text{cof.}\,\Phi - 2\partial v\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - v\partial\Phi^2\,\text{cof.}\,\Phi - v\partial\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$;

$\partial\partial y = \partial\partial v\,\text{ſin.}\,\Phi + 2\partial v\partial\Phi\,\text{cof.}\,\Phi - v\partial\Phi^2\,\text{ſin.}\,\Phi + v\partial\partial\Phi\,\text{cof.}\,\Phi$;

donc en ſubſtituant ces dernieres valeurs:

$$\partial\partial x\,\text{cof.}\,\Phi + \partial\partial y\,\text{ſin.}\,\Phi = \partial\partial v - v\partial\Phi^2,$$

$$\partial\partial y\,\text{cof.}\,\Phi - \partial\partial x\,\text{ſin.}\,\Phi = 2\partial v\partial\Phi + v\partial\partial\Phi,$$

de maniere que

$$\lambda\,\Pi = P\,\text{ſin.}\,\Phi + \frac{P(\partial\partial v - v\partial\Phi^2)}{2g\partial t^2};$$

$$\Pi = P\,\text{cof.}\,\Phi + \frac{P(2\partial v\partial\Phi + v\partial\partial\Phi)}{2g\partial t^2}.$$

En comparant ces deux valeurs, il en réſulte l'équation ſuivante dégagée de la preſſion:

I. $\partial\partial v - v\partial\Phi^2 - 2\lambda\partial v\partial\Phi - \lambda v\partial\partial\Phi = 2g\partial t^2(\lambda\,\text{cof.}\,\Phi - \text{ſin.}\,\Phi)$.

§. 9. Voici donc une équation différentielle du ſecond degré à deux variables v et Φ ſeulement; car ∂t eſt conſtant, par ſuppoſition. Pour obtenir encore une telle équation, cherchons $v\,\Pi$ de la troiſième équation (§. 6.), & nous aurons

$$v\,\Pi = \frac{a\,R\,\text{ſin.}\,\alpha}{\text{tag.}\,\Phi} - \frac{1}{2}a\,M\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{M\,k\,k\,\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2}.$$

Or il y a auſſi en vertu du §. précédent

$$v\,\Pi = P\,v\,\text{cof.}\,\Phi + \frac{P(2v\partial v\partial\Phi + v\,v\partial\partial\Phi)}{2g\partial t^2}.$$

En mettant égales ces deux valeurs de $\lambda\,\Pi$, il en réſulte cette équation:

II.

II. $\partial\partial\Phi + \frac{2v\partial v\partial\Phi}{nkk+vv} = \frac{2g\partial t^2}{nkk+vv}\left[\frac{f}{tang.\Phi} - (\frac{1}{2}an+v)\,cos.\,\Phi\right]$,

dans laquelle $n = \frac{M}{P}$ & $f = a(\frac{1}{2}n+1)$ fin. α.

§. 10. Le Problème eſt donc reduit à préſent à la réſolution des deux équations différentielles du ſecond degré I et II; d'où il s'agit de déduire, par une double intégration, les valeurs de v & de Φ. Mais ici l'Analyſe nous laiſſe en défaut. Même en renonçant à une ſolution générale & complette, & négligeant le frottement, le Problème eſt encore au deſſus des forces actuelles du Calcul intégral; cependant c'eſt le ſeul cas particulier qu'on puiſſe imaginer pour ſimplifier les équations, & encore ne ſimplifie-t-il que la premiere, deſorte qu'on ne gagne rien par la ſuppoſition du frottement nul. Du moins toutes les tentatives que j'ai faites pour réſoudre les deux équations rapportées ont été infructueuſes.

§. 11. Si nous voulons donc connoître, avec quelque aſſûrance, la nature du mouvement en queſtion, il ne nous reſte, pour ſatisfaire cette curioſité, d'autre reſſource que l'approximation; & pour cet effet l'Analyſe nous préſente, en dédommagement de ce qu'elle nous refuſe directement, différens moyens, un peu pénibles, à la verité, mais ſûrs & ſatisfaiſans, autant qu'on peut le déſirer. Nous en allons employer un qui eſt aſſez d'uſage dans de pareils cas, dont voici le fondement.

§. 12. Mettons la vîteſſe progreſſive $\frac{\partial v}{\partial t} = z$ & la vîteſſe angulaire du plan $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \zeta$, & ſuppoſons connus pour un tems de t ſecondes, les élémens z, ζ, v & Φ; & en in-

diquant ces mêmes élémens, pour le tems $t + \partial t$, par les caractères z', ζ', v' & Φ', nous aurons

$$z' = z + \partial z = z + \frac{\partial \partial v}{\partial t};$$
$$\zeta' = \zeta + \partial \zeta = \zeta + \frac{\partial \partial \Phi}{\partial t};$$
$$v' = v + \partial v = v + z\,\partial t;$$
$$\Phi' = \Phi + \partial \Phi = \Phi + \zeta\,\partial t.$$

En fubſtituant donc ces valeurs dans nos deux équations differentio-differentielles I & II, elles deviendront

I. $\frac{z'-z}{\partial t} = v\zeta^2 + 2\lambda z\zeta + \lambda v\frac{\zeta'-\zeta}{\partial t} + 2g\,(\lambda \text{ cof. } \Phi - \text{ſin. } \Phi)$,

II. $\frac{\zeta'-\zeta}{\partial t} = \frac{2g}{nkk+vv}\left[\frac{f}{tang.\,\Phi} - \left(\frac{1}{2}a\,n + v\right)\text{cof. }\Phi\right] - \frac{2vz\zeta}{nkk+vv}$,

& la preſſion Π ſera exprimée ainſi:

$$\Pi = P \text{ cof. } \Phi + \frac{P}{2g}\left(2z\zeta + v\frac{\zeta'-\zeta}{\partial t}\right).$$

§. 13. Par la ſeconde équation on détermine la valeur de $\frac{\zeta'-\zeta}{\partial t}$, & cette valeur étant ſubſtituée dans la premiere, on aura auſſi $\frac{z'-z}{\partial t}$. En prenant donc pour ∂t un intervalle de tems aſſez petit, par exemple $\partial t = \frac{1}{5}$ ſec. ou bien, $\partial t = \frac{1}{10}$ ſec. lorsque les variations des élémens ſont trop conſidérables, moyennant les quatre valeurs z, ζ, v, Φ, connues pour le tems de t ſecondes, on pourra déterminer ces mêmes élémens z', ζ', v', Φ' pour le tems $t + \partial t$. Ainſi les valeurs z, ζ, v, Φ étant connues pour le commencement, on pourra déterminer ſucceſſivement ces mêmes élémens pour le tems de $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, etc. ou bien pour le tems de $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, etc. ſecondes écoulées depuis le commencement du mouvement. Et de cette maniere on connoîtra très approchamment le mouvement du corps & celui du plan incliné en queſtion.

CAL-

CALCULS
pour un cas déterminé.

§. 14. Comme nos formules ne contiennent pas les poids P & M, mais ſeulement leur rapport n, nous les laiſſerons indéterminés, en mettant ſimplement P = M. Quant aux meſures de longueur nous prendrons pour unité le pied dont 16 conſtituent la hauteur, de laquelle un corps tombe librement dans la premiere ſeconde de ſa chûte. Soit donc $g = 16$, $a = 12$, puis $\alpha = 30^0$ & $\lambda = \frac{1}{4}$, & nous aurons $n = 1$, $kk = \frac{1}{3}aa = 48$ & $f = 9$. En ſubſtituant ces valeurs, nous aurons

$$\frac{\zeta' - \zeta}{\partial t} = \frac{32}{48 + vv}\left[\frac{8}{tang.\,\Phi} - (6 + v)\,cof.\,\Phi\right] - \frac{2vz\zeta}{48 + vv};$$

$$\frac{z' - z}{\partial t} = v\zeta^2 + \tfrac{1}{2}z\zeta + \tfrac{v}{4}\frac{\zeta' - \zeta}{\partial t} + 32\left(\tfrac{1}{4}cof.\,\Phi - fin.\,\Phi\right),$$

$$\Pi = P\left[cof.\,\Phi + \tfrac{1}{32}\left(2z\zeta + v\,.\,\frac{\zeta' - \zeta}{\partial t}\right)\right].$$

§. 15. Commençons donc à préſent par la conſidération de l'état initial, & ſachant que pour le tems $t = 0$ il y a

$$\zeta = 0;\ z = 0;\ v = 12;\ \Phi = 30^0;$$

ces quatre élémens nous fourniſſent

$$\frac{\zeta' - \zeta}{\partial t} = 0;$$

$$\frac{z' - z}{\partial t} = -9,0718;$$

$$\Pi = 0,8660\,.\,P.$$

De là nous tirons les élémens pour le tems ſuivant

$$\zeta' = \zeta = 0,$$

$$z' = z - 9,0718\,.\,\partial t,$$

$$v' = v + z\,\partial t = 12,$$

$$\Phi' = \Phi + \zeta\,\partial t = 30^0.$$

§. 16. Prenons donc $\partial t = \frac{1''}{10}$, & les quatre élémens pour le tems $t = \frac{1''}{10}$ ſeront

$$\zeta = 0;\ z = -0,90718;\ v = 12;\ \Phi = 30^0;$$

En faiſant uſage de ces valeurs, nous trouverons comme ci-deſſus :

$$\frac{\zeta' - \zeta}{\partial t} = 0;$$
$$\frac{z' - z}{\partial t} = -9,0718;$$
$$\Pi = 0,8660 . P;$$

de ſorte que les quatre élémens pour le tems ſuivant $t + \partial t$ ſeront

$$\zeta' = 0;$$
$$z' = -0,90718 - 9,0718 . \partial t;$$
$$v' = 12,00000 - 0,90718 . \partial t;$$
$$\Phi' = 30^0;$$

§. 17. Mettons derechef $\partial t = \frac{1''}{10}$, & nous aurons pour le tems $t = \frac{2''}{10}$

$$\zeta = 0;\ z = -1,8144;\ v = 11,9093;\ \Phi = 30^0;$$

valeurs desquelles on tire

$$\frac{\zeta' - \zeta}{\partial t} = 0,01324;$$
$$\frac{z' - z}{\partial t} = -9,0324;$$
$$\Pi = 0,8709 . P;$$

par conſéquent il y aura pour le tems ſuivant $t + \partial t$:

$$\zeta' = 0 + 0,01324 . \partial t;$$
$$z' = -1,8144 - 9,0324 . \partial t;$$
$$v' = 11,9093 - 1,8144 . \partial t;$$
$$\Phi' = 30^0.$$

§. 18.

§. 18. En mettant ici $\partial t = \frac{1''}{10}$, on aura pour le tems $t = \frac{3''}{10}$

$\zeta = 0,001324$; $v = 11,7279$;

$z = 2,7176$; $\Phi = 30^0$;

& de là on déduit les valeurs

$\frac{\zeta' - \zeta}{\partial t} = 0,04109$,

$\frac{z' - z}{\partial t} = -8,9531$,

$\Pi = 0,8808 . P$,

d'où réſultent pour le tems ſuivant les élémens

$\zeta' = 0,001324 + 0,04109 . \partial t$;

$z' = -2,7176 - 8,9531 . \partial t$;

$v' = 11,7279 - 2,7176 . \partial t$;

$\Phi' = 30^0 + 0,001324 . \partial t$.

§. 19. En donnant donc à ∂t la valeur $\frac{1''}{10}$, il y a pour le tems $t = \frac{4''}{10}$:

$\zeta = 0,005433$; $v = 11,4561$;

$z = -3,6129$; $\Phi = 30^0, \frac{1'}{2}$.

Or ces nouvelles valeurs nous donnent

$\frac{\zeta' - \zeta}{\partial t} = 0,08589$;

$\frac{z' - z}{\partial t} = -8,8399$;

$\Pi = 0,8953 . P$,

par conſéquent les élémens pour le tems ſuivant ſeront:

$\zeta' = 0,005433 + 0,0859 . \partial t$,

$z' = -3,6129 - 8,8399 . \partial t$,

$v' = 11,4561 - 3,6129 . \partial t$,

$\Phi' = 30^0, \frac{1'}{2} + 0,005433 . \partial t$.

§. 20. Mettons encore $\partial t = \frac{1''}{10}$, & nous aurons pour le tems $t = \frac{5''}{10}$:

$$\zeta = 0,01402; \qquad v = 11,0948;$$
$$z = -4,4969; \qquad \Phi = 30^0, 2\tfrac{1'}{3}.$$

Par le moyen de ces valeurs on obtient:

$$\frac{\zeta' - \zeta}{\partial t} = 0,15132;$$
$$\frac{z' - z}{\partial t} = -8,70298;$$
$$\Pi = 0,9142 . P.$$

Pour le tems ſuivant $t + \partial t$ on aura donc:

$$\zeta' = 0,01402 + 0,15132 . \partial t;$$
$$z' = -4,4969 - 8,70298 . \partial t;$$
$$v' = 11,0948 - 4,4969 . \partial t;$$
$$\Phi' = 30^0, 2\tfrac{1'}{3} + 0,01402 . \partial t.$$

§. 21. En continuant ces opérations jusqu'à ce que v devienne aſſez petit, on pourra fixer, moyennant l'équation $v' = v + z\,\partial t$, la valeur qu'il faudra donner à ∂t, pour que v' devienne zéro, & déterminer ainſi, aſſez approchamment, le tems de la deſcente totale, & les élémens pour l'inſtant où le corps quitte le plan. Il ſeroit inutile de mettre ici tous ces détails de calcul: Nous nous contenterons d'en raſſembler les réſultats dans la table ſuivante, qui repréſente aſſez bien le mouvement du corps & du plan incliné, depuis le commencement juſqu'à l'époque mentionnée.

TA-

TABLE

représentant le mouvement du corps & du plan incliné.

t	z	ζ	v	Φ	$\Pi : P$
0, 00	0, 00	0, 000	12, 00	30°, 0′	0, 87
0, 10	0, 90	0, 000	12, 00	30, 0	0, 87
0, 20	1, 81	0, 000	11, 98	30, 0	0, 87
0, 30	2, 72	0, 001	11, 73	30, 0	0, 88
0, 40	3, 61	0, 005	11, 46	30, $\frac{1}{2}$	0, 89
0, 50	4, 50	0, 014	11, 09	30, $2\frac{1}{3}$	0, 91
0, 60	5, 36	0, 029	10, 64	30, 7	0, 94
0, 70	6, 22	0, 053	10, 11	30, 17	0, 96
0, 80	7, 07	0, 090	9, 49	30, 35	0, 98
0, 90	7, 91	0, 142	8, 78	31, 6	0, 99
1, 00	8, 75	0, 216	7, 99	31, 55	0, 98
1, 10	9, 62	0, 317	7, 11	33, 10	0, 95
1, 20	10, 54	0, 452	6, 15	34, 58	0, 86
1, 30	11, 56	0, 628	5, 09	37, 34	0, 70
1, 40	12, 75	0, 854	3, 94	41, 10	0, 41
1, 50	14, 24	1, 130	2, 66	46, 3	— 0, 05
1, 60	16, 25	1, 441	1, 24	52, 32	— 0, 75
1,676	18, 45	1, 653	0, 00	60, 47	

§. 22. La premiere colonne de cette table indique le tems écoulé depuis le moment où le corps a commencé à se mettre en mouvement, de dixième en dixième de seconde, jusqu'à l'instant où le corps quitte le plan incliné, c'est-à-dire jusqu'au tems $t = 1,676$ secondes.

§. 23. La seconde colonne marque la vîtesse progressive du corps. Elle nous fait voir, en pieds dont 16 ex-

expriment la hauteur, de laquelle un corps tombe librement pendant la premiere ſeconde de ſa chûte, combien de pieds le corps parcourroit, par un mouvement uniforme, avec la vîteſſe qu'il a acquiſe dans ce point, dans une ſeconde de tems. Nous voyons par les nombres de cette colonne que le mouvement du corps eſt à très peu près uniformément accéléré jusqu'à l'epoque $t = 0,80$ ſecondes, & que l'accélération, qui eſt allée tant ſoit peu en diminuant, jusqu'à cette époque, où elle eſt la plus petite, commence à devenir de plus en plus grande, de ſorte qu'au moment où le corps quitte le plan, ſa vîteſſe eſt 20 fois plus grande qu'elle a été au commencement.

§. 24. La troiſième colonne repréſente la vîteſſe gyratoire ou angulaire du plan incliné, exprimée dans les mêmes pieds. On voit que cette vîteſſe eſt presque imperceptible dans les premières époques, mais qu'elle commence a croître rapidement dès le tems $t = 0,80''$, jusqu'à ce qu'à la fin elle eſt de 1,65 & partant presque la 11e partie de la vîteſſe progreſſive.

§. 25. La quatrième colonne contient l'eſpace du plan incliné que le corps doit encore parcourir, eſpace qui s'évanouit lorsque $t = 1,67$, ce qui eſt par conſéquent le tems de la descente totale.

§. 26. La cinquième colonne montre l'accroiſſement ſucceſſif de l'angle d'inclinaiſon du plan qui ſe relève à meſure que le corps descend. On voit que cet accroiſſement, imperceptible au commencement, ne devient bien ſenſible que vers le tems $t = 0,80''$; qu'à compter de cette époque le plan ſe relève de plus en plus rapidement, & qu'au moment

ment où le corps quitte le plan, l'inclinaiſon devient 60°, 47′, c'eſt-à-dire plus de deux fois plus grande qu'elle étoit au commencement. Soit β l'angle que le plan fait avec l'horiſon, avant qu'on y a placé le poids P, ou bien, après que ce poids a quitté le plan & que le poids de celui-ci s'eſt mis en équilibre avec la force du reſſort, & il eſt évident que

$$R : \tfrac{1}{2}M = \text{tag. } \beta : \text{tag. } \alpha,$$

donc tag. $\beta = \frac{2R\ tag.\ \alpha}{M}$, & partant pour le cas préſent tag. $\beta = 3$ tag. 30°, c'eſt-à-dire $\beta = 60°$. Il n'eſt pas étonnant que le plan, avec la vîteſſe qu'il a acquiſe, outrepaſſe ce terme 60°, & que ſon inclinaiſon ſoit devenue un peu plus grande. Mais des que le plan ſera rentré dans l'état d'équilibre, ſon inclinaiſon ſera, comme nous venons de voir, de 60° ſeulement.

§. 27. La ſixième colonne indique le rapport qui ſubſiſte entre la preſſion du corps & ſon poids. Elle nous fait voir que pour les premieres époques la preſſion eſt égale au poids multiplié par le coſinus de l'inclinaiſon, comme cela a lieu lorsque celle-ci ne change pas; que la preſſion s'accroît lentement jusqu'à l'époque $t = 0,90''$, où elle eſt la plus grande; que de cette époque elle décroît rapidement jusqu'au tems $t = 1,49$, où elle s'évanouit; enfin qu'après ce tems elle devient négative, c'eſt-à-dire qu'au lieu que le corps a exercé jusques là une preſſion contre le plan, c'eſt à préſent le plan qui preſſe contre le corps, en ſuivant, avec un mouvement plus accéléré, celui-ci qui a obtenu une tendance à s'éloigner du plan. On voit bien que c'eſt à peu près le même phénomène qu'on obſerve auſſi dans la deſcente d'un corps ſur la convexité d'une ligne

courbe, la partie de la preſſion qui eſt engendrée par la force centrifuge devenant négative dans ce cas & par conſéquent toute la preſſion négative, dès que cette partie ſurpaſſe la force normale contraire & poſitive. C'eſt ainſi que pour le quart de cercle la preſſion devient négative, dès que le corps a parcouru un arc de $48^{0}, 11'$.

§. 28. Tous les changemens remarquables que les élémens de notre table ſubiſſent, arrivent, comme nous avons déjà obſervé, à l'époque $t = 0, 80$ ſecondes environ, ce qui eſt à très peu près la moitié du tems de la deſcente totale du corps. Ces phénomènes ſont dans une liaiſon étroite avec la figure de la courbe que le corps décrit dans ſon mouvement. Cette courbe eſt compoſée de deux portions, dont l'une E M eſt convexe & l'autre M B concave vers la ligne horiſontale C B, le point de flexion contraire M répondant à peu près au tems $t = 1, 10$, comme on peut voir par les angles de courbure P T X $= \psi$, que nous rapporterons dans la table ſuivante, avec les coordonnées B X $= x$, X P $= y$, & leurs différentielles, calculées pour les mêmes époques qui ont été établies ci-deſſus, & pour leſquelles nous avons déterminé les élémens de la table précédente :

Tab. VI. Fig. 9.

TA-

TABLE

qui repréſente les coordonnées, leurs différences, & l'angle de courbure de la courbe décrité par le corps.

t	x	y	∂x	∂y	Ψ
0, 10	10, 392	6, 000	0, 078	0, 045	30°, 0′
0, 20	10, 314	5, 955	0, 157	0, 091	29, 58
0, 30	10, 157	5, 864	0, 237	0, 135	29, 39
0, 40	9, 920	5, 729	0, 337	0, 188	29, 9
0, 50	9, 583	5, 541	0, 375	0, 199	28, 2
0, 60	9, 208	5, 342	0, 480	0, 244	26, 59
0, 70	8, 728	5, 098	0, 562	0, 270	25, 38
0, 80	8, 166	4, 828	0, 649	0, 292	24, 13
0, 90	7, 517	4, 536	0, 736	0, 312	22, 55
1, 00	6, 781	4, 224	0, 826	0, 333	21, 59
1, 10	5, 955	3, 891	0, 914	0, 365	21, 46
1, 20	5, 041	3, 526	1, 000	0, 419	22, 44
1, 30	4, 041	3, 107	1, 074	0, 514	25, 33
1, 40	2, 967	2, 593	1, 117	0, 674	31, 8
1, 50	1, 850	1, 919	1, 095	0, 934	40, 29
1, 60	0, 755	0, 985	0, 755	0, 985	52, 32
1,676	0, 000	0, 000			

PHYSICA.

PHYSICA.

DE ORDINE
FIBRARVM MVSCVLARIVM CORDIS.
Dissertatio X.
DE STRATO SECVNDO FIBRARVM VENTRICVLI SINISTRI.
Pars III.

Auctore
C. F. WOLFF.

Conuentui exhib. die 7 Junii. 1792.

Ordo fibrarum tertius (Tab. VII. E. 28. 38. 39. Tab. IX. x. 11. 6. 10. 15.). Eius ortus et directio in superiori ventriculi superficie.

Ordo fibrarum tertius strati secundi, in quo describendo subsstiti, sedem originis in crena, ab eius principio ad regionem

nem radiatam vsque *a*), habet. In hoc quidem corde et in iis omnibus, quibus conus arterioſus ſolutus eſt, ipſam regionem pontis haec ſedes accurate complectitur, vt quam partem ventriculi conus tegit, eam fibrae occupent ordinis ſecundi *b*). Vbi vero, quemadmodum ſolitum fere eſt, conus margine ſuo ſiniſtro crenae adnatus exiſtit, hanc partem, cono vicinam, ventriculi, quam et ipſa crena tunc percurrit, ſedes originis pro ordine fibrarum tertio occupat; vt prorſus a principio crenae ad finem regionis pontis, ſiue ad radiatae regionis initium vsque, haec ſedes originis ſe extendat. Hinc ortae fibrae ordinis tertii aliquanto magis, quam funiculi oblique verſus marginem ventriculi deſcendunt, vt parum tamen ſit, quo differant ab illis. Primo quidem in ſedibus nonnullis ſatis manifeſto hoc ductu obliquo ex crena egrediuntur *c*); mox tamen flexae propius denuo ad transverſum accedunt *d*), eoque verſus marginem continuant. In vniuerſum analogo funiculorum ductu in hac ſuperiori ſuperficie feruntur et multo transuerſo, quam longitudinali ductui propiores ſunt.

Eius fibrae interpoſitae in ſuperficie eadem.
(Tab. VII. E. 28. 32.)

Quamprimum hae fibrae ex crena oriuntur, notabilis earum portio ſe maxime, in hoc corde quidem, a reliquis diſtinguit. Iſtae ex vno quaſi puncto, ex ipſo principio crenae inter funiculorum et reliquarum huius ordinis fibrarum ortum, in hoc corde oriuntur *e*), indeque late ſe verſus

a) Tab. VII. E. 38.
b) Tab. VII. B. E.
c) Tab. VII. 36.
d) Tab. VII. 32. 35.
e) Tab. VII. E.

verſus marginem dispergunt *a*). In aliis cordibus ex ipſis reliquis ordinis tertii fibris prodire potius et verſus funiculos ſe extendere vidi. At hoc conſtans eſſe videtur, vt inter funiculos caeterasque ſolitas tertii ordinis fibras contineantur, neque in communi ſede ortus ad crenam propriam partem ſibi vindicent *b*), neque ad ſtriam, ſedem communem inſertionis *c*). Vt prorſus ergo a funiculis et caeteris fibris includantur. Quare et interpoſitae hae fibrae nominari poſſe videntur. Miro quidem ductu in hoc corde ortuque in variis ſedibus et progreſſu apparent. Oriuntur aliae ab aliis et ſub alias ſe recipiunt *d*). Alibi ſimplices fibrae aut fibrillae ſuper fasciculos fibrarum oblique tranſire, eosque obducere videntur *e*). In vniuerſum fibrillas connectentes potius, quam ſolitus fibras referunt. Verum in nullo alio corde hanc ſingularem ſtructuram reperi. Etiam, vbi ad inferiorem ſuperficiem perueniunt in ipſo hoc corde, ſolitam hae fibrae fabricam recipiunt *f*). Interpoſitae fibrae ipſae ſatis conſtantes eſſe videntur.

Eius funiculi et fasciculi craſſiores, imprimis, qui procurrenti analogus minori (Tab. VII. 38. 39.), annularis fasciculus, in eadem ſuperiori ſuperficie.

Tum diſtincti a reliquis fibris funiculi quoque, craſſitie et eminentia inſignes, in media parte magnae lataeque fas-

a) Tab. VII 28. 32.
b) Tab. VII. E.
c) Tab. IX. x. 4 z.
d) Tab. VII. 29. 30.
e) Tab. VII. 31. 32.
f) Tab. IX. x. 4. z. y.

fasciae huius, quam tertius ordo febrarum efficit, frequentius apparere solent. Tres vel quatuor eorum in cordibus nonnullis numeraui, qui, directione eadem ductuque eodem cum caeteris fibris progrediendo, crassitie tamen et latitudine distincti, annulorum fere, ventriculum ambientium, faciem prae se ferebant. In aliis crassiores etiam fasciculos fibrarum collectarum, simili modo per superiorem ventriculi superficiem productos, et circa marginem flexos, quibus margo inaequalis efficiebatur, obseruaui. Vtrorumque analogi in hoc quoque corde fasciculi occurrunt, dum in media parte fasciae, imprimis funiculi *a*), ad finem eius *b*) crassiores fasciculi se maxime distinguunt. Ex hisce tamen constantissimus ille magnus crassusque fasciculus est, qui vltimas huius ordinis fibras continet, quique analogus procurrenti minori fasciculo strati externi hunc ordinem tertium a quarto distinguit, quemque ob figuram et situm transuersum annularem potius in hoc secundo strato vocare conuenit. Iste in hoc corde quidem ad radiatam regionem duabus portionibus ex crena oritur, quarum altera inferior *c*) funiculum continuata producit, altera superior, vel posterior *d*), in ternam tenuem quasi subtendineam fibram inserta priori portioni, vel fasciculo annulari producto ipsi potius, se adiungit. Sparsis his fibris collectis, magisque et magis compactis, conformiter caeteris fibris flexus fasciculus in crassum eminentem annulum denique, tribus insignibus funiculis in hoc corde constantem, abit *e*), qui marginem maxime in hac regione cingit, sub quem quarti ordinis fibrae manifestius, quam vllibi se recipiunt.

a) Tab. VII. 33.
b) Tab. VII. 35. 39.
c) Tab. VII. 38.
d) Tab. VII. 37.
e) Tab. VII. 39. 40.

piunt. *a*). Deſtructa enim tenerrima colluloſa, quam dicunt, ſubſtantia, qua ſubiectis fibris faſciculus adhaeret, eleuari prorſus hic poteſt; vt faſciculo etiam integro, vti quarti ordinis fibrae ſub illum ſe recipiant, vti adſcendant, obſervari poſſit. Hic ſane inſigni craſſitie non modo faſciculus et ſitu et vſu, ſed ipſa figura quoque ſimillimus eſt procurrenti minori faſciculo ſtrati externi; quamuis haud adeo manifeſtum, maiori analogum, in hoc ſtrato ſecundo inuenias.

Fibrarum ordinis tertii in inferiori ventriculi ſuperficie progreſſus.

Vbi ad marginem fibrae pervenere, flexaeque inferiorem nunc intrant ſuperficiem, *b*) aliam prorſus, magisque determinatam formam induunt. Quae magis obliquae fibris ordinis ſecundi in ſuperiori ſuperficie fuerant, multo nunc transverſo ductui propiores iisdem *c*) in inferiori inveniuntur; partim quod ipſae ad hunc ductum magis accedunt, partim quod funiculi ordinis ſecundi multo magis quam in ſuperficie ſuperiori oblique deſcendunt. Interpoſitae, quae quidem haud minus in inferiori, quam in ſuperiori ſuperficie a caeteris fibris ſe diſtinguunt, aliquam obliquitatem adhuc retinent. *d*). Caeterae omnes omnino transverſim per totam inferiorem ſuperficiem ad ſtriam vsque progrediuntur. *e*). Illae ergo recto ductu obliquo et paralle-

a) Tab. VII. 40.
b) Tab. IX. x. 4. 11.
c) Tab. IX. p. x.
d) Tab. IX. x. 4. z.
e) Tab. IX. 4. 11. 6. 15.

rallelae prorſus inter ſe mutuo cito ad funiculos ordinis ſecundi, ductu magis obliquo progreſſos, *a*) attingunt, *b*) ſub eosque ſe recipiunt: primae ſub eos, quae proximae iis ſunt; tum ſucceſſiue et ceterae ad vltimas vsque remotiſſimasque ab illis *c*). Ita omnes interpoſitae cum vltimo funiculorum, quem ſe ſub praecedentes in medio fere per inferiorem ſuperficiem itinere *d*) recipere dixi, contingunt; caeterae ordinis tertii fibrae, *e*) paucis exceptis, ad ſtriam vsque progrediuntur. Iſtae in varias quidem faſciolas inferiorem ſuperficiem intrando in hoc corde diuiſae apparent, quarum poſtrema *f*) caeteris latior elegantiorque memorabilis eſt. Prima earum *g*) anguſtior ad eos funiculos ordinis praecedentis ſe applicat, *h*) qui ad ſtriam vsque tranſeunt. Secunda *i*) latior ſub illam anguſtiorem fibris ſuis ſe recipit, quibusdam ad ſtriam peruenit. Tertia *k*) onguſtiſſima ad ſtriam vsque procurrit. *l*). Quarta tandem *m*) latior ea eſt, quam dilatatus in hac inferiori ſuperficie faſciculus procurrens minor, vel annularis potius, qui craſſi cylindrici annuli inſtar in ſuperiori marginem imprimis circumdederat, *n*) producit. Haec prope marginem in hac inferiori quoque

---

a) Tab. IX. x. z.
b) Tab. IX. x. 4. y.
c) Tab. IX. 4. y.
d) Tab. IX. z.
e) Tab. IX. 4. 11.
f) Tab. IX. 8. 11.
g) Tab. IX. 4. 5.
h) Tab. IX. 6.
i) Tab. IX. 5. 7.
k) Tab. IX. 7. 8.
l) Tab. IX. 9.
m) Tab. IX. 8. 11.
n) Tab. VI. 39. 40.

quoque ſuperficie anguſtior, ſenſim inde fibras ſuas expandit in egregiamque planam latamque et omnino transuerſam faſciam *a*) abit.

Inſertio (Tab. IX. x. z. 6. 10. 12. 15.).

Inſeruntur fibrae ordinis tertii in ſtriam ea ratione, vt fibrae interpoſitae quidem illam non attingant, ſed ad ordinem praecedentem ſe applicent ſub eamque ſe recipiant; *b*) quae mediam huius ordinis partem occupant fibrae, poſt interpoſitas ſequentes, *c*) ad procurrentem breuem vsque, et quae eum faſciculum ipſum efficiunt, *d*) ſtriam ipſam petant. Priores ſcilicet portionem ſua inſertione occupant anteriorem partis mediae ſtriae. *e*). Fibrae reſolutae faſciculi procurrentis tertiae partis ſtriae portionem poſteriorem nanciſcuntur; *f*) vt ſola exigua anterior huius partis portio pro fibris nonnullis ordinis quarti ſuperſit g).

Varietates.

Non in omnibus quidem cordibus adeo exacte expreſſae hae fibrae earumque variae proprietates, quam in hoc corde inueniuntur. Attamen quoad ortum, progreſſum et ductum et inſertionem non modo vbique conueniunt, ſed caetera quoque, quae notaui, maximam partem in ſingulis, quae hactenus vidi, cordibus eadem obſeruata ſunt.

a) Tab. IX. 10. 15. 12, 15.
b) Tab. IX. x. z.
c) Tab. IX. 4. 8.
d) Tab. IX. 8. 11.
e) Tab. IX. 6. 9. 10. 15.
f) Tab. IX. 12. 15.
g) Tab. IX. 17. 18.

Conſtanter latam et inſignem, craſſioribus annulis cinctam, fibrisque factam parum obliquis, et diſtinctam a reliquis fibris faſciam in ſuperiori ſuperficie efficiunt. Conſtanter procurrens funiculus inſignis terminat hunc ordinem diſtinguitque ab ordine quarto. Conſtanter interpoſitae quoque fibrae, aut manifeſta veſtigia tamen earum, in cordibus obſeruantur; vt in tres partes hunc ordinem, in interpoſitas, in fibras medias, et in funiculum procurrentem diuidere liceat. Hoc ſolum nonnullis in cordibus occurrit, vt eodem fere obliquitatis gradu cum ordine ſecundo in inferiori ventriculi ſuperficie progredientes fibrae interpoſitae minus aperte, quam in hoc corde ſub ſecundum ordinem ſe recipiant. At demergunt ſe tunc tamen fibrae iſtae in iisdem confiniis inter ſecundum et tertium ordinem vna cum vltimis fibris ſecundi ordinis ipſis eo fere modo, quo in hoc corde vltimi funiculi ordinis ſecundi, dum cum interpoſitis contingunt, ſe demergunt *a*).

Differentia inſignis inter ſtrati externi et ſecundi ordinem tertium.

Adeo inſigniter hic tertius ordo fibrarum in ſtrato ſecundo a tertio externi ſtrati differt, vt primo intuitu ſimilitudo aut analogia inter vtrumque vix appareat. Vterque a crena quidem, a parte eius media oritur *b*). Funiculo procurrente inſigni vterque terminatur. *c*). Tum oblique ille in externo ſtrato fibris ſuis verſus marginem ventriculi progreditur; vt ſedem apici multo propiorem ad mar-

a) Tab. IX. z. y.
b) Tab. VII. E. 38. Tab. IV. D. 85.
c) Tab. VII. 37. 38. 39. Tab. IV. 83. 84. 85. 87.

marginem, quam prope crenam occupet. *a*). In ſtrato ſecundo adeo transuerſali ductui propinquus eſt, vt parum ſit, quo differat ſitu in margine atque ad crenam, niſi vt fibris ob interpoſitas diſperſis maiorem marginis, quam crenae partem occupet. *b*). Hactenus ſatis ſimilem ergo vterque tertius ordo ſe atque analogum omnino praebet. Nunc vero ad marginem ipſum ille *c*) in ſtrato externo terminatur funiculo procurrente maiori, fibris ordinis tertii praetenſo. *d*). In ſtrato ſecundo contra flexus fibris ſuis circa marginem, *e*) inferiorem ingreditur ſuperficiem, *f*) totamque eam, ad ſtriam vsque progrediendo, percurrit. *g*). Non inſerit ſe ille quidem in ſtrato externo, neque applicat ſe, terminatus omnino, ad procurrentem maiorem, ſed recipit ſe potius ſub eum. Verum, vti parallelae fere fibrae procurrenti ipſi, *h*) haud longe ſub eo progreſſae vix inferiorem tamen ſuperficiem ventriculi intrare videntur. A ſolo diuerſo ductu fibrarum ergo inſignis haec differentia ordinis tertii in vtroque ſtrato pendet. Quae enim parum tantum ad marginem vsque fibrae in vtroque ſtrato differebant, in margine ipſo longe a ſe mutuo diſcedunt. Flexae externae nunc apicem verſus ab inferiori prorſus ſuperficie auertuntur. *i*). Fibrae in ſtrato ſecundo recta pergunt, inferiorem ingrediuntur, ad ſtriam vsque continuant.

Qua

a) Tab. IV. D. 85. 87. 88.
b) Tab. VII. E. 38. 28. 40.
c) Tab. IV. 77. 78. 82.
d) Tab. IV. 73 74. 74.
e) Tab. VII. 28. 34. 39.
f) Tab. IX. x. 4. 11.
g) Tab. IX. 6. 10. 15.
h) Tab. IV, 77. 78. S.
i) Tab. IV, 77. 78.

Qua tamen nullo modo analogia inter ordinem vtrumque turbatur.

Caeterum insigni hac differentia analogia tamen et similitudo inter vtrumque ordinem tertium minime deletur. Quod maxime enim singulare in strato externo tertium ordinem distinguit, fibrarum ordinis sub funiculum procurrentem maiorem et sub ordinem secundum receptio, *a*) id manifesto in strato secundo quoque obseruatur, vbi interpositae fibrae simili modo sub ordinem secundum se recipiunt *b*); modo vt reliquae tertii ordinis fibrae striam permittantur. *c*). Neque alia tandem ratione tertius in vtroque, externo ac secundo, strato differt ordo, quam ipse secundus et primus ordo in his statis differebant. Nimirum a solo diverso ductu fibrarum in strato vtroque, quo, vbi ad marginem ventriculi peruenere fibrae ordinis tertii, apicem versus flectuntur in strato externo, recta ad striam pergunt in secundo strato, insignis illa differentia pependerat. Etiamsi enim nullus procurrens maior funiculus viam fibris tertii ordinis in strato externo praecluderet; nihilominus hae tamen apicem versus tendendo inferiorem minime ingrederentur ventriculi superficiem, eundemque prorsus et ductum et situm, quo nunc se distinguunt, haberent. Iam simili modo etiam secundus ordo in vtroque strato ductu fibrarum differt, modo vt maxima fibrarum strati externi flexio non in superiori iuxta marginem superficie et in margine ipso, sed in hoc margine partim, partimque in inferiori superficie proxime ad marginem fiat. *d*). Fibrae enim ordinis secundi in strato externo, vbi ad mar-

a) Tab. IV. 77. 78. S.

b) Tab. IX. x. z. y.

c) Tab. IX. 10. 15. 12. 15.

d) Tab. VI. 13. 14. 16. 24.

marginem perueniunt, continuo apicem verſus flectuntur, *a*) aliaeque in margine ipſo, *b*) aliae in inferiori ſuperficie iuxta marginem ea ratione decurrunt, vt pro longitudinalibus fere fibris haberi queant; *c*) haud aliter ac fibrae ordinis tertii in ſtrato externo, quibus illae vbique fere parallelae feruntur, procedunt. *d*). Fibrae ordinis ſecundi in ſtrato ſecundo contra recta ſuper marginem tranſeunt, inferiorem ingrediuntur ſuperficiem et ſtriam verſus decurrunt, in quam inſeruntur, *e*) pariter atque tertii ordinis fibrae in hoc ſecundo ſtrato ad ſtriam procedunt; *f*) modo vt fere transuerſim hae, illae magis oblique progrediantur. Simili ergo modo fibrae ordinis tertii atque ſecundi ordinis fibrae ſe in ſtrato ſecundo ad eorundem ordinum fibras in externo ſtrato habent; atque analogia inter vtrumque ſtratum in vno aeque atque in altero fibrarum ordine manifeſta eſt.

Ordo quartus fibrarum (Tab. VII. 40. 41. 42. 44. 47. 50. I. 45. 40. Tab. IX. 11. 19. 20. 16. 17. 18. 23. 24.).

Ordo denique quartus directione non modo fibrarum, ſed ſede ventriculi quoque, quam occupant fibrae, a caeteris hactenus dictis ordinibus ſe diſtinguit. Aut oblique ordinum praecedentium fibrae deſcendebant apicem verſus, aut ſi quam maxime ab externis differebant, transuerſim pro-

a) Tab IV. 46. 47. 48. 50. 61. 62. 70. 71.
b) Tab. IV. 71. 106. 70. 62. 106.
c) Tab. VI. 13. 14. 58. 63.
d) Tab. IV. 73. 77. 78. 82.
e) Tab. IX. p. x. 5. q. 3.
f) Tab. IX. x. 4. 11 z. 10. 15.

progrediebantur. Fibrae ordinis quarti omnino oblique verſus baſin adſcendunt. *a*). Neque vlla ex variis, quibus ordo conſtat, faſciis eſt, cuius fibrae ab eo ductu adſcendente declinarent. Regio circa apicem ventriculi, quam fibrae ordinis quarti occupant, quamque efficiunt in ſtrato ſecundo, et figura et magnitudinis ratione a poſterioribus regionibus differt. Funiculus enim annularis in vtraque ventriculi ſuperficie, maxime tamen in ſuperiori prope marginem adeo prae ſequantibus ordinis quarti faſciis, quae ſub illum ſe recipiunt, eminet, *b*) vt plus carnis in hac ſede, quam in caeteris regionibus ablatum eſſe videatur. Hinc anguſtior ventriculus in proxima hac ſub annulari funiculo ſede efficitur. *c*) Cui tamen, cum nihil omnino demtum ſit in apice ipſo, vbi iidem adhuc faſciculi terminales apparent, *d*) qui in ſtrato externo ventriculo apicem effecerant; *e*) cylindrica potius nunc in hoc ſtrato ſecundo, quam conoidea, quae in externo erat, *f*) figura ventriculi circa apicem parti enaſcitur; *g*) vt figura pariter ac magnitudinis ratione haec ſedes fibrarum ordinis quarti eaque ventriculi pars, quam ipſam in ſtrato ſecundo iſtae fibrae efficiunt, a caeteris eius partibus caeterorumque ordinum ſedibus differat. Haud iuſto plus tamen carnis, aut quidquam praeter ſimplex ſtratum externum remotum in ea ſede eſſe, vel inde iam patet, quod faſciculi terminales ipſi, qui et in externo

---

a) Tab. VI. 42. 43. Tab. IX. 16. 17.
b) Tab. VII. 38. 39. 40.
c) Tab. VII. 43. 40. 45.
d) Tab. VII. 50. 52.
e) Tab. IV. 103. 104.
f) Tab. IV. R. T. E.
g) Tab. VII. 40. 42. 45. 44. 47. 48.

terno ſtrato iam apparuerant *a*), fibris ſuis continuatis *b*) hanc ſedem occupant, ſub funiculumque annularem ſe recipiunt. Non poſſunt enim aliae, niſi quae ex ipſis ſtrati externi fasciculis continuantur, fibrae ſub externo ſtrato contiguae fuiſſe, quae, ſi quidquam praeter ſtratum externum remotum eſſet, neceſſario remotae ipſae eſſent. Verum ita fasciculus quidem procurrens breuis in ſtrato externo ſitus eſt, vt principio ſuo latiori et planiori *c*) principio plano pariter et lato annularis fasciculi *d*) incumbat, craſſiori cylindrica cauda contra *e*) apicem verſus deſcendens, ipſam foueam, annulari fasciculo in ſtrato ſecundo productam *f*), repleat. Sic craſſius ſtratum externum, ſed ſimplex tamen, excauatae regioni circa apicem impoſitum, aequalem ventriculi ſuperficiem externam, ſimulque figuram conoideam ventriculo in apicis regione efficit, quae eo ſtrato exuta cylindrica potius et anguſtior eſt.

Ortus fibrarum ordinis quarti a crena. (Tab. VII. 41. 42. 44. F.)

Oritur ordo quartus fibrarum ab vltima parte crenae, quae radiatae ventriculi regioni in ſtrato externo reſpondet *g*); deinde a ſuperiori et medio fasciculo terminali *h*). In varias autem hic ordo fascias fibrarum diſtinctus eſt. Earum

 duae,

a) Tab. IV. 99. 103. 104.
b) Tab. VII. 47. 45. 40.
c) Tab. IV. 83 85. 84.
d) Tab. VII. 37. 38.
e) Tab. IV. 87.
f) Tab. VII. 40. 45.
g) Tab. VII. 41. 44. F.
h) Tab. VII. 47. 50.

duae, ortae a crena, in ipſa ſuperiori iam ſuperficie terminantur *a)*, neque ad inferiorem perueniunt. Tertia a crena pariter orta *b)*, in inferiorem tranſit ſuperficiem *c)*, vnaque cum quarta *d)*, a fasciculo orta terminali ſuperiori, ſingularem in hac inferiori ſuperficie fasciam efficit *e)*, quam ob fibras, radiatim diſperſas, *flabellatam* fasciam dixeris. Quinta denique, a terminali fasciculo medio ſuborta *f)*, pariter flexa ſuper marginem ventriculi, inferioremque ingreſſa ſuperficiem, aliam ſimiliter *flabellatam*, ſed *minorem*, fasciam efficit *g)*. Prima et ſecunda quarti ordinis fascia, quae in ſuperiori ſuperficie terminantur, deinde et tertia, quae quartae accedit, cum eaque flabellatam fasciam maiorem in inferiori ſuperficie producit, ſolito modo a crena oriuntur *h)*. Quarta autem ipſa et quinta ſingulari ratione, illa a ſuperiori *i)*, haec a medio terminalis fasciculo *k)*, originem ducunt.

A fasciculo terminali ſuperiori.

Fasciculus terminalis ſuperior *l)*, quemadmodum in ſuperioribus deſcriptum eſt, ex inferiori ſuperficie oritur *m)*. Cras-

---

a) Tab. VII. 41. 42. 43.
b) Tab. VII. 44. 40. 45.
c) Tab. VII. 40. 45.
d) Tab. VII. 45. 47. 48.
e) Tab. IX. 11. 14. 19. 16. 17. 18.
f) Tab. VII. 50. 48. J.
g) Tab. IX. 19. 20. 22.
h) Tab. VII. 41. 42. 44.
i) Tab. VII. 47.
k) Tab. VII. 50.
l) Tab. IV. 99. 100.
m) Tab. VI. 8. 101.

Craſſus inde et ventricoſus musculus ſuper ſtriae extremitatem *a*) in ſuperiorem ſe flectit ſuperficiem *b*), ſimulque in varias portiones, quaſi in ſtrata diuerſa, ſublimiora profundioraque, hac ratione ſecedit, vt quo ſunt ſublimiora ſiue exteriora ſtrata, eo ſe magis flectant ſiniſtrorſum, eo contra minus, quo ſunt profundiora, ſeu interiora. Tria ſaltem, niſi plura, in ſuperiori terminali fasciculo ſtrata dantur, quorum ſublimius ergo, maxime flexum *c*), dum tranſit adſcendendo in ſuperiorem ſuperficiem, continuo magis magisque flecti pergit, ductumque tandem ſubit transuerſalem *d*), quo verſus apicem ventriculi ſiniſtri, ſeu centrum ſocorum *e*), progreditur, inſertum ſua vnciformi extremitate *f*) in extremitatem vnciformem procurrentis funiculi breuis *g*) eum fasciculum efficit, qui, cum ſolus in ſtrato externo appareret *h*), profundioribus terminalis fasciculi portionibus abſconditis, tanquam vnica continuatio fasciculi terminalis ſuperioris in ſtrato externo conſiderabatur. Media portio *i*), quae dicta ſublimiori, vbi in ſuperiorem ſuperficiem fasciculus terminalis adſcendit, tegitur, minus quam ſublimior ſe flectit. Sic parum curuata haec, dum illa transuerſim ad centrum ſocorum progreditur, oblique adſcendit, a ſublimiori ſecedit.

a) Tab. VI. 101.
b) Tab. IV. 99.
c) Tab. IV. 99. 100.
d) Tab. IV 100.
e) Tab. IV. 102.
f) Tab IV. 100.
g) Tab. IV. 101.
h) Tab. IV. 99. 100.
i) Tab. VII. 45. 48. 47. 49.

Recipit ſe hac ratione ſub radiatas fibras ſtrati externi *a*), tranſitque in ſtratum ſecundum, in quo quartam, ſuperius dictam, fasciam *b*) ordinis quarti fibrarum efficit. Tertia denique profundior portio *c*), a media, dum terminalis fasciculus in ſuperiorem ſuperficiem tranſit, tecta, minus quam media flexa *d*), ſub hanc *e*) et ſub caeteras ſimul ſecundi ſtrati fascias oblique adſcendendo tertium fibrarum ſtratum ingreditur.

A medio.

Quarta igitur fascia ordinis quarti in ſtrato ſecundo a portione media terminalis fasciculi ſuperioris originem ducit. Fascia quinta, ſimili fere modo a medio fasciculo terminali oritur. Hic pariter ex inferiori ventriculi ſuperficie productus *f*), craſſus pariter circa ſtriae extremitatem flexus, et in ſuperiorem adſcendens ſuperficiem *g*), duabus tantum, ſibi mutuo incumbentibus, ſtratis, ſiue portionibus *h*), in quas flexione diſcedit, conſtat. Earum ſublimior, quae in ſtrato externo apparet *i*), minus aliquantum quam ſuperioris fasciculi terminalis ſublimior portio flexa, ſub eam *k*) ſe recipit et ſub caeteras extermi ſtrati fibras radiatas, ſtratumque

---

a) Tab. IV. 96. 97. 98.
b) Tab. VII. 45. 47. 48.
c) Tab. VII. 49 a.
d) Tab. VII. 49 a.
e) Tab. VII. 49.
f) Tab. IX. h.
g) Tab. VII. 50.
h) Tab. VII. 51. 51 a.
i) Tab. IV. 103.
k) Tab. IV. 99. 100.

que ſecundum ingreditur *a*), vbi fasciam illam quintam et vltimam fibrarum ordinis quarti producit *b*). Portio profundior *c*), a ſublimiori maximam partem tecta, minus etiam quam haec flexa, abſcondita fere in ſecundo vti in externo ſtrato manet, tertiumque ſtratum ingreditur.

Fasciculorum terminalium variae productiones, per varia ſtrata diſtributae.

Sic per plura ſtrata ergo fasciculi terminales, qui in externo iam apparent, diuerſis illis productionibus ſuis diſtribuuntur, et ad plura efficienda ſtrata contribuunt. Quilibet eorum parte craſſiori et ſimplice *d*), qua oritur, deinde variis in quas diſcedit productionibus flabelliformibus *e*), ſibi mutuo ſuperſtratis, poſtea varie flexis, eaque ratione diuergentibus, conſtat. Quilibet, craſſiori ſua et ſimplice parte, quaſi manubrio flagelli, ex inferiori in ſuperiorem ventriculi ſuperficiem tranſit, vbi primum, dum varie flecti incipit, in varias ſuas productiones flabelliformes diſcedit. Singuli manubriis ſuis in ſtrato externo apparent, eiusque partem, inter apicem ventriculi et ſtriae crenaeque finem contentam, efficiunt; productionibus ſuis interiora ſtrata ingrediuntur. Tres eiusmodi flabelliformes portiones ſuperior producit, quarum ſublimiorem, additam vltimis fibris radiatis

a) Tab. VII. 50. 51.
b) Tab. VII. 51. 48. J.
c) Tab. VII. 50. 51 a.
d) Tab. IV. 99. 103. 104.
e) Superior. Tab. IV. 99 100. Tab. VII. 47. 49. 45. 48.
Medius: Tab. IV. 103. Tab. VII. 50. 43. J. 51. Tab. VII. 51 a. Tab. X. 35. 36. 39.
Inferior: Tab. IV. 104 Tab. VII. 52. Tab X 45. 46. 39.

tis *a*), externo ſtrato tradit. Media ſub illam ſublimem, et ſub radiatas fibras ſtrati externi ſimul contiguas, adſcendit, ſtratumque ſecundum ingreditur, fasciae in eo tertiae *b*) ordinis quarti hanc mediam ſuam flabelliformem portionem *c*) addendo. Profunda tandem portio *d*) ſub mediam proxime, et ſub tertiam ſimul caeterasque ſtrati ſecundi fascias adſcendit, tertiumque ſtratum ingreditur, fasciis eius ſe adiungendo. Fasciculus terminalis medius in duas tantummodo portiones flabellatas diſpescitur. Hic ſolo manubrio ſuo ad ſtratum externum contribuit *e*), ſublimiori portione *f*) ſub ſublimem terminalis fasciculi ſuperioris *g*) et ſub radiatas externi ſtrati fibras *h*) ſe recipit, ſtratumqne continuo ſecundum ingreditur, mediae portioni flabellatae *i*) fasciculi ſuperioris hanc ſuam ſublimiorem *k*) adiungendo. Profunda *l*) ſub ſublimi *m*) et ſub caeteris ſecundi ſtrati fasciis, ad quas et ſublimis pertinet *n*), adſcendit, et tertium ingreditur ſtratum, cuius ſe fasciis adiungit *o*). Denique inferior fasciculus terminalis *p*) ſimplex eſt, ſoloque manubrio craſſiori et flabelliformi ſua expanſione latiori conſtat. Eodem iſte

---

a) Tab. IV. 99. 100.
b) Tab. VII. 44. 40. 45.
c) Tab. VII. 47. 49. 45. 48.
d) Tab. VII. 49 a.
e) Tab. IV. 103.
f) Tab. VII. 51, 48. J.
g) Tab. IV. 99. 100.
h) Tab. IV. 96. 100.
i) Tab. VII. 49. 45. 48.
k) Tab. VII. 51. 48. J.
l) Tab. VII. 50. 51 a.
m) Tab. VII. 51.
n) Tab. VII. J. 48. 45. 40.
o) Tab. X. 35. 34. 39.
p) Tab. IV. 104.

iſte manubrio ſuo in externo *a*) primum, deinde et in ſecundo ſtrato *b*) apparet. Verum in externo, dum ſub ſublimiori portione ſaperioris fasciculi terminalis ſub caeterisque ſtrati externi fibris radiatis *c*) ſe abſcondit, non ſub eos tantum et ſub ſtratum externum, ſed ſub ſublimiorem ſimul fasciculi terminalis medii flabelliformem portionem *d*) quoque et ſub caeteras ſtrati ſecundi, ad quod illa pertinet, fascias ſibrasque *e*) ſe recipit, et adiungens ſe profundae medii huius fasciculi terminalis portioni *f*) in tertium vna cum ea ingreditur ſtratum fibrarum, ad quod ſolum ille fasciculus terminalis inferior hac vnica ſua productione flabelliformi *g*) contribuit; dum, vti externo, ſic et ſecundo ſtrato, ſolum manubrium ſuum praebet. Haec ergo completa ſtructura eſt fasciculorum terminalium, ſingularumque partium eorum, qui, ſicut in ſtrato externo nonniſi manubria ſua, ſolus ſuperior ſublimiorem praeterea portionem, oſtenderant, tanquam ſimplices fasciculi in illa externi ſtrati deſcriptione conſiderati, nec niſi quatenus in eo ſtrato apparebant, quatenus ad illud efficiendum contribuebant, deſcripti ſunt.

a) Tab. IV. 104.
b) Tab. VII. 52.
c) Tab. IV. 100. 96. 87.
d) Tab. VII. 51. 48. J.
e) Tab. VII. 48. 40.
f) Tab. VII. 50. 51 a.
g) Tab. X. 45. 46. 39.

TENTAMINA
DE
NITRI CRVDI PER CARBONES
DEPVRATIONE.

Auctore
TOB. LOWITZ.

Conuentui exhib. die 29 Nov. 1792.

Celeb. Profeſſor Gadolin Academiae Stockholmienſis membrum, nitri crudi per carbones depurandi haud mediocri cum ſucceſſu tentamina inſtituit, quae eiusdem Academiae Commentariis inſerta ſunt. Illuſtr. Societatis oeconomicae hic Petropoli florentis monitu et conſilio incitatus, complura eodem de argumento pericula inſtitui, quae cum Ill. Academia Scientiarum communicare, eo magis officii mei eſſe puto, quo propiori nexu cum iis experimentis cohaerent, quae de vi carbonum dephlogiſticatrice a me inuenta expoſui.

§. 1. Nitrum ex terra nitraria prima poſt elixiuiationem cryſtalliſatione obtentum, non ſalibus modo heterogeneis, ſed partibus etiam pinguibus ita ſemper inquinatum eſt, vt eo, quo eſt, crudo ſtatu et impuro vſui inſeruire nulli queat. Partes pingues, etiamſi diſceſſeris ab eo, quod ſua iam

iam in nitro praeſentia noceant, ſalium quoque alienorum ſeparationi vehementer obſtant, quam ob cauſſam eas a nitro ſeparari maxime intereſt.

§. 2. Deſtruendis vel ſegregandis e nitro pinguibus partibus varia chemici hucusque additamenta adhibuerunt: e. g. Alumen, Sanguinem bouinum, Acetum, Vinum, Vrinam, Tartarum etc. quorum efficaciſſimum procul dubio Alumen eſt, cuius additionem Cel. Bergmannus ſuaſit, eiusdemque quantitatem ad eam nitri depurandi in ratione 3 ad 100 ſtabiliuit. Prima quidem fronte, ob acidi vitrioli ad nitrum ex alumine acceſſum, noua hinc nitri inquinatio pertimeſcenda eſſe videtur, quam vero chemicorum plurimi longe minus, quam eam ex pinguibus partibus oriundam, eſſe nociuam, arbitrantur.

§. 3. Ex compluribus meis de vi carbonum dephlogiſticatrice inſtitutis hucusque obſeruationibus, carbones in nitri quoque depuratione praeſtare non nihil poſſe, facilis erat ſuſpicio; et reuera ego quidem iam a tribus abhinc annis nitri ordinarii venalis depurationem optimo cum ſucceſſu ita plerumque inſtituere aſſueui, vt ſolutionem eiusdem feruidam, ad cryſtalliſationis punctum redactam, per ſaccum linteum carbonum puluere ſemiplenum transcolarem; neque tamen, quae ſit carbonum in nitrum crudum efficientia, experimentis adhuc exploraueram.

§. 4. In tentaminibus meis ex propoſito nitrum valde impurum adhibui, quod aqua ſolutum colore ſe admodum fuſco, cereuiſiae domeſticae ad inſtar, induit. Ante vero, quam cum ipſis carbonibus tentamina adgrederer, qua vi vſitatiores hucusque depurandi modi in nitrum hoc gaude-

 rent,

rent, vt experirer, non alienum duxi, idque eo conſilio, vt effectuum varietates eo certius dignoſci a ſe inuicem et diiudicari poſſent.

EXPER. I.

Nitri noſtri libras duas ponderis medicinalis in aquae purae libris ſex ſuper igne diſſolui, et filtratam ſolutionem admodum ſuſcam, ad cryſtalliſandum repoſui. Ortae poſt refrigerationem cryſtalli ſlauo adhuc imbutae colore fuerunt, quo vt prorſus liberarentur, duabus adhuc nouis earundem ſolutionibus et cryſtalliſationibus opus erat; quo docente experimento, nitrum noſtrum, vt ſine vllo additamento perfecte album reddatur, ter repetendas in aqua ſolutiones et cryſtalliſationes poſtulat.

EXPER. II.

Ebullienti ſolutioni duarum nitri crudi vnciarum ſolutionem 20 collae piſcium granorum admiſcui. Nulla inde in ſolutionis colore mutatio ſubſecuta eſt; obtentaeque poſtea cryſtalli iis, quas priori cryſtalliſatione antecedentis tentaminis obtinui, perparum modo albiores fuerunt. Hinc colla piſcium non niſi eo in nitrum crudum effectu pollet, vt, quae alias ſola filtratione ſegregari poſſunt, quisquilias in materiam ſpumoſam, ſimplici deſpumatione facile a liquore ſeparandam, conuertat. Quae vero partes pingues ſolutioni nitri crudi, ſalua eiusdem pelluciditate, colorem fuſcum inducunt, in eas glutinoſi huius additamenti nullus plane effectus eſt.

EXPER. III.

Solutioni 1000 granorum nitri crudi in 8 aquae vnciis, 30 grana aluminis pulueriſati admiſcui (*). Exoriebatur

(*) Haec ea, quam Cl. Bergmannus ſuaſit, miſcendorum proportio eſt.

tur inde ſtatim ſpuma alba. Neque filtratum lixiuium, colorem multo, quam ante, dilutiorem ſed vino potius flauo aemulum referebat. Concreuerunt tamen poſt refrigerationem ſatis albae cryſtalli, quae vero, vt omni colore prorſus liberarentur iteratam depurationem requirebant.

EXPER. IV.

Vt viderem, an addita maiori aluminis quantitate ſolutio nitri priuari forſan colore ſuo poſſet, ebullienti duarum nitri vnciarum ſolutioni aluminis pulueriſati vnciam integram partitis portionibus admiſcui, neque tamen permagna hac aluminis quantitate effectum vel tantillum optabiliorem obtinui; ſolutio enim eundem, quem in antecedente experimento, colorem flauum induebat.

EXPER. V.

Similem quidem prorſus coloris fuſci diminutionem obſeruaui, dum 1000 nitri crudi granis non niſi 8 Aluminis adderem; neque tamen vllo modo obtinere mihi licuit, vt tractata hac ratione ſolutio filtrum limpida tranſiret, quae nunquam non turbida aliquantum chartam bibulam permeauit.

EXPER. VI.

In colorem flauum ſolutionis eius nitri flaui, quod in primo tentamine ex prima cryſtalliſatione, ſine vllo additamento, obtinui, alumen ne minimum quidem effectum exſeruit.

§. 5. Comprobatur tentaminibus his (Exp. 3.—6.), aluminis vim in partes nitri pingues, licet ſatis ſit efficax, iis tamen plane omnibus e nitro expellendis imparem eſſe,

quo fit, vt ſuſpicari liceat, partes has pingues, nitrum inquinantes, non vnius omnes naturae eſſe, alias alumini quam facillime obedire, aliasque eidem prorſus reſiſtere. Omnes enim ſi ſimiles inter ſe eſſent, aucta adiiciendi aluminis copia, ſolutionis colorem magis magisque diminui, quin prorſus deleri, neceſſe eſſet.

§. 6. Obtenta hoc modo praeuia cognitione, quomodo vſitatiſſimae hactenus depurandi methodi in nitrum noſtrum crudum ſe gerant, alumen inprimis, adhibendorum huic fini additamentorum efficaciſſimum; ipſa cum carbonibus tentamina adgreſſus ſum.

EXPER. VII.

Nitri crudi vncias 24 in 10 aquae libris diſſolui; refrigerataeque huic ſolutioni 6 carbonum pulueris vncias admiſcui, quo facto, liquoris fuſcus color ſtatim in illum dilute flauum abiit, qui vino Rhenano proprius eſt. Poſtero et tertio die eidem miſtelae iteratis vicibus duas ſubinde pulveris carbonum vncias ſupperaddidi; hoc modo ſolutionis color magis paulatim magisque dilutus euaſit, neque tamen, niſi quarto die, additis ſummatim 20 pulueris carbonum vnciis, prorſus diſparuit. Filtratus hic liquor, inſtar aquae limpidus, ad cryſtalliſationis punctum redactus, pulcherrimas albiſſimasque nitri cryſtallos ſuppeditauit.

EXPER. VIII.

In praecedente experimento nullum a calore ſubſidium petii; ſciendi vero cupidus, quaenam auxiliante calore, hac in re carbonum vis eſſet, nitri crudi vnciis ſex in aquae libris duabus ſolutis, ſesqui vncias carbonum pulueris inter coquendum adieci, ſolutionemque feruidam adhuc filtra-

filtraui; furrexerunt ex ea nitri cryſtalli albiſſimae. Color lixiuii fuſcus eodem gradu fuit diminutus, quo id absque caloris adminiculo per aequalem carbonum portionem accidit, filtratio autem eiusdem longe facilius citiusque ſucceſſit. Calidae nitri cum carbonibus tractationis in eo praecipua vtilitas cernitur, quod aquae copiam non debeas impendere, ea maiorem, qua opus eſt, vt refrigereſcente ſolutione, poſt filtrationem nitrum ſtatim in cryſtallos concreſcere valeat; quo ipſo etiam fit, vt longiori euaporatione ſuperſedere prorſus poſſis.

EXPER. IX.

Ebullienti 6 nitri crudi vnciarum in duabus aquae libris ſolutioni ſesqui vncias carbonum pulueris admiſcui, omniaque ad perfectam ſiccitatem vsque euaporaui, quo facto, iterum duodecim aquae vncias addidi, feruidamque ſolutionem ſtatim poſtea filtraui. Colorem ſolutionis huius, multo licet difficiliore hac et longiore tractatione, eo, qui in antecedente experimento exſtitit, parum dilutiorem vidi.

EXPER. X.

Quatuor nitri crudi vnciarum ſolutioni, 5 carbonum pulueris vncias inter coquendum addi neceſſe fuit, vt omni colore liberata, aquae inſtar, prorſus limpida euaderet.

§. 7. Ex ſeptimo et decimo tentamine liquet, omnibus particulis pinguibus perfecte deſtruendis, frigida tractatione, 5 carbonum pulueris ad ſex nitri crudi partes ſufficere: calida vero tractatione, 4 nitri crudi 5 carbonum pulueris partes poſtulari, ita, vt primo aſpectu, frigida calidae manipulationi anteponenda eſſe videatur. At contra frigida tractatio id incommodi habet, vt frigida ſolutio

ab

ab exigua licet carbonum copia filtratu tamen quam difficillima fit; dum hoc in casu per filtra vel denssissima turbidus semper liquor et nigrescente colore transit; quae molestia in altero casu locum plane non obtinet, modo mistionis coctio vel vnica tantum ebullitio in auxilium vocetur.

§. 8. Nitrum depurandum si colore exui prorsus omni opus esset: nulla hoc in negotio carbonum vtilitas foret, ob nimiam, quae addi deberet, eorundem copiam, inprimis si magna esset nitri depurandi quantitas. Summo autem hoc perfectionis gradu cum non opus esse videatur, et labor succedere etiam possit, si solutionis color ex parte tantum et ad certum vsque gradum diluatur; operam dedi, vt minimam, quae depurationi sufficeret, carbonum pulueris quantitatem experimentis explorarem. Atque haec tentamina ita instituí omnia, vt mille nitri crudi grana, addita alia atque alia cabonum pulueris quantitate, cum 8 aquae purae vnciis ad sex vnciarum remanentiam coquerem, filtratasque solutiones, quo oriundas a carbonum pulvere ipsarum mutationes comparare melius inter se possem, in vasculis vitreis aeque amplis alteram iuxta alteram collocarem, et obtentas ex singulis crystallos super charta bibula siccatas, experimentí numero signarem.

EXPER. XL.

Carbonum pulueris grana 30 in solutionis colore visibilem effectum fere nullum exserebant; crystallos tamen, etsi non plane albas, iis tamen, quae absque vllo additamento obtinentur, praestantiores obtinui.

Exper.

EXPER. XII.

Carbonum pulueris grana 100 coloris diminutionem satis iam in solutione conspicuam, crystallosque iis, quae aluminis auxilio prodire solent, aemulas (Exper. 3.) efficiebant.

EXPER. XIII.

Carbonum pulueris grana 120, colorem solutionis quod attinet, similem prorsus effectum producebant.

EXPER. XIV.

Carbonum pulueris grana 150. solutioni eum, qui vino Rhenano proprius est, colorem flauum, quem et alumen ipsi conciliat, conciliabant. Crystallos vero, hoc in experimento, puriores affecutus sum.

EXPER. XV.

Grana 200. pulueris carbonum solutioni colorem praecedente dilutiorem conciliabant, crystallique concreuerunt plane albae.

EXPER. XVI.

Additis 250 granis pulueris carbonum, liquorem obtinui etiam praecedente puriorem; crystallisque potitus sum albissimis et purissimis.

§. 9. Testantibus his experimentis, vna carbonum pars 5 nitri nostri crudi partibus addenda minima eorundem quantitas est, qua nitrum ita a partibus pinguibus liberari possit, vt e solutione etsi colore non penitus liberata, crystalli satis tamen albae secedant (Exper. 15.). At hanc quoque carbonum quantitatem haud inficior non esse exiguam, im-

mo tantam, vt vtilitatis hoc in negotio a carbonum vſu exſpectandae ſpem prope omnem auferre videatur. At vero in experimentis his, vti ſupra iam monui, ex propoſito vſus ſum nitro crudo quam maxime impuro; vnde certo colligere licet, fore, vt nitri minus inquinati depuratio, minore etiam carbonum copia ſuccedat; vti etiam reapſe Cl. Gadolino eam ſucceſſiſſe, infra videbimus.

Vnam carbonum partem decem nitri crudi partibus addi ſufficiet, ſi eo, quem alias alumen producit, effectu contenti eſſe velimus. Atque haec carbonum ad nitrum ratio tunc inprimis conueniret, ſi nitrum tanta ſalium heterogeneorum quantitate eſſet inquinatum, vt pro ſeparandis iis nihilominus reiteratae coctiones et recryſtalliſationes requirerentur.

Ceterum ex omnibus hucusque deſcriptis tentaminibus videre eſt, carbones, modo iuſta quantitate applicentur, vim exſerere ea aluminis longe maiorem.

§. 10. Poſtquam, quae ſit carbonum et aluminis ſeparatim adhibitorum in partes nitri pingues efficacia, vidiſſem; quid coniunctim valeant, explorare conſtitui: permultis enim iam antiquioribus meis tentaminibus edoctus compertum mihi habeo, carbones in partes phlogiſticas, praeſente quodam acido, longe maiori, quam per ſe, agere efficacia; conſtat vero, alumen vitriolico acido abundare. Atque hunc in finem ſequentia tentamina inſtituere operae pretium mihi viſum eſt.

EXPER. XVII.

Carbonum pulueris 180, aluminis 30, nitri crudi 1000 grana, in 8 aquae purae vnciis vnica ebullitione ſolutio-

lutionem ſuppeditabant, limpiditatem quod attinet, non ea tantum, quae alias vno aluminis adminiculo producitur, ſed ea etiam, quam 250 granis carbonum pulueris obtinui, longe praeſtantiorem, cryſtallosque inde obtinui ſplendidiſſime albas, vt pulchritudine iis adeo praecellere viderentur, quas (Exper. 7.) ex ſolutione, colore ſuo, vnius carbonum pulueris ope, perfecte liberata, nactus ſum.

Succeſſu hoc optatiſſimo incitatus ſequentibus experimentis meliorem miſcendorum rationem determinare, ſuscepi.

EXPER. XVIII.

Carbonum pulueris 180, aluminis 5, et nitri crudi 1000 grana vnica ebullitione ſolutionem largiebantur turbidam nec niſi nigreſcente colore filtra tranſeuntem; id quod additi aluminis quantitate nimis exigua effici, pluribus tentaminibus compertum mihi habeo; additis enim adhuc 30 carbonum pulueris granis, liquorem magis etiam turbari vidi; additis vero eidem ſolutioni turbidae 5 adhuc aluminis granis, liquor, vti in priori experimento, prorſus pellucidus filtrum facillime pertranſiit.

EXPER. XIX.

Carbonum pulueris 60, Aluminis 30 grana ſolutioni 1000 granorum nitri crudi ſimilem prorſus, ac in 16to experimento, quo eidem huic nitri copiae 250 grana carbonum pulueris admiſcui, colorem conciliabant.

EXPER. XX.

Carbonum pulueris 120, Aluminis 15 grana ſolutionem ei 17^mi^ tentaminis ſimilem largiebantur.

EXPER. XXI.

Carbonum pulueris 50 et aluminis 5 granis itidem ſatis limpida potitus ſum ſolutione.

EXPER. XXII.

Carbonum pulueris 100 et Aluminis 10 granis priore limpidiorem ſolutionem obtinui.

EXPER. XXIII.

Carbonum pulueris 50 et aluminis 20 grana antecedenti ſimilem producebant ſolutionem.

EXPER. XXIV.

Grana 100 carbonum pulueris et 20 Aluminis grana limpidiorem adhuc reddebant ſolutionem.

EXPER. XXV.

Grana 200 carbonum pulueris et 20 grana aluminis ſolutionem omnis fere coloris expertem ſuppeditauerunt.

EXPER. XXVI.

Carbonum pulueris grana 300 cum 20 Aluminis granis limpidiſſimam aquae ad inſtar ſolutionem largiebantur.

Omnibus his tentaminibus (Exper. 17-26.) nitri cryſtallos affecutus ſum elegantiſſimas prorſusque albas, quarum praeſtantia prae iis, quae vno vel carbonum vel aluminis auxilio obtinentur, facillime dignoſci potuit.

Caeterum tentamina haec ſequentia docent:

1.) Alu-

1.) Aluminis adminiculo neceſſaria carbonum copia multo minor eſt, hincque totius operationis labor, ſiquidem miſcendorum accumulatio inde diminuitur, inſigniter ſublevatur.

2.) Pro adiiciendi aluminis copia maiore minor carbonum quantitas requiritur.

3.) Secundum tentamina 23 et 24. miſcendorum ea mihi proportio optima videtur, qua 100 nitri crudi partibus duae aluminis et 5 vel 10 adeo carbonum partes adduntur; qua ſcilicet proportione nitrum ſatis purum albiſſimumque obtinetur.

4.) Addita nimis parua aluminis quantitate, nigreſcit ſolutio, idque eo magis quo maior additur carbonum copia, cui quidem malo, niſi aluminis aliquantulum adhuc adiiciatur, (Exper. 18.) medelam afferre non licet.

§. 11. Ex omnibus hac in diſſertatione recenſitis tentaminibus carbonum in nitro crudo depurando vtilitas luculenter ſatis eluceſcit; dubitarique non poteſt, quin eorum applicatio etiam in nitri coctoriis, vbi magnae eius quantitates depurandae ſunt, locum felici cum ſucceſſu ſit habitura. Notandum tamen et id eſt, quod hoc in caſu ſingulari quadam filtri diſpoſitione opus ſit; quia additus nitro carbonum puluis haudquaquam in ſpumam abit, neque ideo officio ſuo functus ſimplici deſpumatione a lixivio ſeparari poteſt; qua tamen noua operatione, in depurando nitro crudo hactenus ſuperuacua, nitri coctores non eſt quod a carbonum vſu deterreantur. Iam enim additus ſolutioni

carbonum puluis id insigne commodum affert, vt liquor salinus eius auxilio absque vlla molestia per filtra lintea infra acuminata quam citissime et plane limpidus transeat.

§. 12. Magnae nitri crudi quantitatis depuratio, me quidem sentiente, sequenti modo suscipienda esse videtur:

Nitrum cum debita carbonum pulueris quantitate vna ingeratur in ahenum: Mistioni non nisi ea aquae copia superfundatur, qua opus est, vt solutio statim post primam ebullitionem ad crystallisationis punctum redeat; iam enim carbones tanta in partes nitri pingues celeritate agunt, vt continuata coctione hac in operatione opus non sit; statim ac liquor, soluto nitro, probe ebullit, filtratio suscipiatur, filtratusque latex in accommodatis huic fini vasis ad crystallisandum reponatur. Superstes in filtris carbonum pulvis, ne quid nitri pereat, sedulo elixivietur, quod lixivium valde tenue aquae simplicis loco ad soluendum aliud nitrum crudum proximae depurationi destinatum opportune adhiberi potest.

§. 13. Si cui forte artifici debita huic operationi carbonum quantitas nimis magna atque hanc ob caussam vtilitatis a carbonibus hoc in negotio exspectandae spes nulla videatur: alumen simul in auxilium vocari haud erit alienum, quod quidem additamentum, mea sententia, non vsque adeo nociuum est, vt nonnullis visum fuit. Tum enim carbonum copia longe minor scopo sufficiet, quae vero hoc in casu non nisi nitri solutioni cum alumine ab initio ei iam addito simul ebullienti addi debet, quam cautelam sequentem ob caussam necessariam esse, duco:

De-

Determinata carbonum quantitas non nisi certam partium nitri pinguium copiam destruere vel absorbere potest, quandoquidem partibus pinguibus iamiam saturati carbones in alias agere non possunt. Alumen porro in certas tantum, carboues in omnes plane partes pingues vim suam destructricem exserunt (§. 5.); modo sufficiente additi fuerint quantitate (§. 6. Exper. 7.). Atque hinc fit, vt carbonum puluis, si nitro intempestiue addatur, vno quasi impetu omnes obuias sibi partes pingues aggrediatur, hincque ad saturationis punctum ante reducatur, quam eas partes pingues, in quas aluminis nulla vis est, penitus destruxerit; si contra tunc demum, quando alumen officio suo penitus iam functum est, adiiciatur carbonum puluis; superstites ab aluminis vi partes pingues vi sua adhuc illibata et integra aggrediatur necesse est.

§. 14. Cum nitri crudi aliae atque aliae species alia quoque atque alia partium pinguium copia inquinentur: debitam pulueris carbonum adiiciendi quantitatem praeuiis in parua dosi instituendis tentaminibus explorari necesse est. Neque minus necesse est, si magna nitri quantitas depuranda sit, tentari ante, quam solutionis filtratio suscipiatur, exiguam lixiuii portionem, satisne iam depurata sit, nec ne, quo in casu maiori vel aluminis vel carbonum copia addenda opus est (Exper. 18.).

§. 15. Carbonum puluerem ipsum quod attinet, monendum est, operationem non nisi pulueris ope ex carbonibus, quam fieri potest, optime exustis praeparati succedere; praeterea multum quoque interest, sintne subtilissime an crassiori tantum modo in puluerem redacti carbones, quorum priori casu, in ratione auctae superficiei, augetur quoque in par-

partes pingues efficacia; adde, quod hanc ipſam ob cauſſam, quo ſubtilior puluis eſt, eo minore eiusdem quantitate ad deſtruendam certam partium pinguium copiam opus ſit.

§. 16. Inſigne laboris compendium et inde proficiſcitur, ſi nitrum crudum admodum impurum ante, quam eiusdem per carbones depuratio inſtituatur, aqua frigida abluatur a partibus pinguibus et heterogeneo-ſalinis ei externe tantum adhaerentibus.

§. 17. Praeter deſcripta hac in diſſertatione tentamina, permulta etiam alia inſtitui. Sic e. g. fuſcam nitri crudi ſolutionem, in paruas portiones aequales partitam, variis cum acidis, vitriolico, nitroſo, ſalino, aqua regia, porro cum magneſia vitriariorum tam pura quam acidis mixta; cum magneſia et alumine etc. tractaui. Docuerunt me quidem haec tentamina, acida, vitriolicum inprimis, ſimili fère, quo alumen modo, ſolutionis colorem diminuere; placuit mihi etiam magneſii cum aliquot olei vitrioli guttis mixti effectus. Sed aliis ex tentaminibus comparatiuis ſimul inſtitutis certo certius mihi perſuaſum habeo, carbonum puluerem ceteris additamentis plane omnibus palmam praeripere.

§. 18. Aluminis in partes nitri crudi pingues vim ſequenti modo explicari poſſe exiſtimo: Alumen acido quo abundat vitriolico praeſentia in nitro crudo ſalia terrea aggreditur; atque hinc expulſa ex iis acida nitri et ſalis aquam regiam conſtituunt, et vi ſua dephlogiſticatrice partes pingues ex parte deſtruunt.

§. 19. Quae in praecedentibus diſſerui, hic ſummatim obtutui expoſuiſſe non erit alienum:

1.) Ni-

1.) Nitrum crudum ſi absque vllo additamento depurari debeat; ad minimum ternis ſolutionibus et cryſtalliſationibus (Exper. 1.) opus eſt.

2.) Alumen inſignem quidem in partes nitri pingues effectum exſerit, vna tamen coctione nitrum efficere album neutiquam valet. (Eper. 3. 4. 5.).

3.) Vnius aluminis abundantiſſime licet additi auxilio, nunquam tamen ſolutioni omnis color demitur. (Exper. 4.).

4.) Vna carbonum pulueris pars 10 nitri crudi partibus addita, ſimilem prorſus, ac alumen, effectum praeſtat (Exper. 12.).

5.) Vna carbonum pulueris parte 5 nitri crudi partibus addita, vna coctione albas nitri cryſtallos conſecutus ſum (Exper. 15.).

6.) Carbonum pulueris 5 partes 6 nitri crudi partibus additae ſolutionem ſuppeditant coloris plane omnis expertem (Exper. 7.).

7.) Carbonum puluis et alumen, ſi nitro depurando binae hae ſubſtantiae iunctim adhibeantur, in partes pingues longe maiori efficacia, quam earum vtraque ſeparatim, agunt (Exper. 17.).

8.) Carbonum efficacia augetur pro maiori addita aluminis quantitate.

9.) Nimis parua aluminis copia largiori carbonum addita, liquorem nigreſcentem praebet, cui moleſtiae addenda maiori aluminis quantitate mederi licet (Exper. 18.).

10.) Duabus aluminis et 30 carbonum pulueris partibus, ſolutio 100. nitri noſtri crudi partium omnem prorſus colorem exuit. (Exper. 26.).

11.) Duabus aluminis et 5 vel adeo 10 carbonum partibus, 100. nitri crudi partibus additis, ſolutionem non prorſus quidem limpidam, ſed nitrum tamen ex ea album plane et ſplendidiſſimum conſecutus ſum (Exper. 23. 24.).

12.) Aluminis in locum, vitriolicum acidum, ſi nitro cum carbonibus ſimul additur, ſuccedere poteſt (§. 17.).

Tentaminibus meis ad finem iam perductis, Clar. Prof. Gadolini eodem de argumento tentamina, annalibus chemicis Cl. Crellii inſerta, legere mihi contigit; *) Clmo Gadolino proceſſus hic cum carbonum pulueris copia longe minori, ac mihi quidem, ſucceſſit, ita vt ex nitri crudi libra vna auxiliantibus 10 tantum carbonum pulueris drachmis albas prorſus cryſtallos eſſet conſecutus; et ſolutioni quatuor carbonum vnciis colorem plane omnem demi poſſe deprehenderet; ex quo faciliori ſuceſſu videre eſt, nitrum crudum Clmi Gadolini partibus pinguibus multo, quam quidem id, quo ego vſus ſum paucioribus inquinatum fuiſſe.

Atque nunc quidem dubii propemodum nihil ſupereſt, quin carbonum puluis in nitri crudi depuratione magna quoque quantitate inſtituenda, egregium vſum allaturus ſit, eumque certiorem et commodiorem, ſi aluminis cum carbonibus connubio operatio perficiatur.

LA-

*) Crells chymiſche Annalen 1791. B. 1. S. 518.

LAPIDIS CORNEI LAMELLOSI NOVA SPECIES.

Auctore

BASIL. SEWERGIN.

Conuentui exhib. die 23 Maii 1793.

§. 1.

Lapidis a Confil. aulic. Laxmanno nuper iuxta litus Baikalienfis lacus detecti atque muſaeo noſtro academico impertiti indoles ne adhucdum quidem ita denudata eſt, vt nobis nullus de ea ſcrupulus ſuperſit; quae me praeſertim cauſa ad curatiorem omnium eius characteriſticarum notarum proprietatumque contemplationem impulit, vt eo tutius ei locum in ſyſtemate mineralogico aſſignare poſſimus.

Prima illius fruſta circiter anno 1790 innotuerunt. Communiter haec memorabilis lapidum ſpecies nunc in ſquamoſo, nunc vero in romboidali ſpatho calcareo flauescente occurrit, atque ei plerumque arcte iuncta eſt, qui praeterea micam continet vel lamelloſam, pyramidalem vel romboidalem, magnitudinis $\frac{1}{2}$, 1, 2 et plurium pollicum, nonnunquam elegantiſſimam druſae formam praebentem.

Iam inde ab initio haec lapidum ſpecies nota erat ſub nomine *Schoerli*; mox eam *Corneum lamelloſum cryſtalliſatum* nuncupare ſolebant; denique vero nouo eam nomine *Baikalitae* quidam e mineralogis Roſſicis deſignarunt. Quod nomen ei maxime conueniat, nunc ſollicite disquirendum eſt, expoſitis primo notis eius ac proprietatibus.

Notas mihi externas, niſi me omnia fallunt, ſequentes in illo lapide obſeruare licuit: Color eſt griſeo-virideſcens vel oliuaſceus; figura plerumque regularis columnaris 4 ad 7 vsque lateribus inordinatis terminata (cryſtallo 7 lateribus inſtructa plerumque 4 latera prae aliis latiora praebente); cryſtallus columnaris interdum pyramidata; ſuperficies columnarum laeuis, rariſſime per longitudinem ſtriata; ſuperficies ad inſtar vitri ſplendens, interne vero non niſi aegre, et quaſi pinguedine obducta ſit, nitens; textura anguloſo-conchoidea, confuſa atque rimis tenuiſſimis interſecta; in fragmenta mediocriter ſcindentia figurae indeterminatae dehiſcit; omnino non diaphanus eſt, vel in tenuiſſimis tantum particulis aliquot radios transmittit; cultro raſilis, colore a raſura ex albo cinereo; vitrum tamen ſcindit ac chalybe percuſſus ſcintillas quamuis ſparſim prouocat; communiter non valde eſt compactus et linguae non adhaeret. Cryſtalli eius ſolitariae, vel forma Druſae coarctata, paruae, ad longitudinem 2 pollicum et latitudinem 1 pollicis et amplius nonnumquam adcreſcentes.

Grauitas ſpecifica ad aquam eſt vti 3200 : 1000.

Cum acidis ipſemet propria natura atque vi non efferueſcit, attamen hoc ob quasdam admixtas ei fortuito atque occultis eius rimis incluſas particulas calcareas nonnumquam fieri poſſe, libens concedo.

Igne

Igne rubeſcit et auctо illius gradu per ſe funditur et in vitrum abit compactum coloris ex viridi nigreſcentis.

Per analyſin chemicam a clariſſ. Profeſſore Lowitz cum ea inſtitutam mihique benigne impertitam in centenaria eius maſſa latent 44 partes terrae ſiliceae, 30 terrae talcoſae (magneſialis), 20 calcareae et 6 calcis ferri vſti.

Inde patet 1.) eum peculiare nomen Baikalitae neutiquam mereri, cum nec vllis proprietatibus peculiaribus, nec ignotis hucusque partibus conſtitutiuis gaudeat, atque optandum eſt, vt nomen illud omnino obliuioni daretur, nil enim adeo mineralogiae nocuum eſt, quam noua ſine vlla vrgente neceſſitate data nomina. 2.) Ad ſchoerlum referri eum non poſſe, cum neque duritie, neque nitore, neque extrinſecus, dum frangitur, nedum partibus conſtitutiuis ſchoerlo ſimilis ſit, verus enim ſchoerlus cultro non eſt raſilis, in fractura vitri inſtar ſplendet, ac ne vnum quidem ego ſchoerlum inter illos, quos celeberrimi viri Wiegleb *a*) De Sauſſure *b*) Bergmann *c*), Bindheim *d*), Kirwan *e*), Klaproth et Herrmann examinarunt, inuenio, cui ſicuti hac in ſpecie pars argilloſa prorſus deeſſet.

Contra vero, meo iudicio, potiori iure ſpecies haec *corneus lamelloſus columnaris* (Säulenförmige Hornblende, ſтолбчеQq 3

a) Chemiſche Annalen 1. B. 1. St. pag. 21. 1775. — 1. B. 3. St. pag. 246. Beyträge zu den chemiſchen Annalen, 1. B. 4. St. 1786, pag. 21.

b) Voyages Tom. II. Baſaltes acerоſus.

c) Opuſcula Vol. III. pag. 201.

d) Schriften der Geſellſch. Naturforſch. Freunde. 3. Th. S. 452.

четая роговая бленда) nominari poteſt, nam et colore et nitore et duritie atque tam in fracturae loco, quam partibus conſtitutiuis ſimilibus iis praedita eſt, quibus corneus lamelloſus (Hornblende) ſaepiſſime gaudet, quoniam per analyſin chemicam a cel. Viegleb cum vero corneo lamelloſo inſtitutam, hic perinde ac noſtra ſpecies terrae ſiliceae grana 49, calcareae 20, talcoſae 21, et calcem ferri continet.

EXPE-

EXPERIMENTA NOVA CRYSTALLISATIONEM ALCALIVM CAVSTICORVM SPECTANTIA.

Auctore

TOBIA LOWITZ.

Conuentui exhib. die 30 Maii. 1793.

§. 1.

Alcalia cauſtica in cryſtallos abire poſſe, omnes hucusque peritiſſimi quoque chemici plane negauerunt. Cl. D. Dehne anno 1777 primus inuenit, alcali vegetabile cauſticum cum alcohole vini tractatum, in cryſtallos coire *a*). Poſtea et Cel. Bertholet obſeruationis a Cel. Dehne factae inſcius, dum ſpiritum vini ſuper alcali cauſticum deſtillatione abſtraxiſſet, eandem cryſtalliſationem obſeruauit *b*). Duorum horum virorum peritiſſimorum obſeruationibus non obſtantibus, ad hodiernum vsque diem ceteri chemicorum clariſſimi, ſitne ea vera alcali cauſtici cryſtalliſatio, nondum extra omnem dubitationis aleam eſſe poſitum arbitrantur, ſiqui-

a) Diſſertatio de tinctura antimonii acri concentrata. 1779. Edit. ſecunda. 1784.

b) Memoire de l'Academie royale des Sciences a Paris pour 1783. p. 408—415. et Crells chemiſche Annalen 1786. B. 2. S. 211. und 1789. B. 1. S. 542.

ſiquidem ea vel acidi aërei vel aliarum quarumdam partium heterogenearum acceſſui adſcribi poſſe videatur. Neque dubia haec, ſi rem probe perpendimus, exigui momenti ſunt, notiſſimum enim eſt, ſpiritum vini ab alcali cauſtico deſtrui, neque minus conſtat, deſtructionem chemicam ſine acceſſu cuiusdam partis conſtitutiuae corporis deſtruendi ad ipſum corpus deſtruens accidere nullam; cum itaque alcali cauſtici cryſtalliſatio non niſi ſpiritus vini ope hucusque ſucceſſiſſet: nullo modo vituperandi ſunt, qui cryſtalliſabilitatem huius ſalis adhuc in dubium vocauerunt, quia ſpiritus vini deſtructi partem quandam ad alcali acceſſiſſe iure pertimeſcere debuerunt.

Atque huius ipſius rei cauſſa Cl. Richter docuit, alcalia fixa cauſtica via ordinaria haudquaquam cryſtallos formare poſſe *a*); Cl. Gren cryſtalliſabilitatem eorum prorſus negat *b*); ipſe peritiſſimus Wieglebius experimentis Bertholetianis labem nonnullam ineſſe perſuaſum ſibi habet *c*); affirmante Cl. Gmelin alcali fixum cauſticum in cryſtallos coire nequit *d*); docente Cl. Succov lixiuium cauſticum, ſi euaporatur, nullas prorſus cryſtallos format *e*); aliisque clariſſimorum chemicorum de hoc argumento ſententiis hic exponendis eo lubentius ſuperſedeo, quo magis eae, quas attuli, oſtendunt, alcalium cauſticorum cryſtalliſabilitatem magnis hucusque tenebris inuolutam fuiſſe.

§. 2.

a) Richters Lehrbuch der Chemie. 1791. §. 280.
b) Grens Syſtematiſches Handbuch der Chemie. 1787. Th. 1. §. 259.
c) Wieglebs Geſchichte des Wachsthums in der Chemie in der neuern Zeit. 1791. B. 2. S. 318.
d) Gmelins Grundriß der allgemeinen Chemie. 1789. §. 542.
e) Succovs Anfangsgründe der ökonom. techniſchen Chemie. 1784. §. 520.

§. 2. Salium omniumque eorum proprietatum cognitio maximi certe in omni chemia momenti eſt: et quotiescunque proprietatem corporis cuiusdam nouam detegimus; ſperare iure licet, fore, vt inde vtilitas aliqua ſit redundatura; quia vix ac ne vix quidem vlla datur corporum proprietas, quae applicationem vtilem admittat plane nullam; id quod omnium minime in corporibus ſimplicibus, qualia acida ſunt et alcalia, obtinet. Haec ſi probe perpendimus, occaſionem, corporum nouas proprietates detegendi, praetermittere nullam oportet: ſaepiſſime enim accidit, vt ex detecta quadam proprietate, initio momenti quamuis parui viſa, poſtea tamen inſignis vtilitas redundauerit.

Cum ex aliquo iam tempore cum ſalibus generatim ſpectatis varia permultaque ſuſcepiſſem tentamina; fieri non potuit, quin de alcalibus quoque cauſticis et inprimis de cryſtalliſatione ipſorum meditarer; neque enim mihi quidquam magis in votis erat, quam vt certiſſimam huius rei cognitionem obtinerem.

§. 3. Lixiuium cauſticum, expulſis euaporatione omnibus partibus aquoſis, lente refrigeratum, in maſſam ſolidam conuertitur, quae in fractura ſua ſtructuram cryſtallinam ſtriatam exhibet. Hoc non modo phaenomenon intuens, ſed inprimis etiam ſupra laudatas Clariſſimorum Dehne et Bertholet obſeruationes perpendens ita ſenſi, vt nullus plane dubitarem, alcalia fixa cauſtica per ſe quoque, id eſt ſine vlla additione, in cryſtallos coire poſſe.

§. 4. At vero huius rei praecipua in eo potiſſimum difficultas cernitur, quod lixiuia cauſtica, licet ab initio praeparationis ipſorum aëre fixo quam perfectiſſime liberata

fuerint; tamen inter euaporationem ad debitam ſpiſſitudinem vsque, inſignem acidi aëris quantitatem ex aëre atmoſphaerico de nouo attrahunt; alia quoque huius rei difficultas inſigni horum ſalium liqueſcendi, id eſt, aëris humiditatem attrahendi facultate nititur; quibus tamen omnibus non obſtantibus, experimentis meis eo vsque perueni, vt alcalium cauſticorum cryſtalliſatio aeque fere facile, ac ea aliorum ſalium, ſemper mihi nunc ſuccedat.

§. 5. Prima hac de re tentamina cum alcali vegetabili ſequenti modo ſuſcepi.

Ex 20 alcali vegetabilis depurati libris modo conſueto cum calce viua lixiuium cauſticum praeparaui. Lixiuium hoc in aheno coctione ad cuticulam vsque euaporaui. Poſt lentam refrigerationem multitudo in eo oriebatur cryſtallorum alcali aërati. Lixiuium ſuperſtes per ſaccum linteum a dictis cryſtallis ſeparatum, ſecundae evaporationi ad cuticulam vsque ſubiectum ſimiles adhuc ſed pauciores cryſtallos ſuppeditauit. Lixiuium hoc nunc admodum turbidum, vt depuraretur, in lagena probe clauſa per aliquot dies quieti expoſui; ſeparatis omnibus ſordibus, liquorem clarum quidem illum ſed valde fuſci coloris, a ſedimento nigreſcente caute decantatum denuo euaporationi in vaſe vitreo ſubieci. Apparente cuticula ſalina, ſtatim ignem remoui; attamen, ne ſubito frigeſceret, liquorem per noctem in arenae balneo reliqui. Praeterlapſa nocte liquorem maxima ex parte in cryſtallos duplicis indolis et formae concretum deprehendi, quarum alterae cum acidis efferueſcentiam, alterae nullam excitabant: illis priſmatica, his vero forma fuit quatrangularis lamelloſa. Ceterum lamelloſae hae cryſtalli verum alcali cauſticum ſiſtentes, tam magnitudine quam pel-

lu-

luciditate nec non quantitate longe praecellebant illis acidum aëreum complectentibus. Haerens inter cryſtallos lixivium, tepidum adhuc aliquantum, decantaui, et in vitro charta probe obturato in locum quietum frigidumque repoſui. Per nychthemeron circiter ſesqui librae in eo adhuc concreuerunt cryſtallorum aëre fixo plane carentium, ſed formae ab ea priorum prorſus diuerſae, ita vt ſingulae cryſtalli figuram octaëdri ſiſterent, ſed miro modo apicibus pyramidum cohaererent; quamlibet diceres cryſtallum ſeſe inſerere aut potius abire inſigni parte binorum ſuorum cacuminum in cacumina contiguarum adnatarumue, ſeriemque earum nexu continuo perticam exhibere, in medio e craſſioribus compoſitam cryſtallis, verſus apices in minores gradatim definentem. Decantato liquore ſuperſtite, cryſtallos has cum prioribus coniunctim parca aqua pura diſſolui, atque ſolutionem turbidam ſed longe, quam antea, minus coloratam, ſeparatis particulis liquorem turbantibus, denuo euaporationi ad cuticulam vsque lento arenae igne ſubieci. Refrigerato liquore, in cucurbitae fundo cryſtalliſationem priſmaticam nitro ſimilem alcali aëratum exhibentem deprehendi. Cryſtallis his e lixiuio exemtis, iterata euaporatione, poſt lentam in arena refrigerationem admodum ſingularem pulcherrimamque cryſtallorum alcali cauſtici puriſſimi concretionem obtinui, inque alcali aërati ne veſtigium quidem vllum deprehendi. Apparuere videlicet pellucidiſſimae laminae, lamellis glaciei ſimiles, quae reperiri ſolent, dum aquae ſuperficies frigore adſtringitur; dictae lamellae notatu quam digniſſimae ſunt, ob eximiam magnitudinem, qua aliis cryſtallis praecellunt, ab vno enim cucurbitae pariete ad oppoſitum vsque ſeſe extendunt, aliae fundo vaſis impoſitae ad ſuperficiem liquoris aſſurgunt; aliae per alias quaſi non interruptae tranſeunt earumque copia mutua marginum cohae-

rentia vaſcula format ſatis arcta, vt clauſus in illis liquor effluere nequeat, vaſe vtcunque inclinato, quin inuerſo, et agitato, niſi vi perforentur iſta vaſcula fluidoque iis contento exitus paretur; non raro duas liquoris vncias ea continere vidi. Mirificae hae cryſtalli a ſuperſtite lixiuio ſtudioſe ſeparatae et parua aquae copia quam citiſſime ablutae, puriſſimum exhibebant alcali cauſticum ne hilum quidem aëris fixi continens, ſeparatus ab iſtis cryſtallis liquor in locum frigidum deportatus octaedricas iterum largiebatur cryſtallos.

His tentaminibus multoties iteratis, compertum mihi habeo, lamelloſas alcali cauſtici cryſtallos ſemper naſci, dum cryſtalliſatio in calore, pyramidales vero dum in frigore contingit.

§. 6. Cryſtalliſationis huius phaenomena demonſtrare videntur, aërem fixum ex aëre atmoſphaerico euaporationis tempore lixiuio cauſtico denuo ſeſe miſcentem, etſi per totam lixiuii maſſam ſolutionis cauſſa aequabiliter diffunditur, non tamen niſi determinatam alcali copiam, ſuae proportionalem, ligare; hancque alcali partem aëratam, quae vtique ſal exhibet ab ipſo alcali cauſtico toto coelo diuerſum, lixivio ad cryſtalliſationis punctum redacto, a reliqua alcali cauſtici parte aëre fixo non imbuta ſecedere et in proprias prorſus concreſcere cryſtallos, quae a ceteris ſimul concreſcentibus cryſtallis purum alcali cauſticum exhibentibus tam forma quam proprietatibus longe diſcrepant. Si lixiuium cauſticum inter euaporandum largam aëris fixi copiam attraxit, tum, modo euaporatio caute inſtituatur, in prima cryſtalliſatione non niſi vnicum alcali aëratum in cryſtallos coit; quia hoc ſal maiorem aquae ſolutionis quantita-

titatem poſtulat, quam alcali cauſticum; poſt ſecundum lixiuii a prioribus cryſtallis aëratis decantati euaporationem non raro cryſtalli alcali aërati et non aërati mixtae concreſcunt; tertia demum cryſtallorum concretione vnicum obtinetur alcali cauſticum.

§. 7. Monendum quoque eſt, cryſtallorum horum depurationem, ne interea denuo acidum aëreum attrahant, omnium optime ſequenti modo inſtitui poſſe: Cryſtalli dictae vnica lotione a lixiuio flauo iis adhaërente liberatae, pauca aqua ſoluantur, ſolutioque euaporetur ad cryſtalliſationis punctum vsque, quo facto, lixiuium calidum adhuc vitro anguſtioris orificii operculo claudendo infundatur et in locum temperatum quiete deponatur: ortis cryſtallis, lixiuium ſuperſtes in aliud vitrum decantetur. Transfuſiones hae poſt quamcunque cryſtallorum concretionem tam diu repetantur, vsque dum nullae amplius cryſtalli concrescant, id quod tunc demum contingit, quando liquor maximo iam frigori expoſitus fuerit; ex quo videre eſt, huic cryſtalliſandi methodo inprimis hyemale tempus fauere. Hocce modo cryſtalli octaedricae in vitrorum fundo quam pulcerrimo ſerierum ordine, apicibus inter ſe inuicem nexae concrescunt. Humiditas poſt ſuperſtitis liquoris decantationem cryſtallis adhuc adhaerens vt guttatim defluat, aërisque et humores et acidum aëreum ſecum vehentis vt interim arceatur, quantum fieri poteſt, acceſſus omnis, vitrorum ſal continentium orificia charta foraminulis perforata obturentur, aliisque vitris cylindricis inuerſa immittantur: ſimul ac nihil iam liquoris in vitra ſuppoſita defluit; cryſtalli albiſſimae pauciſſima quantum fieri poteſt aquae deſtillatae copia ſoluantur. Solutionesque initio turbidae vel lactescentes in vnum vitrum probe obturandum confun-

dantur et quieti relinquantur, vsque dum liquor lenta fordium ſeparatione clarus prorſus euadat, quo facto, limpidus liquor a ſedimento caute in aliud vitrum decantetur. Hocce modo puriſſimum nec non concentratiſſimum et aquae ad inſtar limpidiſſimum habebis lixiuium cauſticum, quo, quantum equidem memini, nemo chemicorum hucusque potitus fuit.

§. 8. Proprietates cryſtallorum alcali vegetabilis cauſtici quod attinet; eae potiſſimum ſunt ſequentes:

1.) Acido nitri immerſae cryſtalli absque vllo efferuescentiae motu initio in ſuperficie albeſcunt, deinde cum calore placide diſſoluuntur.

2.) Cryſtalli probe depuratae, in aqua ſolutae ſolutionem limpidiſſimam absque vllo colore ſuppeditant.

3. Quinque aquae frigidae partes 18 cryſtallorum horum partes recipiunt.

4.) Spiritus vini rectificatiſſimus, absque caloris adminiculo, cryſtallorum harum quantitatem, ſuae aequalem, libentiſſime diſſoluit. Spiritui iam ſaturato ſi plures addas cryſtallos, in liquorem quidem ſoluuntur eae, ſed qui fundum occupat, absque vllo cum ſupernatante ſolutione ſaturata connubio. Solutio haec ſpirituoſa initio prorſus limpida pededentim magis magisque flaueſcit et per aliquot tempus e rubro colore in fuſcum abit, id quod euidentiſſime alcali cauſtici vim deſtructricem, qua in ſpiritum agit, demonſtrat.

5.) Na-

5.) Naphtha vitrioli harum cryſtallorum plane nihil recipit; abeunt eae in liquorem naphthae fundum occupantem.

6.) Aëri libero expoſitae cryſtalli humorem auidiſſime attrahentes breui deliqueſcunt.

7.) Octaëdricae cryſtalli, licet in probe clauſis vitris aſſeruentur, minimo tamen calore naturali liquefiunt; lamelloſae vero, ob parciorem cryſtalliſationis aquam, in probe clauſis vitris permanentes ſunt.

8.) Octaëdricae cryſtalli 43 aquae cryſtalliſationis partes in centenario continent.

9.) Pulſa cryſtalliſationis aqua, in tigillo igne fuſae, lapidem cauſticum albiſſimi coloris largiuntur.

10.) Octaëdricae cryſtalli, dum aqua ſoluuntur, inſigne gignunt frigus; dum e contrario lamelloſae calorem producunt: quae ſingularis proprietas, mea quidem ſententia, maiori aquae cryſtalliſationis quantitate, qua priores cryſtalli prae lamelloſis gaudent, nititur; conſtat enim, lapidem cauſticum, omnis aquae expertem, cum aqua ſatis magnum calorem excitare.

11.) Inter omnes alcali vegetabilis cauſtici cryſtalliſati proprietates memoratu digniſſima haec eſt, quod in puluerem redactae noſtrae cryſtalli cum niue recente et ſicco commiſtae prae omnibus hucusque notis mediis frigus artificiale producentibus longe vehementiſſimum frigus excitant, ita vt eius ope mercurius vivus eiusque adeo magna quantitas et in ipſo conclaui calefacto quam facillime coagulari queat, quod experimentum cum 12 mercurii vivi libris mihi ſucceſſit,

ceſſit, quas in vnam maſſam ſolidam congelaui, idque in conclaui cuius temperies 128 graduum ſcalae Des l'Islianae erat. Maximum quod hucusque huius ſalis ope excitaui frigus 225 graduum fuit: ſed ſpero, fore, vt, accedente inſuper intenſo frigore hyemali, frigoris artificialis gradum iſto, quem dixi, etiam maiorem producere mihi liceat.

12.) Cryſtalli hae in puluerem redactae et cum ſale Glauberi contrito mixtae in conclaui tepido frigus 165 graduum excitant.

§. 9. Tentaminibus meis cum alcali fixo vegetabili ad finem perductis, alcali minerale adgreſſus ſum; cuius quidem cryſtalliſationem ea alcali vegetabilis faciliorem eſſe, fortaſſe ſuſpicari liceret; rem tamen aliter ſe habere, egomet ipſe vidi.

Libras ſex ſodae depuratae ope calcis vivae modo conſueto aëre fixo omni penitus liberaui, ita vt obtentum inde lixiuium caufticum vllius cum acidis efferveſcentiae ne veſtigium oſtenderet. Lixiuio hoc in vaſe vitreo ad remanentiam ſex circiter librarum euaporato, ſuperficies omnis cryſtallina ſeſe cuticula induit; qua viſa, omnia, vt lente refrigeſcerent, in arena dereliqui: neque tamen poſt refrigerationem, praeter exiguam ſedimenti ſalini puluerulenti quantitatem, vllae apparuerunt cryſtalli, hocque ſedimentum non minus quam cuticula iſta, acidis exploratum alcali aërati indolem prodidit. Latex decantatus inter euaporandum ſimilem formauit cuticulam cum acidis efferueſcentem, et poſt refrigerationem ſimile quoque ſedimentum dedit puluerulentum. Omnia haec toties vſu venerunt, quoties ſeparatum a cuti-

cuticula et ſedimento lixiuium nouae expoſui euaporationi, ita vt poſt aliquot hebdomadum interuallum, inſtante iam hyëme, non niſi duae lixiuii librae remanſerint. Atque nunc lixiuium frigori 167 graduum expoſitum per omnem fere maſſam ſuam in cryſtallos prismaticas, purum alcali cauſticum, cum acidis non efferueſcens, referentes, abiit: ſed cryſtallos has, quamuis lixiuium ſuperſtes in frigore ab iis decantauerim, leuiſſimo tamen hypocauſti calore quam citiſſime liquefieri vidi. Hicce liquor denuo aliquantulum euaporatus frigorique expoſitus in continuam ſolidam concreuit maſſam ſalinam ſtriatam. Totius maſſae huius aliquam partem ſeparatim in loco frigido aſſeruaui, reliquam, addita perparua aquae quantitate, calore modico diſſolui, ſolutionemque temperiei modice frigidae expoſui; tum tepidae adhuc addidi aliquantulum aſſeruatae in loco frigido maſſae ſolidae, cuius in ſuperficie breui poſt tempore cryſtalli inchoabant formari, et praeterlapſis aliquot horis non ſine voluptate magnas et perpulcras alcali mineralis cauſtici cryſtallos conſecutus ſum, referentes quadrata tabellaria angulis detruncatis. Cryſtalli hae hyemali tantum tempore haberi poſſunt; quia a minimo iam calore naturali, 130 nimirum graduum, liquefiunt. In conclaui calefacto per totam ſuperficiem vndique puluere albo obducuntur, ac ſi fateſcerent; dum intus ſane in liquorem transmutantur, qui quidem exitum ſibi parat et effluit, ſed dicti tegumenti formam integram atque illaeſam finit eſſe ita, vt tandem tegumentum cryſtallus caua nuncupari queat, quod ceteroquin nihil niſi alcali aëratum eſt.

§. 10. Si quis ſciſcitari vellet, vnde fiat, vt alcali minerale aëratum, alias quam facillime in cryſtallos magnas concreſcens, hoc in caſu non niſi pulueris et cuticulae for-

ma a lixiuio cauſtico ſeparetur; ſcito hocce phaenomenon mea opinione ita explicandum eſſe: conſtat, ſodam aëratam inter cryſtalliſandum multum cryſtalliſationis aquae recipere; nouimus quoque, partes ſalinas ſodae aëratae aquam iſtam non niſi admodum leuiter retinere ita, vt eam in aëre libero ſua ſponte amittat, indeque fateſcentiam ſodae cryſtalliſatae prouenire; ſoda vero cauſtica tam auida eſt aquae, vt eam non ex aëre tantum ambiente attrahat, ſed aliis etiam ſalibus eripiat. Cum porro ſal omne ad formandas cryſtallos certam aquae quantitatem, ſine qua in cryſtallos coire nequit, exigat; facile perſpicitur, partes alcalinas aëratas in lixiuio cauſtico contentas nullo modo in cryſtallos abire poſſe; quia concentratum iam iam lixiuium cauſticum aquam, qua ad cryſtalliſationem opus eſt, acceſſu ad partes aëratas pertinaciter prohibet; quo fit, vt pars alcalina aërata, quae cryſtalliſationis aqua potiri nequit, non niſi pulveris et cuticulae forma a lixiuio cauſtico ſecedere queat; et reuera ſi puluis hic et cuticula, a lixiuio cauſtico ſeparati, aqua pura ſoluuntur, ſolutioque ad cryſtalliſationis punctum euaporatur; tum demum poſt refrigerationem in conſuetas alcali mineralis aërati cryſtallos concreſcunt.

§. 11. Haud alienum erit, facti cuiusdam in ſodae depuratione non raro accidentis mentionem facere, cuius ratio e ſupra dictis (§. 10.) intellectu facilis eſt.

Saepe nimirum, dum ſodae Hiſpanicae depurationem ſuſcepiſſem, accidit, quod vtique aegre non ferre non potui, vt lixiuium eiusdem nullo modo cryſtallos formaret; ſed inter euaporandum continuo cuticula ſalina ſe indueret, quae, cum euaporationi impedimento ſit, perpetuo vi rumpi et in fundum detrudi vel eximi debuerit. In lixiuio vero, poſt

poſt dictam cuticulae formationem frigori expoſito, nullae cryſtalli concreſcunt, licet euaporatio fere ad ſiccitatem vsque continuata fuerit. Hocce in caſu nihil aliud ſupereſt medii, quam vt cuticulam hanc ſtudioſe et patienter colligas, vsque dum latex valde cauſticus et impurus remaneat; quo facto, collectum hoc ſal, cuticulae forma a lixiuio ſeparatum et ſtatim aqua frigida ablutum ſoluendo, euaporando, et refrigerando in conſuetas denique alcali mineralis depurati cryſtallos concreſcet. Huius phaenomini ratio diu me fugit; nunc vero, tentaminibus meis, iisque quae in antecedente paragrapho dixi, eam in praeſente in ſoda parte cauſtica latere edoctus ſum.

§. 12. E digreſſione hac ad alcali mineralis cauſtici cryſtalliſationem regredior. Cryſtalliſatio haec, vti ex deſcripto tentamine (§. 9.) vidimus, maiori difficultati ſubiecta eſt, quam ea alcali vegetabilis; neque etiam, niſi frigidiori tempore ſuccedit; inueni ſcilicet, eam ad minimum temperiem 140 graduum poſtulare; nec in calidiore temperatura, praeter maſſam continuam ſtriatam, artificio vllo cryſtallos regulares obtinere potui.

Licet permultum temporis tentaminibus hiſce impendere fuerim coactus: attamen cognito nunc totius rei artificio, longe breviori ſpatio omne hoc negotium abſolui poteſt.

Lixivium nimirum alcali cauſtici mineralis coctione continua eousque euaporetur, et cuticula, quam dixi, ſalina interea ſubinde rumpatur, donec guttula exemta corporique cuidam frigido impoſita penitus coaguletur; quo viſo, lixiuium a ſale aërato ad fundum collecto colatione ſepa-

retur, et aliqua eiusdem pars frigori exponatur, reliqua vero eaque maior pars admodum parua aquae quantitate diluatur, iuſtaeque temperiei exponatur, et antequam penitus frigeſcat, addatur ei portiuncula coagulatae loco frigido maſſae ſalinae, quae, cum facile fieri poſſit, vt ſoluatur, noua ſemper addenda eſt, donec in ſuperficie eiusdem initium formationis cryſtallorum cernatur. Decantatum poſtea a cryſtallis lixiuium, addita denuo maſſae ſalinae portione aliqua, frigori priore maiori exponatur; haecque omnia toties repetantur, donec nullae iam cryſtalli oriantur, id quod tum demum accidit, quando lixiuium ſucceſſiue quam maximo frigori expoſitum fuerit.

§. 13. Alcalium cauſticorum cryſtalliſatio hanc imprimis vtilitatem affert, vt eius vnius ope ſalia haec ſtatu quam puriſſimo exhiberi queant, non ab omni tantum aëre fixo, ſed ab omnibus etiam aliis heterogeniis particulis liberata, quibus lixiuia cauſtica ordinario modo parata ſemper inquinata eſſe, conſtat; cum enim lixiuia haec euaporatione ad certum concentrationis gradum redacta nunquam non admodum fuſco colore ſe induant; noſtra alcalia reiteratis cryſtalliſationibus depurata, parca aqua ſoluta, ſolutionem concentratiſſimam ad inſtar aquae limpidiſſimam, omnis coloris prorſus expertem, et cum acidis ne minimum quidem efferueſcentem ſuppeditant. Cum menſtruorum et reagentium chemicorum puritas in experimentis et inueſtigationibus chemicis inſtituendis ſummi ſane momenti ſit; non dubito, alcalium cauſticorum cryſtalliſandi facultatem, tentaminibus hac in diſſertatione relatis extra omnem dubitationis aleam poſitam chemicis ideo quoque acceptam et gratam fore, quia praeſtantiſſimam eamque vnicam ſalium horum depurandorum methodum affert.

§. 14.

§. 14. De alcali volatili cauſtico reſtat, vt verba quoque faciam. Notum eſt, omnes chemicos cryſtalliſandi facultatem huic ſali vno ore plane denegare et liquorem hunc frigore nullo conſtringi poſſe, aſſeuerare. Cryſtalliſationem huius ſalis via ordinaria nullo modo fieri poſſe, revera dubitari nequit; ſiquidem eximia illius volatilitas nec eiusdem cum aqua cohaeſio, ſine qua ſubſtantia haec non niſi ſub aëris forma ſubſiſtere poteſt, impedimenta vix ſuperanda huic negotio opponunt. Cum vero caloris materia in genere princeps liquiditatis corporum et volatilitatis cauſſa ſit; quem effectum artificiale frigus hac in re ſit productarum, experiendum eſſe, putaui, idque eo magis cum alcali vegetabile cauſticum cryſtalliſatum cum niue mixtum, teſtantibus permultis meis tentaminibus, prae omnibus aliis hucusque cognitis mediis, frigus artificiale producat intenſiſſimum (§. 8. n. 11.). Hoc ſine quam fortiſſimum paraui ſpiritum ſalis armoniaci cauſticum, qui cum acidis ne minimam excitauit efferueſcentiam; duas huius ſpiritus alcalini vncias in vitro cylindrico, dictae miſtioni frigoris 225 graduum genetrici immerſi et breui tempore omnis hic liquor penitus congelatus eſt, ad inſtar ſolutionis ſpermatis coeti in oleo therebinthinae.

§. 15. Haud diffiteor, me initio valde haeſiſſe dubium, coagulatio haec ſitne partium aquearum congelationi, an ſalinarum cryſtalliſationi adſcribenda: attamen quae obſeruaui ſequentia vltimae potius opinioni fauere videbantur:

1.) Coagulatae huius maſſae odor propemodum nullus fuit: at vero, ſi partes tantum aqueae congelatae fuiſſent; tum neceſſario odor partium ſalinarum concentratione augeri debuiſſet.

2.) Inter liqueſcendum vltimae particulae nondum liquefactae fundum liquoris petebant. At vero in glacie contrarium obtinere conſtat.

3.) Coagulum hoc maſſam cryſtallinam quaſi celluloſam refert, cuius interſtitia liquor non coagulatus occupat: at vero hicce liquor, ſi a parte ſolida ſeparetur, debilioris eſſe odoris, quam ipſe ſpiritus ante cryſtalliſationem, deprehenditur.

§. 16. Cum hac de re plura ſuſcepiſſem tentamina eo imprimis fine, vt tam minimum frigoris gradum quo coagulatio haec fieri poſſit, quam et regelationis temperiem inuenirem; miratus ſane ſum, cum viderem, cryſtalliſationem hanc frigore ſuccedere longe minore, quam egomet ipſe putaui; ſucceſſit enim mihi coagulatio haec in frigore 190 graduum, quam primum vero frigus ad 183 gradus vsque diminuitur, tum coagulum hoc iterum penitus liquescit; quibus obſeruationibus teſtantibus hic Petropoli hyemali tempore in ipſo adeo naturali atmoſphaerae frigore ſpiritus ſalis ammoniaci cauſtici cryſtalliſatio fieri poteſt.

Atque nunc experientiis hac in diſſertatione expoſitis certo certius conuicti ſumus, omnia, quae habemus, tria alcalia, cauſtica perinde ac aërata, propria ſub cryſtallorum forma exhiberi poſſe; qua in re equidem gaudeo, me tentaminibus hiſce meis, alcalia nempe fixa quod attinet, obſeruationes Clariſſimorum Dehne et Bertholet penitus confirmaſſe, qui quippe priores huius rei inuentores ſunt.

DE

DESCRIPTIO PLEVRONECT. FLESI ET PASSERIS LINN. HISTORICO-ANATOMICA.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Conuentui exhib. die 17 April. 1794.

Deſcriptio haec partium externarum ad piſcem exſiccatum quodammodo et congelatum facta eſt: *oculis a latere dextro.*

Totum corpus, quod cathetoplateum valde ac admargines attenuatum eſt, figuram exhibet ouato-oblongam, ſi maxillas et caudam demas, quibus vtraque huius figurae extremitas nimis acuta redderetur.

Caput parvum, lateraliter compreſſum. Os ſurſum flexum; apertura oris modica. Oculi magni, exſtantes, ſibique adeo vicini, vt margo oculi dextri ſuperior ab eodem margine ſiniſtri vix $1'''$ ſit remotus. Foramina narium duo vtrinque: Nares dextrae inter oculos et maxillae ſuperioris marginem dextrum poſitae, ſituque anteriores, magisque ad latus poſita ſunt, quam eae ſiniſtri lateris; Illae, dextri ſcil. lateris, ante oculos diſponunſur ita, vt foramen

ramen poſticum orbitae margini ſuperiori oculi dextri ſeu inferioris contiguum, magis vero remotum ſit ab orbitae margine ſiniſtri oculi ſeu ſuperioris. Idem foramen paullo amplius antico, membranula latiori ac obtuſa obtentum eſt, quae a latere oculi dextri ipſi apponitur. Foramen anticum poſtico anguſtius, eodemque ſitu ſuperius, conſpicitur in ſummitate tubuli membranoſi, breuis ac verſus oculum dextrum inclinati. Interſtitium inter duo haec foramina $1'''$ exaequat; diſtantia antici a margine maxillae ſuperioris $2\frac{1}{3}'''$. Nares ſiniſtrae in foueola albida, quam pinnae dorſi principium reſpicit, diſopoſitae ſunt. Foueola iſta malae oſſi impreſſa videtur, ob colorem album, quo inſignitur, iam ad latus ſiniſtrum referenda. Foramen poſticum maius, membranula eodem modo, quo ſimile dextri lateris, breuiori tamen tectum, ac foueae margini exteriori poſteriorique contiguum: anticum in diſtantia $1'''$ a poſtico oblique antrorſum et introrſum ſitum, capitis fere medio reſpondet, ſtructura ab illo dextri lateris non multum abludens, ac a maxillae ſuperioris margine $5'''$ diſtans. Hinc patet, nares ſiniſtri lateris ſitu eſſe poſteriores, quam dextrae, magisque remotas ab oris extremo.

Apertura oris obliqua parum ac dextrorſum intorta. Dentium ordo in vtraque maxilla vnicus, breuiſſimorum, minimorum ac obtuſorum. In limbo maxillae vtriusque ſiniſtro plures maioresque dentes deprehendi, quam in dextro; In hoc enim, cum ſuperiori, tum inferiori ſeptem aut octo numeraui, non continua, ſed interrupta ſaepius ſerie ſe inuicem excipientes; in illo autem quindecim, ſibi contiguos. Ore clauſo, mandibula inferior ſuperiore paullo longior, ore aperto autem antrorſum exporrecta, eandem longitudine notabiliter ſuperat.

Dex-

Dextrum piſcis latus vndique ex oliuaceo-fuſco nigricans, et quodammodo maculatum ſeu nebulofum. Color pinnarum in eodem latere e bruno-fuſcus, cui hinc et inde, praeſertim in pinna dorſi, caudae et ani, maculae maiores e bruno-ruſae immixtae ſunt. Siniſtrum latus totum album, eodemque colore etiam pinna pectoralis et ventralis eiusdem lateris notatae; reliquae pinnae in eodem tantum pallidiores, quam in oppoſito.

Caput ipſum duabus tribusue maioribus laminis oſſeis munitum eſt, quae ad formandum branchiarum operculum ſuam inter ſe conferunt ſymbolam. Deſcribam prius earum formam et ſtructuram, prout in dextro latere occurrit: Interſtitium ſatis notabile inter oculos et marginem primae laminae interiorem replet muſculus validus, ſine dubio mouendo branchiarum operculo inſeruiens. Prima haec lamina circa ſupremam capitis regionem, quae ibidem oſſea ac tuberculata eſt, tenui principio, deſcendendo latior fit, et arcuato flexu antrorſum ducta ad baſin maxillae inferioris finitur. Superficies eius verrucis plurimis, 61 circiter, oſſeis, denticulatis, aſperis obſita; de quibus in ſeq; plura. Margini huius laminae externo iungitur ſecunda pinnae pectorali ex aduerſo oppoſita, ſuperne latior, ac primum pinnae pect. radium verſus producta, inferne anguſtior; inferiorem huius partem excipit tertia lamina, lato principio orta, ſenſim vero anguſtior facta, ſub prima ad maxillae inferioris baſin finem ſuum agnoſcit. Margo ſecundae laminae externus quoad maximam partem arcuatus, et margini externo tertiae, pariter arcuato, ſitu parallelus eſt. Monendum tamen, laminam ſecundam diuidi poſſe in duas diſtinctas, id quod in ſiniſtro piſcis latere melius diſtinguitur, ſc. in ſuperiorem, ſubtriangularem, angulo infe-

riori caeteris acutiori, et in inferiorem, oblongam, angulum ſuperioris acuminatum excipientem; ſic tres laminae, praeter illam primam anticam, ipſis contiguam, proprie operculum branch. conſtituunt. Prima ſeu ſuprema lamina verrucas obtinuit circiter 23, per ipſius medium diſpoſitas; ſecunda circiter 25, iis minores, quarum pleraeque iuxta marginem externum collocatae; tertia circiter 27, circa ipſius baſin congreſtas, exhibet.

Ab oculi ſuperioris margine poſtico iugum oſſeum tuberculatum et irregulare retrorſum excurrit verſus lineam longitudinalem; tubercula eius laeuia ſunt. Margo huius iugi inferior ac anterior muſculi illius validi parti ſupremae, de quo ſupra dixi, limites ponit. Ab extremitate iugi anteriore deſcendit, et ſub oculo dextro arcuatim inflectitur ductus quidam, lineae longitudinalis veluti partem repraeſentans, ac ad narium dextrum marginem inferiorem vsque excurrens. Spatium inter hunc ductum et marginem orbitae vtriusque poſticum fere triangulare, et 20. circ. verrucis maioribus obſitum eſt. Eiusmodi verrucae quoque per ſuperficiem muſculi validi ſparſae videntur, quarum numerus ad 42. circ. accedit; plures earum ad inferiora muſculi, pone oculum dextrum, aggregatae, reliquae vero in eius margine diſtributae ſunt.

Cutis corporis in vniuerſum glabra. Squamae innumerae, minimae, ſubrotundae, vel etiam oblongae, cuti firmiter inhaerent, et leuiter concauae apparent. Diameter maiorum vix $\frac{1}{3}'''$ exaequat. Praeterea hae ſquamae non vbique ſibi contiguae, ſed ſaepius in aliquali diſtantia a ſe inuicem remotae, quod inprimis circa pinnae dorſalis initium videre licet.

Inter

Inter extremitatem iugi posteriorem et principium lineae longitudinalis occurrit officulum longum, oblique deorsum ac retrorsum extensum, cuius maxima latitudo lineae longitudine ac extremitati iugi oppositа est; circa hoc incipit ipsa linea longitudin. in excursu fere recto retrorsum et parum oblique sursum ad 8‴ vsque, vbi mox inflectitur deorsum ad $4\frac{1}{2}$‴ vsque, ibidemque obliteratur; in distantia 4‴ vero ab hac flexura iterum prodit, ad 5‴ leuiter sursum arcuata, dein autem recto tramite, nec amplius interrupta, ad extremitatem radiorum pinnae caudae vsque pergit, hanc ipsam pinnam in duas partes aequales diuidens.

Proxime tam supra quam infra lineam longitudinalem verrucae osseae denticulatae exstant, quarum numerus versus lineae huius principium augetur, circa quod, et quidem infra eandem, 26 circ. in areola quadam coaceruatae sunt: quarum anteriores omnium facile maximas habebis, sc. $1\frac{1}{2}$‴ longas; huiusmodi verrucae vero caudam versus non tantum numero decrescunt, sed interrupta etiam ipsarum series est, immo in distantia 1″, 5‴ ab extremitate corporis carnosa ad anteriora lineae longitudinalis earum plane nullum est vestigium. Verrucas has non nisi squamas eleuatas, et ad formam mutatas esse, ex iis, quae in medio corpore obtinent, vbi copiosissimae ac sibi contiguae sunt, vix quisquam perspiciet, ex iis vero potissimum, quae extremitatem corporis occupant, facile conuincetur; harum nempe margines exacte sunt denticulati, medium vero ipsarum laeve omnino est, quippe quae conformatio squamarum formam optime refert.

Principium lineae longitudin. a margine dorsi seu a basi pinnae dorsi 1″, $2\frac{1}{2}$‴, in linea recta vero deorsum a mar-

gine abdominis, pone pinnas ventrales, 2″, 4‴; eadem circa maximam corporis latitudinem, pone ipsius alteram flexuram minorem, a basi pinnae dorsi 1′, 8‴, in linea recta vero deorsum ad basin pinnae ani seu marginem abdominis 2″, 5‴; ast caudam versus, retro pinnam dorsi et ani, ab vtroque corporis margine aequaliter fere distat eadem.

Notandae quoque sunt, antequam sinistri lateris habitum referamus, verrucae, circa basin radiorum pinnae dorsi et ani, dorsi et abdominis margini innatae, quarum vnica vt plurimum basibus duorum pinnae radiorum interponitur. In margine dorsi earum primam conspexi inter radium 12 et 13, vltimam vero inter radium 49 et 50. In margine abdominis autem primae, eaeque quaternae, inter radium 3 et 4, vltima inter radium 35 et 36. Quod ad magnitudinem earum attinet, si lineam, secundum quam ad vtramque pinnam distributae sunt, in quatuor partes aequales diuidas, in primam cadent illae mediae magnitudinis, in secundam maximae, in tertiam iterum mediae, in quartam vero minimae; harumque denticuli etiam manifeste retrorsum spectant. Caeterum quoque, sed rarius, versus anteriora pinnae dorsi verrucae interdum binae, versus anteriora pinnae ani semel quaternae, scilic. inter 3 et 4 radium inter 4 et 5, ac inter 5 et 6 bis semel binae mihi visae; sic quoque subinde, sed rarius, accidit, vt eiusmodi verruca ipsi radii cuiusdam radici imposita sit, id quod circa anteriora marginis dorsi animaduertere licuit; ita et officulo, pinnae ani radio primo adstanti, duae eiusmodi accretae. Verrucae pariter, circiter 27 in regione pinnae pect. inferius dispersae, ita et pone clauiculam ex opposito laminae osseae operculi branchiar. proprie sic dicti secundae 8 circiter inter basin radii primi pinnae ventralis et summitatem sterni vero circiter 27 in

su-

ſuperficie fere triangulari aggregatae. Harum omnium magnitudo cum iis, quae in capite occurrunt, eadem eſt.

Ab angulo iugi capitis oſſei tubercutati poſteriore, eodemque ſuperiore veſtigium quoddam lineae longitudinalis ſeu ſimile quid apparet, verſus radium pinnae dorſi quartum fere recta ſurſum ac antrorſum ductae, longitudine 8‴. Haec ſunt omnia, quae in dextro latere ſeſe offerunt momenta; tranſeundum nunc erit ad ea *ſiniſtri lateris.*

In diſtantia 5‴ a margine narium ſiniſtro poſtico, ex antica iugi ſiniſtri parte, prodit arcus quaſi catenulatus, cuius conuexitas muſculum validum, concauitas ſurſum iugum verſus ſpectat, finis vero ad narium ſiniſtrum marginem inferiorem eſt. Correſpondet hic arcus illi dextri lateris, nec ab hoc differt, niſi quod craſſior ac rectior ſit. In toto hoc capitis latere, nec ſupra muſculum validum, nec ſuper tres operculi branchiar. laminas, verrucae vsquam occurrunt. Ex oppoſito autem laminae operculi branchiar. ſecundae partis ſuperioris duae eiusmodi, inferioris tres, infra pinnam pect. totidem, ſupra lineae longitudinalis principium ſex, infra idem 28 circiter apparent: quarum anteriores maiores ſunt, ac ſibi inuicem proxime adſtant. Ad marginem dorſi, inter radium pinnae 22 et 23 prima, et inter radium 29 et 30 vltima verruca obuenit; ita margini abdominis inter radium pinnae 9 et 10 prima, inter 15 et 16 vltima; quotquot tamen in hoc latere conſpiciuntur verrucae, omnes fere minores, planiores, breuioribus que denticulis armatae ſunt, quam illae dextri lateris.

Linea longitudinalis a principio ſtatim leuiter aſcendit, ad 1″, 10‴ ſui excurſus leuiorem arcum efformando,

abhinc autem in linea recta ad extremitatem radiorum pinnae caudae vsque procedit. Vestigium illud lineolae spuriae, ab angulo iugi ossei superiore versus quartum radium pinnae dorsi ductae, eodem plane modo se habet, vt in opposito latere.

Pinnae pect. radiorum 10, quorum 1. 2. 9 et 10 simplices sunt, caeteri vero extremitatem versus ramosi. Primus eorum longitudine $9'''$, secundus $1''$, $1'''$, tertius et quartus parum longiores, reliquis ex ordine iterum decrescentibus; vltimus $7''$ longus. Basis harum pinnarum cadit ex parte in angulum operculi branchiarum superiorem, et $3\frac{1}{2}'''$ lata est.

Pinna dorsi radiorum 58, marginem dorsi fere totum occupans, si extremum corporis excipias. Principium eius situ quodammodo obliquum: tres etenim primi radii sinistrorsum magis spectant, quam reliqui; cutis quoque, quae a primi radii latere sinistro producitur, ad marginem narium sinistrum inferiorem descendit. Differunt radii huius pinnae 1.) ratione directionis, 2.) magnitudinis, 3.) forma: Quod ad directionem attinet, a primo ad 32 retrorsum, sequentes omnes magis antrorsum spectant; quo fit, vt radii, summam pinnae altitudinem constituentes basibus suis diuergant, apicibus vero conuergant. Quod ad magnitudinem: a primo ad 32 radium longitudine ex ordine increscunt, vti sequentes omnes ex ordine iterum decrescunt. Longitudo primi $4'''$, trigesimi secundi $1''$, $2'''$; Quod ad formam: primo — 24, et 44 — 58 arcuati sunt, hi antrorsum, illi retrorsum, 25 — 43 fere recti.

Pinnae

Pinnae ventrales radiorum 6, omnes ſimplices. Longitudo pinnae 10‴, latitudo ad baſin $2\frac{1}{2}$‴; primus radius longitudine 8‴; ſecundus tertio, qui longiſſimus eſt, paulo breuior, reliqui ex ordine breuiores; vltimus 5‴ longus. Ipſae hae pinnae ſitu parum anteriores ſunt pectoralibus.

Pinna ani radiorum 41, marginem abdominis quoad maximam partem occupans. Primi radii baſi appoſitum eſt officulum oblongum, cuius extremitas antica leuiter acuminata ac prominula. Radius 1 — 17 longitudine increſcunt, ſequentes ex ordine iterum decreſcunt. Longitudo radii longiſſimi 1″, 2‴. Quae ſupra de directione, magnitudine et forma radiorum pinnae dorſi dixi, de hac quoque valent. Apices radiorum et pinnae dorſi et pinnae caudae vltra membranam, qua inter ſe connectuntur, eminent.

Pinna caudae radiorum 18. ad extremitatem fere aequalis: radii enim intermedii perparum longiores reliquis; duo primi vtrinque caeteris notabiliter breuiores; 1 — 3 vtrinque ſimplices, caeteri omnes ramoſi. Linea longitudinalis inter 9. et 10. radium decurrens caudae pinnam in duas aequales diuidit partes.

Partes internae.

Ob ſuperficiem abdominis minimam, quae inter pinnas ventrales et anum eſt, inſpiciendi ventris interiora locus non datur commodus; hinc in latere ſiniſtro, inter lineam longitudinalem et pinnam ani, cutem ſecundum longitudinem, et a pinnis ventralibus ſurſum verſus pectorales, eandem in transuerſum diſſecare ratum habui, inprimis cum ibidem latera ſeu hypochondria corporis mollia tactu deprehendiſſem: quo facto, duo potiſſimum in conſpectum prodibant

bant viſcera, hepar ſc. et vteri cornu ſiniſtrum, ſed, quod dolui, contenta abdominis putredine iam valde corrupta erant. Hepar ſub pinnis pertoralibus oblique transuerſim extenſum, magnum ac planiusculum, cuius pars ſuperior latior ſub lineae longitudinalis, curuatura deliteſcit, inferior autem, eaque anguſtior, pinnas ventrales ac ſternum reſpicit. Margo eius anterior ſinuatus, poſterior quodammodo arcuatus viſceris huius figuram fere reniformem effingunt. Vteri cornu ſiniſtrum hepatis margini poſteriori contiguum eſt, in eoque loco ſummam habet amplitudinem; ſitum obtinet longitudinalem, extremitate ſua poſteriore regionem radii 27 pinnae ani attingens, a cuius fine 1″, 4‴ adhuc diſtat. Latitudine ſenſim decreſcit ab extremitate antica verſus poſticam. Pars ouarii antica latior ſuper aliquam inteſtinorum conuolutionem extenſa, in ipſa proprie ſic dicta abdominis cauitate ſita eſt, poſtica vero, eaque longior, inter coſtas inferiores ac radios offeos collocata. Superficies eius inferior colorem oſtendit ſubteſtaceum, et conſiſtentiam offert multo ſolidiorem, quam ſuperior, fibrisque muſcularibus longitudinalibus inſtructa eſſe videtur.

Exceptis duabus iſtis cauitatibus, quae vteri cornubus repletae ſunt, abdomen ipſum, offeo ſepimento deſtitutum, contraria plane ſe habet ratione, quam in aliis piſcibus; eſt enim in transuerſum quaſi diſpoſitum, qualem quoque ſitum inteſtina potiſſimum affectant; ita autem ſe habet eius amplitudo: perpendiculariter ſc. menſurata, ſeu a ſpina dorſi ad inferiorem corporis marginem, vel anum vsque, 2″, 4‴, in medio autem transuerſim, a baſi pinnae pect. ad primum et maximum radium offeum, 1″, 5‴, ſuperne tamen circa renes et diaphragma, vbi paullo latior et profundior eſt, 1″, 8‴. Lien e griſeo-nigricans, oblongus, ſubcon-

conuexus, 5‴ longus, $3\frac{1}{2}$‴ latus, inteſtini tractui ampliori, forſan colo, incumbit. Meſenterium ſpinae dorſi primoque forti radio adnatum, abdomen ſecundum corporis longitudinem in duas partes diuidit, quo mediante ſepto membranaceo fit, vt ouaria a ſe inuicem ſeparata ſint, nec ambo ſimul in conſpectum veniant, niſi idem ſeptum diſſectum vel disruptum fuerit; anterior ac inferior tamen vnius ovarii pars, quam vaginam appellare liceat, circa primum radium oſſeum validum alterius ovarii parti inferiori contigua eſt, ac eidem in diſtantia aliquot linearum ab orificio externo ſeſe iungit, vnicum abhinc amplum, aſt breuem canalem ſeu ouiductum communem efformando.

Peritoneum in ſiniſtro hypochondrio in nigrum vergens, in dextro vere nigricans.

Veſica vrinaria ampla, 1″, 5‴ longa, 3 — 4 lata, ſubcylindrica, inter peritonei duplicaturam repoſita eſt, facie poſtica radium primum validum, antica inteſtinum rectum reſpiciente. Situs eius obliquus: ſcil. fundus radio oſſeo propior, quam ipſius pars inferior. Colorem oſtendit hinc & inde argenteum; Pars eius inferior inter extremitatem vtriusque ouarii anteriorem ac inferiorem decurrit, et circa ipſius finem anguſtior facta, in vrethram definit ad dextrum latus deflexam, cuius orificium in apice papillae extra corpus prominulae conſpicitur.

Veſicula fellis, bile turgida, ſubgloboſa, magnitudine nucis auellanae maioris, coloris ſubargentei, in ductum cyſticum brevem, aſt ſatis largum terminatur.

Inteſtina in gyros ſeu conuolutiones varie inflexa. Totus ipſorum tractus, a meſenterio ſolutus, ac recta extenſus, a ſummo ventriculi ad anum vsque 1′, 2″ circiter emetitur. Appendices binae, conicae, $\frac{1}{2}'''$ longae, a principio ventriculi, quod 5‴ ſub diaphragmate incipit, 2″ diſtant, et ex aduerſo ſibi oppoſitae ſunt. Ventriculus a principio ſenſim ampliatus, iterumque coarctatus ad pylorum. Latitudo eius ad principium 6‴, in medio 9‴, ac ad finem $4\frac{1}{2}'''$. Longitudo oeſophagi ſub diaphragmate 5‴. Subſtantia huius ab illa ventriculi, poſt vtriusque diſſectionem facile a ſe inuicem diſtinguenda: ſcil. oeſophagus albidior eſt, ac rugas longe minores magisque rectas oſtendit, quam ventriculus, cuius rugae pariter quidem longitudinales, ſed tortuoſiores ac per oblique transuerſas inter ſe iunctae ſunt. In ventriculo, praeter mucum vel ſmegma quoddam, nil reperi. Exitus huius in duodenum largus: plica etenim iſta circularis, quae pylori valuulam conſtituit, latitudine 1‴ haud ſuperat. Proxime ſub hac valuula patent appendicum caecarum lumina, quorum alterum ductus cholidochi oſtiolum comitatur. Inteſtina, praecipue duodenum, ſmegmate craſſo, particulis terreis albentibus mixto referta, ac ſubinde contracta, ſubinde etiam ampliata ſpectantur. In diſtantia 2″ ab ano inteſtini recti ſuperficiei internae appoſita eſt valuula circularis, pylori illi non abſimilis. Inteſtinum rectum extremitatem verſus ſenſim ampliatur, et ſphincte re ad anum ſatis patulum terminatur. Anus, ſcil. oſtium recti, ob marginem externum albicantem, ad ſiniſtrum potius latus referendus eſſe videtur, quam ad dextrum. Structura nec inteſtinorum, neque appendicum manifeſte glanduloſa, ſed membranoſa potius ac tenuis.

Renes

Renes nigricantes ad caput per interpoſitos binos muſculos, ad mouenda tubercula, palato ſupremo immerſa, deſtinatos, diuiduntur, in aliquali vero diſtantia infra horum muſculorum principium coniuncti in vnum corpus, ſpinam dorſi, cui ſecundum longitudinem adnati ſunt, ſequuntur, hinc autem ſub angulo fere recto inflexi, iuxta primum validum radium oſſeum deſcendunt, ac in vreterum terminantur, de quo, an ſimplex, an duplex ſit, nihil certi ſtatuere poſſum, praeterquam quod veſicam verſus deſcendat, eiusque fundo ouato inſeratur.

Membrana branchioſtega officulis ſeptem arcuatis fulcitur, quorum duo vel tria ſuperiora magis teretia et anguſtiora ſunt ſequentibus, quae omnino plana dici merentur: Primum omnium minime arcuatum; quatuor ſuperiora baſibus ſuis proxime ſibi inuicem iuncta, reliqua vero ad $1\frac{1}{2}'''$ a ſe inuicem remota ſunt; omnia tamen eidem oſſi inſiſtunt: hinc ſeptimum officulum radiatum ab Artedo pro diſtincto habitum, ex numero officulorum membranae branchioſtegae nullo modo excludendum. Branchiae vtrinque quatuor, radiis ſanguiferis ſimplicibus, ſeu vnica tantum radiorum ſerie conſtructae ſunt, circa quos notandum, quod margini ſemicirculi oſſei externo ac interno alternatim propiores ſint; id quod etiam inde elucet, quod in eodem latere vnius radii vel laminae ſanguiferae margo nigricans, alterius pallidus eſt. Singulare quid et hoc eſt, quod hiatus parallelogrammus, $3\frac{1}{2}'''$ longus, $1'''$ latus, pone quartam branchiarum in gulam pateat, ac dentium ſeriebus in gula diſpoſitis opponatur, cum in caeteris piſcibus ſpinoſis quamplurimis haec regio membrana vndique clauſa ſit.

Palatum laeue: huius faciei posticae, extremitati semicirculi primi posterioris oppositae, adnascitur vtrinque series radiorum sanguiferorum, branchias succenturiatas quasi mentiens. Pone palatum ad initium gulae superne duo collocata sunt tubercula, quorum singulum ex tribus dentium seriebus mobilibus, arcuatis, situque obliquis, componitur. Prima, seu antica series decem constat dentibus, secunda seu intermedia tredecim (in altero tantum 12), ac tertia decem (in altero vero 12) componebatur. Dentes hi parui, obtusiusculi, et quoad magnitudinem ac formam illis oris consimiles. Magnitudine tamen ac situ ipsi inter se differunt ita, vt eorum maiores ad interiora, minores ad exteriora collocentur; conuexitas autem harum serierum palatum respicit. Hisce tuberculis maioribus inferne, ad initium gulae, duo alia, sed minora, correspondent tubercula dentata, extremitatibus suis anterioribus latioribusque conniuentibus, posterioribus angustioribusque late diuergentibus. Figuram haec habent valde oblongam, ac extrorsum parum inflexa sunt; hinc margo eorum interior notabiliter conuexus, exterior parum concauus apparet. Singulum pariter ex tribus dentium seriebus, communi et fixa basi gaudentibus, formatur, quorum anteriores, inprimis intimae seriei, ceteris maiores sunt; ambo haec tubercula non ita firmiter inter se cohaerent, quin vnum sine altero moueri possit. Longitudo eorum $4'''$, latitudo maxima supra medium $1\frac{1}{3}'''$ est. Latus vtriusque tuberculi externum cum latere semicirculi ossei quarti interno parallelum est, eandemque obseruat directionem; ac si hiatum parallelogrammum, de quo supra dixi, a gula adspicias, latus cuiusuis tuberculi externum et semicirculi internum parietes eius esse deprehendes. Restant adhuc quaedam dicenda de musculis, haec tubercula mouentibus: maximi horum sunt illi duo,

duo, quorum principium in primis vertebris; inſertio autem ſub tuberculorum gulae ſuperiorum parte inferiore quaerenda; latitudo eorum 3‴, longitudo 1″ circiter eſt: horum actione tubercula retrorſum, ſimulque parum introrſum ducuntur. Praeter hos alius adeſt transuerſus, iis ſubſtratus, tenuis, 3 — 4‴ latus, qui a ſuperficie vnius tuberculi inferiore ad illam alterius expanditur; munus huius in eo videtur conſiſtere, vt tubercula ad ſe inuicem adducat. Excipit quoque ſingulum tuberculorum inferiorum validum, ſed breuem muſculum, valdeque rubentem, qui ad marginem clauiculae internum lata baſi oritur, tendine ſuo autem parti cuiusuis tuberculi anteriori ac exteriori inſeritur; hicque illud retrorſum et oblique extrorſum trahit. Ante hunc alius conicus, a margine clauiculae interno oriundus, recta transuerſim extenditur, ſuoque tendine eandem fere cum priori inſertionem patitur; hicque tuberculum extrorſum vero trahuntur eadem a fibris gulae longitudinalibus.

Aculei, in concauo ſemicirculorum branchialium margine conſpiciendi, breues, ſubſtantiae oſſeo-cartilagineae, mobiles ac molles ſunt; eorumque numerus in primo branchiarum ſemicirculo ad 12, in ſeq. ad 7 — 8 accedit.

Lingua ſubteres, antice ſatis libera, 5‴ longa, officulo tunicis obducto conſtat, excepto apice, qui mollis eſt, ac ſitu naturali a mandibulae inferioris extremo aliquot lineas adhuc diſtat.

Aculeus iſte, qui ad principium pinnae ani cerniiur, ac pinnas ventrales reſpicit, breuis, pellucidus ac aliquantulum incuruatus eſt, nec, niſi retracta antea cute, quae eius apicem praeputii inſtar circumdat, facile in ocu-

los cadit. Si, diſciſſa cute, vlterius eum proſequaris, apparet, extremitatem radii illius validi oſſei, cuius mentio ſaepe iam facta eſt, in eundem terminari.

Officula duo auditus maxima, ſibi non ex aſſe ſimilia, latere plano, quaſi ex circulis cochleato extrorſum, latere conuexo, longitudinaliter ſinuato-carinato, introrſum ſpectante. Vertebrae 35.

Menſura.	Poll.	Lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices radior. pinnae caudae longiorum - -	10″.	$3\frac{1}{2}$‴.
— — ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - -	8″.	$4\frac{1}{2}$‴.
Ab oris extremo ad oculi medium - - -	—	$7\frac{1}{2}$″.
— — — ad princip. pinn. pect. - -	2″.	5‴.
— — — — pinn. ventr. - -	2″.	5‴.
— — — — pinn. dorſ. - -	—	8‴.
— — — — pinn. ani - -	3″.	6‴.
Longitudo pinn. pect. - - - - -	1″.	2‴.
— — — ventr. - - - - - -	—	10‴.
— — — dorſ. ſcil. ad radicem in linea recta, - - - - -	7″.	1‴.
— — — ani - - - - - -	4″.	8‴.
— — — caudae - - - - - -	1″.	2‴.
Ab oris extremo ad narium foramen - -	—	4‴.
— — — ad marginem oculi anticum -	—	5‴.
— — — ad angulum ſuperior. operc. branch. - - -	2″.	$5\frac{1}{2}$‴.
— — — ad anum - - - - -	2″.	9‴.

Dia-

	Poll.	Lin.
Diameter orbitae oculi ſecundum corporis longit.	—	$6'''$.
— — — — perpendicular - -	—	$5\frac{1}{2}''$.
Ab extremo maxillae ſuperior. ad princip. lineae longitud. - - - - -	$2''$.	$2'''$.
Diſtantia inter principium primi radii pinnae pect. et primum radium pinnae ventr. oblique antrorſum menſurata - - - - - - - -	$1''$.	$7'''$.
— — — principium vltimi radii pinnae dorſi et principium pinnae caudae	—	$9'''$.
— — — primum radium pinnae ventr. et primum radium pinnae ani -	$1''$.	
— — — vltimum radium pinnae ani et primum radium pinnae caudae -	—	$11'''$.
Latitudo horizont. (piſce ſc. erecto horizontaliter determinata) ad primum radium pinnae dorſi - - - -	—	$8\frac{1}{2}'''$.
— — — ad medium corporis - -	—	$10'''$.
— — — ad principium pinnae caudae-	—	$2\frac{1}{2}'''$.
Latitudo perpendic. (piſce ſc. lateri incumbente) per medium oculorum - -	$1''$.	$4'''$.
— — — per angulum ſuper. operc. branch.	$3''$.	$8'''$.
— — — parum ante corporis medium (pinnis excluſis) - - -	$4''$.	$2'''$.
— — — in medio inter pinn. caudae et vltimum pinnae dorſi radium - - - - -	—	$9\frac{1}{2}'''$.
— — — ad principium pinnae caudae-	—	$11\frac{1}{2}'''$.
Interſtitium inter primos radios vtriusque pinn. ventr. - - - - - -	—	$1\frac{1}{2}'''$.
— — — principium pinn. ventr. et anum	—	$5'''$.

Ob-

Obſeruationes.

in ſex aliis Pleuronect. Fleſi indiuiduis, congelatis, Archangelopoli Petropolin allatis, quorum tria in dextro, at totidem in ſiniſtro latere erant oculata.

N°. I. *Mas.* Longitudo tota ab oris extremo ad apices radiorum pinn. caudae longiorum 7″., 5‴. Latitudo maxima 2″, 10‴. *Latus dextrum* ex cinereo et fusco mixti coloris. Maculae in pinn. dorſ. 9, ani, et caudae 5 ferrugineae. Pinn. dorſ. rad. 57. pect. 10. ventral. 6, ani 40, caudae 18. Operculi branch. laminae omnes, vt et muſculus validus, pone oculos conſpiciendus, area item magna pone pinn. pect. area triangularis ante pinn. ventr. linea longit. vtrinque, praeſertim circa ipſius principium, radiorum pinnae dorſi et ani omnium baſes, verrucis obſita. Latera corporis tam ſupra, quam infra lineam longitud. areola parua ſupra pinnam ventr. vt et pinna caudae omnino glabrae. Dexter ani limbus ſtriis fuſcis transuerſis diſtinctus. *Latus ſiniſtrum*, albidum, maculisque tribus quatuor ve ſubteſtaceis ſparſis notatum. Verrucae huius lateris minores, quam alterius, ad principium lineae longitud. plurimae, ſenſim numero diminutae, circa pinn. dorſ. et ani, vt in aduerſo latere, ſolitariae; ſeries quoque verrucarum paruularum, 27 numero circiter, oſſis, quod a pinnae pect. baſi deſcendit, ductum ſequitur. Hinc maxima huius lateris pars laeuis. Arcus catenulatus quaſi, quem ſupra tetigi, ab antico narium foramine ad anticam iugi oſſei partem ductus, ex oſtiolis octo diſtantibus conſtat. Proxime ſupra huius iugi

gi parre anteriore quatuor alia oſtiola, ſed iſtis minora, vt et quinque vel ſex eiusmodi in lamina arcuata prima, immediate pone muſculum validum diſpoſita, obſcuriora licet; nec non decem vel duodecim ſimilia in maxilla inferiore, quae omnia nil niſi ductuum muciferorum lumina eſſe videntur. Dentium in vtriusque maxillae parte alba, ſc. ſiniſtra, plures, magis que conferti, quam in altera. Lacles oblongae, in varios lobos diuiſae, albicantes, nec vltra radium validum oſſeum extenſae.

N°. II. *Mas.* Longitudo tota etc. $7''$, $7'''$. Latitudo maxima $3''$, $2'''$. *Latus dextrum* ex rufeſcente griſeo, cinereo fuſco que mixti coloris. Maculae in pinna dorſi 11, ani, 8, et caudae 10 variae magnitudinis, ferrugineae. Pinna dorſi radiorum 56. pect. 10. ventr. 6 ani 39, caudae 18. Verrucae capitis, abdominis, lineae longitud. pauciores, quam in N°. I. Muſculus validus capitis pauciſſimis tantum inſtructus; caeterum glabritie cum praecedenti conuenit. *Latus ſiniſtrum*, totum fere glabrum, verrucisque pauciſſimis tantum inſtructum. Maculae ſubteſtaceae quatuor, pallidae ac obſoletae. Oſtiola in arcu catenulato circa iugum oſſeum ac in lamina prima pauciora, quam in N°. I. minus que diſcernibilia. Limbus ani carnoſus dexter prae eo ſiniſtri lateris prominet, ſtriis que nonnullis transuerſim notatus eſt; hinc ani orificium in ſiniſtrum potius latus cadit, quam in abdominis medium; id quod in omnibus obſeruare licet. De reliquo cum N°. I. conuenit.

N°. III. *Foemina.* Longitudo tota etc. 8″, 5‴. Latitudo maxima 3″, 4½‴. *Latus dextrum*, maximam partem cinereo-liuidum, lituris fuſcis ſupra lineam longitudinalem haud paucis variegatum, infra eandem ferruginei coloris hinc et inde veſtigia. Maculae in pinna dorſi 6, ani 3 (vna cum aliis quibusdam pallide nigricantibus) et caudae 10, variae magnitudinis, ferrugineae. Pinna dorſi radiorum 57. pect. 10. ventr. 6. ani 40. caudae 18. *Latus ſiniſtrum*, ratione verrucarum ex aſſe conuenit cum N°. II. inſtructum tamen eſt praeterea pauciſſimis quibusdam ſub pinna pect. Arcus catenulati decem ſunt oſtia; proxime ſupra iugum oſſeum tria quatuor ve; in lamina prima nouem circiter. Dentes in vtriusque maxillae parte alba manifeſto plures, magis que conferti, quam in parte obſcura, ſeu dextra; forſan, quia ſub manducatione, vel ex alia etiam cauſa, in hoc latere facilius excidunt; inhaerent enim alueolis ſuis ſatis laxe, adeo vt plerumque vacillantes deprehendantur. Maculae ſubteſtaceae 9 circiter, ſparſae; plures earum ſupra lineam longitud. capiti vicinae.

N°. IV. *Foemina.* Longitudo tota etc. 7″, 1‴. Latitudo maxima 2″, 11½‴. *Latus ſiniſtrum* ex rufeſcente griſeum, cinereo-liuido colore intermixto, fuſcisque maculis, in centro obſcure ferrugineis, notatum. Maculae in pinna dorſi 12, paulo maiores, magis que ſaturatae, quam in dextro latere oculatis; ſimiles 5. in pinna ani, et 7 in pinna caudae. Pinna dorſi radiorum 54. pect. 10. ventr. 6. ani 36. caudae 18. Apertura oris obliqua parum, ac ſiniſtrorſum intorta. Verrucae in laminis capitis et circa iugum oſſeum fat

ſat copioſae, pauciores tamen, quam in N°. I. dextro latere. Muſculus validus iis caret. Verrucarum vna ſeries ſupra lineam longitud. infra eam plures, inprimis circa lineae initium. Area pone pinnam pect. lata, verrucis copioſis, paucioribus licet, quam N°. I. ac areola triangularis ante pinnam ventralem huic ſc. N°. I. numero aequalibus inſtructae. Quae ad pinnarum dorſi ac ani baſin occurrunt, pariter vt in N°. I. Reliqua omnia glabra. *Latus dextrum* album, immaculatum. Verrucae 15 inter tertium pinnae ani radium et decimum octauum; item 17 eiusmudi inter decimum nonum pinnae dorſi radium et trigeſimum quartum. Linea longitudinalis vltra tertiam ſui decurſus partem verrucis obſita, ſupra paucis, infra pluribus. Verrucae etiam, licet pauciſſimae, infra pinnae pect. baſin, ac in clauicula ſeu ſterno armato. Reliqua omnia glabra. Oſtia oblonga ad arcus catenulati curuaturam conuexam in transuerſum poſita 10; ſupra iugum oſſeum 6; in lamina prima 7, ac in maxillae inferioris ambitu 10. De reliquo a caeteris haud diuerſum.

N°. V. *Mas.* Longitudo tota etc. 8″, 10‴. Latitudo maxima 3″, $3\frac{1}{2}$‴. *Latus ſiniſtrum* ex ruſeſcente griſeo, fuſco et cinereo maculatum. Maculae pinnae dorſi 8, ani 4, caudae 8 ſoliti coloris atque figurae. Pinna dorſi radiorum 55. pect. 10. ventr. 6. ani 39. caudae 18. Verrucae radiorum pinnae dorſi, 1 — 8 et 44 — 55, ita et radiorum pinnae ani, 29 — 39 baſes iis deſtitutae. Caput verrucis ſat copioſis obſitum, nec muſculo valido excepto; vt et circa lineam longitudinalem quarta, eaque extrema eius parte excep-

ta; earundemque haud paucae in area magna infra pinnam pect. in que alia ante pinnam ventralem triangulari. Reliqua cum caeteris conueniunt. *Latus dextrum* album, maculis tribus ſparſis, fuſcis. Verrucae ad pinnae dorſi baſin, a 20 ad 30 radium, ac ad pinnam ani a 5 ad 16 radium. Ab initio lineae longitud. ad $1\frac{1}{2}$ poll. vsque, ſolito numero; ſub pinnae pect. baſi areola parua, verrucoſa, vt et verrucarum ſeries in oſſe arcuato ſeu clauicula, a ſuperioribus inferiora verſus ſenſim auctarum. De reliquo cum praecedenti omnia eadem.

N°. VI. *Mas*: oculis pariter ſiniſtris, quoad omnia a N°. V. non multum abludens.

Eodem fere tempore piſcium eiusmodi, vtriusque ſexus, tam dextre, quam ſiniſtre oculatorum copia quoque ad me transmiſſa eſt ex Inſula Oeſelia, ſub nomine Curländiſche Butta, qui, non obſtante hac ipſa differentia notabili, quoad puncta eſſentialia ſummam tamen, vt ſupra deſcripti, inter ſe oſtendebant conuenientiam, nec, quoad formam corporis externam, configurationem oris, ſitum ac diſtantiam, quam inter ſe ſeruant oculi, ſitum formam que pinnarum, earundemque radiorum numerum, verrucarum, modo copioſiorum, modo rariorum, diſpoſitionem, lineaeque longitud. directionem etc. ab iis ipſis vlla ratione differebant; hinc Pleuronectem *Fleſum* atque *Paſſerem* Linn. nullo habito reſpectu, vel ad latus oculatum, ſiue id in dextro ſit, ſiue in ſiniſtro, vel ad ſexum, cum vterque in quouis latere oculatis aeque occurrat, ad vnam eandemque ſpeciem in Syſt. Nat. referri debere, adeoque et ordine et ſpecie a ſe inuicem male ſeiungi, absque magno erroris metu ſtatuere licebit. An eodem

dem modo ſe habeat res in omnibus aliis huius generis ſpeciebus, deiudicent naturae ſcrutatores, marium accolae. Ita quidem videtur in *Hippogloſſo*, qui oculis ſiniſtris, quamlibet rarius, variare a Linnaeo dicitur, ac in *Plateſſa*, quam a latere ſiniſtro oculatam ex Willougb. citat Kleinius. Indifferentia habitus in hoc piſcium coetu, ac omnis ſymmetriae neglectio, rariſſimo, immo fere vnico Naturae exemplo, philoſophica perſcrutatione digniſſima certe eſſet, eiusque ratio in eorum vitae genere forte quaerenda. Num hic ex ſpeciali naturae lege, ad procreandam ſobolem, diſſimilia neceſſario ac quouis actu ſemper, non aequilateris indiuidua vtriusque ſexus requiruntur? Ita certe ex habitu concludendum, immo id coitionis modus, piſcibus alias ſolemnis, vtique ſic poſtulat.

ASTRONOMICA.

ASTRONOMICA.

ESSAI
DE
PERFECTIONNER UNE MÉTHODE DE TROUVER SUR MER LA LATITUDE GÉOGRAPHIQUE DU VAISSEAU.

Par

M. *KRAFFT.*

Préſenté à l'Académie le 13 Octobre, 1794.

Parmi les diverſes obſervations qu'on peut faire ſur Mer pour trouver la latitude géographique du Vaiſſeau, il n'en eſt point de plus facile ni de plus propre à l'uſage de la Marine, que de prendre hors du Méridien deux hauteurs d'un Aſtre dont la declinaiſon ſoit connue, & d'obſerver le tems qui s'ecoule entre elles; mais il eſt à regretter, que le Marinier ne rencontre plus autant de facilité dans le calcul qu'il eſt enſuite obligé de faire, pour conclure d'une pareille obſervation la véritable latitude de ſon Vaiſſeau.

Ce calcul eſt accompagné de deux ſortes de difficultés: d'abord il eſt aſſes compliqué en lui même, ſoit qu'on

y ſuive les principes directs de la Trigonometrie ſphérique, ou toute autre méthode analytique y rélative connue jusqu'à préſent (*), & puis, comme ce calcul fait connoitre deux latitudes différentes qui s'accordent également avec l'obſervation, c'eſt au Marinier de ſçavoir en diſtinguer celle ſous la quelle ſon Vaiſſeau ſe trouve effectivement. Malgré cela, comme il eſt bien permis de ſuppoſer que la latitude du Vaiſſeau ſoit connue d'ailleurs à quelque choſe près, au point que le Navigateur ne puiſſe guerre ſe meprendre dans le discernement des deux latitudes que lui donne ce calcul; cette méthode ne laiſſe pas d'être d'une grande utilité pour la Marine; il ne s'agit que d'en ſimplifier le calcul & de l'accommoder à la pratique des Mariniers.

On connoit le procedé ingénieux que Mr. Douwes a établi à cet égard dans l'application de cette méthode & qui eſt à juſte titre fort en vogue dans la Marine angloiſe & hollandoiſe. Si la regle de Mr. Douwes laiſſe encore quelque choſe à regretter; c'eſt peut-être 1°) que, pour l'application *ſure* de cette regle, il faut que pluſieurs conditions différentes aient eu lieu dans les tems de l'obſervation & qu'il n'eſt pas toujours par l'état du ciel dans le pouvoir du Marinier de les remplir (**) 2°) que, pour l'application *promte* & *expeditive* de cette regle, il faut que le Marinier connoiſſe deja la latitude du Vaiſſeau avec un *certain point de préciſion.*

Ayant

(*) Mrs Kaeſtner & Schubert ont donné des ſolutions analytiques de ce Problème; le premier dans le recueil de ſes Mémoires aſtronomiques, le ſecond dans les Ephemerides de Mr. Bode 1790.

(**) Voyes Tables requiſite to be uſed with the Nautical Ephemeris 2de Edition pag. 16 de l'Explication.

Ayant trouvé pour cet important Problême de l'Aſtronomique nautique une ſolution, qui eſt rigoureuſe & auſſi facile dans l'application que celle de Mr. Douwes, & qui ſemble avoir l'avantage $\cdot^{o}$) d'être plus *générale*, n'étant bornée à aucune pareille condition & $:^{o}$) de ne demander, au moins dans la plupart des cas, qu'une connoiſſance préalable *très-peu préciſe* de la latitude du Vaiſſeau, pourvû cependant que le Navigateur ſache, ſi elle eſt boréale ou auſtrale; j'ai cru en devoir faire un court expoſé dans ce Mémoire, puisqu'elle pourroit peut-être mériter à cet égard l'attention des Mariniers, au moins dans les càs où la regle de Mr. Douwes ne ſeroit pas d'une application abſolument ſûre ou auſſi expeditive qu'il eſt à déſirer.

Problême.

La declinaiſon, & deux hauteurs d'un Aſtre priſes hors du Méridien, & le tems qui s'eſt ecoulé entre ces deux hauteurs, étant donnés, trouver la latitude géographique du lieu de l'obſervation.

Soit

la declinaiſon de l'Aſtre $= d$

des deux hauteurs { la petite $= h$ / la grande $= H$

le tems qui s'eſt ecoulé entre les deux hauteurs, exprimé en arc de Cercle $= \theta$

la latitude cherchée - $= l$

Soit pour abreger

$\frac{\text{ſin. H} - \text{ſin. } h}{2} = A$

$\frac{\text{ſin. H} + \text{ſin. } h}{2} = B$

Solution.

I.) Qu'on cherche trois angles α, β, & γ par les équations ſuivantes & ſans tenir compte, ſi la declinaiſon eſt boréale ou auſtrale:

$$\text{fin. } \alpha = \frac{A}{\text{fin. } \frac{1}{2}\theta \,.\, \text{cof. } d},$$

$$\text{tang. } \beta = \frac{\text{tang. } d}{\text{cof. } \frac{1}{2}\theta},$$

$$\text{fin. } \gamma = \frac{B \,.\, \text{cof. } \beta}{\text{cof. } \alpha \,.\, \text{cof. } \frac{1}{2}\theta \,.\, \text{cof. } d}.$$

II.) Qu'on prenne la ſomme des deux angles β & γ, & leur différence en otant le petit du plus grand. Soit leur ſomme $= \Sigma$ & leur différence $= \Delta$. Alors

1.) Si la declinaiſon de l'Aſtre & la latitude cherchée ſont du même nom; cherchés deux latitudes par les équations

$$\text{fin. } l = \text{cof. } \alpha \,.\, \text{cof. } \Delta \text{ \& fin. } l = -\text{cof. } \alpha \,.\, \text{cof. } \Sigma.$$

L'une ou l'autre ſera la vraie latitude du lieu de l'obſervation.

2.) Si la declinaiſon de l'Aſtre & la latitude cherchée ſont de différens noms; cherchés deux latitudes par les équations

$$\text{fin. } l = \text{cof. } \alpha \,.\, \text{cof. } \Sigma \text{ \& fin. } l = -\text{cof. } \alpha \,.\, \text{cof. } \Delta.$$

L'une ou l'autre ſera la vraie latitude du lieu de l'obſervation.

Demonſtration.

Soient pour les deux hauteurs de l'Aſtre h & H les deux angles horaires correſpondans T & t, desquels on ne connoit par l'obſervation que la différence $T - t = \theta$, de ſorte que $T = t + \theta$. Par la reſolution de l'un & de l'autre des deux triangles qui ſe terminent au Pôle, au Zenith

&

& à l'Aſtre, & dont les trois cotés, en ſuppoſant que la latitude du lieu & la declinaiſon de l'Aſtre ſoient du même nom, ſont les complemens de la latitude, de la declinaiſon & de la hauteur de l'Aſtre, on obtient par les principes de la Trigonometrie ſpherique & en prenant la declinaiſon pour conſtante, les equations ſuivantes:

$$\text{cof. } t = \frac{\text{ſin. H} - \text{ſin. } d \text{ . ſin. } l}{\text{cof. } d \text{ . cof. } l} \text{ \& cof. } (t+\theta) = \frac{\text{ſin. } b - \text{ſin. } d \text{ . ſin. } l}{\text{cof. } d \text{ . cof. } l},$$

ce qui donne

$$\text{cof. } d \text{ . cof. } l \,[\text{cof. } t - \text{cof. } (t+\theta)] = 2\,\text{A},$$

ou bien par une transformation connûe,

$$\text{cof. } d \text{ . cof. } l \text{ . fin. } \tfrac{1}{2}\theta \text{ . fin. } (t+\tfrac{1}{2}\theta) = \text{A}.$$

Puiſque donc la quantité A ne peut point augmenter au de là de fin. $\frac{1}{2}\theta$. cof. d; il y aura toujours un angle α tel, que A = fin. $\frac{1}{2}\theta$. cof. d . fin. α, & conſequemment

$$\text{fin. } (t+\tfrac{1}{2}\theta) = \frac{\text{fin. } \alpha}{\text{cof. } l} \text{ et}$$

$$t = \text{Arc. fin. } \frac{\text{fin. } \alpha}{\text{cof. } l} - \tfrac{1}{2}\theta; \text{ donc}$$

$$\text{cof. } t = \frac{\text{cof. } \tfrac{1}{2}\theta \text{ . } \sqrt{(\text{cof. } \alpha^2 - \text{fin. } l^2)} + \text{fin. } \tfrac{1}{2}\theta \text{ . fin. } \alpha}{\text{cof. } l}.$$

Cette expreſſion étant egalée à celle que nous avons trouvée cy-deſſus pour le même angle; on obtient l'equation

$$\text{cof. } \tfrac{1}{2}\theta \text{ . } \sqrt{(\text{cof. } \alpha^2 - \text{fin. } l^2)} + \text{tang. } d \text{ . fin. } l = \frac{\text{ſin. H}}{\text{cof. } d} - \text{fin. } \tfrac{1}{2}\theta \text{ . fin. } \alpha,$$

qui à cauſe de fin. $\frac{1}{2}\theta$. cof. d . fin. α = A, ſe réduit à celle-cy

$$\text{cof. } \tfrac{1}{2}\theta \text{ . } \sqrt{(\text{cof. } \alpha^2 - \text{fin. } l^2)} + \text{tang. } d \text{ . fin. } l = \frac{\text{B}}{\text{cof. } d},$$

de la quelle il s'agit de tirer la valeur du ſinus de la latitude cherchée par les quantités données α, B, d & θ.

Poſons pour cet effet

$$\frac{\text{tang. } d}{\text{cof. } \frac{1}{2}\theta} = \text{tang. } \beta \text{ \& fin. } l = \text{cof. } \alpha \text{ . cof. } z,$$

& nous aurons

$$\pm \text{ fin. } z + \text{tang. } \beta \text{ . cof. } z = \frac{B}{\text{cof. } \alpha \text{ . cof. } \frac{1}{2}\theta \text{ . cof. } d},$$

ou bien

$$\pm \text{ fin. } z \text{ . cof. } \beta + \text{fin. } \beta \text{ . cof. } z = \frac{B \text{ . cof. } \beta}{\text{cof. } \alpha \text{ . cof. } \frac{1}{2}\theta \text{ . cof. } d}.$$

poſant donc

$$\frac{B \text{ . cof. } \beta}{\text{cof. } \alpha \text{ . cof. } \frac{1}{2}\theta \text{ . cof. } d} = \text{fin. } \gamma,$$

on a fin. $(\beta \pm z) =$ fin. γ, ou bien auſſi fin. $[180^0 - (\beta \pm \gamma)] =$ fin. γ; d'où l'on tire les valeurs ſuivantes de l'angle z:

$$z = \pm(\beta - \gamma) \text{ et } z = \pm[180^0 - (\beta + \gamma)].$$

Donc ſi nous deſignons la ſomme des angles β & γ par Σ leur différence par Δ, nous avons cof. $z =$ cof. Δ & cof. $z = -$ cof. Σ, & conſéquemment

$$\text{fin. } l = \text{cof. } \alpha \text{ . cof. } \Delta \text{ \& fin. } l = -\text{ cof. } \alpha \text{ . cof. } \Sigma.$$

Or ce calcul a été fait dans la ſuppoſition, que la déclinaiſon de l'Aſtre & la latitude du lieu ſoient du même nom. Si elles ſont de différens noms; il eſt clair que dans le dernier réſultat il n'y a d'autre changement à faire, que de prendre la déclinaiſon de l'Aſtre & conſéquemment auſſi l'angle β negativement; moyennant quoi on a pour ce cas-là

$$\text{fin. } l = \text{cof. } \alpha \text{ . cof. } \Sigma \text{ \& fin. } l = -\text{ cof. } \alpha \text{ cof. } \Delta.$$

Corol.

Corollaires.

1.) Si l'Aſtre ſe trouve dans l'Equateur; on aura $\beta = 0$, & $\Delta = \Sigma = \gamma$. Ayant donc trouvé les deux angles α & γ par les équations:

$$\text{ſin. } \alpha = \frac{A}{\text{ſin. } \frac{1}{2}\theta} \text{ & ſin. } \gamma = \frac{B}{\text{coſ. } \alpha \,.\, \text{coſ. } \frac{1}{2}\theta},$$

on aura pour trouver les deux latitudes qui s'accordent avec l'obſervation, les équations ſin. $l =$ coſ. α coſ. γ & ſin. $l = -$ coſ. α coſ. γ; les deux latitudes ſont égales, l'une boréale, l'autre auſtrale.

2.) Notre ſolution du Problème s'applique auſſi au cas des *hauteurs corréſpondantes*, c'eſt à-dire au cas où $H = h$; ce qui préſente une pratique très-commode aux Aſtronoms-Géographes voyageurs.

Type du Calcul.

Pour éclaircir la pratique de notre méthode par quelques exemples; choiſiſſons ceux que Mr. Maskelyne à calculés d'apres la méthode de Mr. Douwes dans les *Tables requiſite to be uſed with the Nautical Ephemeris.* 2de Edit. pag. 17.

Exemple 1.

La declinaiſon du Soleil étant 20°. 41′. 0″. Boreale, on a obſervé ſous une region boréale deux hauteurs vraies du centre du Soleil 68°. 30′. 0″. & 71°. 9′. 0″., & le tems ecoulé entre elles 0^h^. 56′. 13″. On demande la latitude géographique du lieu de obſervation:

Elé-

Elémens du Calcul.

H	$= 71^0.\ 9'.\ 0''.$
h	$= 68^0.\ 30'.\ 0''.$
fin. H	$= 0,\ 9463677.$
fin. h	$= 0,\ 9304176.$
Différ.	$= 0,\ 0159501$
Somme	$= 1,\ 8767853$
$\frac{1}{2}$ Différ. = A	$= 0,\ 0079750$
$\frac{1}{2}$ Somme = B	$= 0,\ 9383926$
d	$= 20^0.\ 41'.\ 0''.$
$\frac{1}{2}\theta$ en tems	$= 0^h.\ 28'.\ 6''.$
$\frac{1}{2}\theta$ en Cercle	$= 7^0.\ 1'.\ 37''$
L. cof. d	$= 9,\ 9710655$
L. fin. $\frac{1}{2}\theta$	$= 9,\ 0875632$
L. cof. $\frac{1}{2}\theta$	$= 9,\ 9967254$
L. fin. $\frac{1}{2}\theta$ cof. d	$= 9,\ 0586287$
L. cof. $\frac{1}{2}\theta$. cof. d	$= 9,\ 9677909$

Calcul des angles α, β & γ.

L. A	$= 7,\ 9017307$
L. fin. $\frac{1}{2}\theta$. cof. d	$= 9,\ 0586287$
L. fin. α	$= 8,\ 8431020$
α	$= 3^0.\ 59'.\ 44''$
L. tang. d	$= 9,\ 5769585$
L. cof. $\frac{1}{2}\theta$	$= 9,\ 9967254$
L. tang. β	$= 9,\ 5802331$
β	$= 20^0.\ 49'.\ 35''$
L. B	$= 9,\ 9723857$
L. cof. β	$= 9,\ 9706546$
L. Numerat	$= 9,\ 9430403$
L. cof. α	$= 9,\ 9989430$
L. cof. $\frac{1}{2}\theta$. cof. d	$= 9,\ 9677909$
L. Denominat.	$= 9,\ 9667339$
L. fin. γ	$= 9,\ 9763064$
γ	$= 71^0.\ 14'.\ 45''$

Calcul de la Latitude.

Différence entre β & γ
$\Delta = 50^0.\ 25'.\ 10''$

L. cof. α	$= 9,\ 9989430.$
L. cof. Δ	$= 9,\ 8042502.+$
L. fin. l	$= 9,\ 8031932.+$
l	$= 39^0.\ 27'.\ 55''.$ Bor.

Somme de β & γ
$\Sigma = 92^0.\ 4'.\ 20''.$

L. cof. α	$= 9,\ 9989430.$
L. — cof. Σ	$= 8,\ 5582190.+$
L. fin. l	$= 8,\ 5571620.+$
l	$= 2^0.\ 4'.\ 2''.$ Bor.

Il suffit donc, que le Navigateur sache d'ailleurs que la latitude de son vaisseau surpasse $2^0.\ 4'.\ 2''.$, pour être assuré qu'elle est $39^0.\ 27'.\ 55''.$ Bor.

Exemple 2.

La déclinaison du Soleil étant $20^0.\ 0'.\ 0''.$ Australe, on a observé dans une region boréale deux hauteurs vraies du centre du Soleil $17^0.\ 13'.\ 0''.$ & $19^0.\ 41'.\ 0''$, & le tems ecoulé entre elles 1^b. On demande la latitude géographique du lieu de l'observation.

Elémens du Calcul.

$H =$	$19^0.\ 41'.\ 0''$
$h =$	$17^0.\ 13'.\ 0''$
fin. $H =$	0,3368214
fin. $h =$	0,2959859
Différence $=$	0,0408355
Somme $=$	0,6328073
$\frac{1}{2}$ Différ. $= A =$	0,0204177
$\frac{1}{2}$ Somme $= B =$	0,3164037
$d =$	$20^0.\ 0'.\ 0''$
$\frac{1}{2}\theta$ en tems $=$	$0^b.\ 30'.\ 0''$
$\frac{1}{2}\theta$ en Cercle $=$	$7^0.\ 30'.\ 0''$
L. cos. $d =$	9,9729858
L. fin. $\frac{1}{2}\theta =$	9,1156977
L. cos. $\frac{1}{2}\theta =$	9,9962686
L. fin. $\frac{1}{2}\theta$. cos. $d =$	9,0886835
L. cos. $\frac{1}{2}\theta$. cos. $d =$	9,9692544

Calcul des angles α, β & γ.

L. A $=$	8,3100068
L. fin. $\frac{1}{2}\theta$ cos. $d =$	9,0886835
L. fin. $\alpha =$	9,2213233
$\alpha =$	$9^0.\ 34'.\ 56''.$
L. tang. $d =$	9,5610659
L. cos. $\frac{1}{2}\theta =$	9,9962686
L. tang. $\beta =$	9,5647973
$\beta =$	$20^0.\ 9'.\ 31''.$
L. B $=$	9,5002415
L. cos. $\beta =$	9,9725464
L. Numerat. $=$	9,4727879
L. cos. $\alpha =$	9,9938979
L. cos. $\frac{1}{2}\theta$ cos. $d =$	9,9692544
L. Denominat. $=$	9,9631523
L. fin. $\gamma =$	9,5096356
$\gamma =$	$18^0.\ 51'.\ 50''.$

Calcul de la Latitude.

Différence entre β & γ $\Delta = 1^{0}.\ 17'.\ 41''.$	Somme de β & γ $\Sigma = 39^{0}.\ 1'.\ 21''.$
L. cof. $\alpha = 9,9938979.$	L. cof. $\alpha = 9,9938979.$
L. $-$ cof. $\Delta = 9,9998891. -$	L. cof. $\Sigma = 9,8903644. +$
L. fin. $l = 9,9937870. -$	L. fin. $l = 9,8842623. +$
$l = 80^{0}.19'.53''.$ Auftr.	$l = 50^{0}.\ 0'.\ 4''.$ Bor.

Il ſuffit donc, que le Navigateur ſache d'ailleurs qu'il eſt dans l'Hemiſphére boréal, pour être aſſuré que la latitude de ſon vaiſſeau eſt $50^{0}.\ 0'.\ 4''.$ Bor.

Les latitudes que nous venons de trouver pour ces deux exemples, s'accordent parfaitement avec celles que Mr. Maskelyne a trouvées par la regle de Mr. Douwes, dans l'application de la quelle au ſecond exemple Mr. Maskelyne a ſuppoſé que la latitude étoit déja connue à 40 minutes près au lieu que dans la pratique de notre regle il ſuffiſoit pour cet exemple de ſcavoir généralement qu'elle eſt boréale.

MÉMOIRE

sur la différence en Longitude des Obſervatoires de Paris & de Greenwich, avec les obſervations d'où elle a été déduite, & une critique raiſonnée de celle que le Général-Major Roy a conclue de ſes Opérations géodéſiques.

Par

M. le Comte de Brühl.

Préſenté à l'Académie le 26 Janvier 1795.

Paſſant par Paris vers la fin de 1785 & poſſédant encore alors un excellent chronomètre d'Emery, dont j'ai été dépouillé environ ſept ans après par une bande de filoux en ſortant en plein jour de l'hôtel de M. le Duc de Marlborough, je tâchai de profiter de cette occaſion pour déterminer la différence des méridiens entre deux des plus célèbres obſervatoires de l'Europe. J'arrivai à Paris le 13 Novembre & le ſurlendemain je paſſai à l'obſervatoire, où l'obligeante prévénance de M. Méchain me fournit tous les moyens qu'il me falloit pour cet objet. Je donnerai ici les obſervations, qui s'y rapportent, dans le plus grand détail, parceque ce n'eſt que par une expoſition ample & fidèle qu'on peut écarter les doutes raiſonnables des juges éclairés, & obtenir leur ſuffrage à la ſuite d'un examen réflechi des preuves qu'on ſoumet à leur jugement.

Année 1785.			
Mois Nov. 15.	$0^h.$	$51'.$ $0'',0$	Temps indiqué par la Pendule de M. Méchain.
	—	$2.$ $11,6$	accélération de la Pendule.
	$0.$	$48.$ $48,4$	Temps moyen.
	$0.$	$36.$ $8,0$	Temps marqué par le chronomètre à l'inſtant de la comparaiſon.
	$0.$	$12.$ $40,4$	ſon retard au méridien de l'obſervatoire.
Nov. 23.	$0.$	$9.$ $0,0$	Temps à la Pendule.
	—	$2.$ $8,92$	ſon accélération
	$0.$	$6.$ $51,08$	Temps moyen.
	$23.$	$54.$ $10,60$	*idem* marqué par le chronomètre
	$0.$	$12.$ $40,48$	ſon retard.
	$0.$	$12.$ $40,40$	*idem* le 15.
		$0,08$	ſomme de ſon retard en 8 jours: par conſéquent
		$-0,01$	ſon retard diurne.
Déc. 5	$0.$	$2.$ $47,6$	Rétard au méridien de mon obſervatoire Doverſtreet à Londres.
	$0.$	$12.$ $40,6$	*idem* pour Paris à l'inſtant du midi vrai (a).
		$9.$ $53,0$	différence des méridiens.
		$-33,6$	longitude de mon obſervatoire à l'Oueſt de Greenwich.
		$9.$ $19,4$	différence en longitude entre Greenwich & Paris.

Ob-

(a) Car $12'.$ $40'',48$ retard pour le jour de la derniere obſervation de Paris $+$ $0'',12$ ſomme du retard journalier en 12 jours $= 12'.$ $40'',6.$

Obſervations de M. Méchain avec le chronomètre du Préſident de Saron.

1787. à Londres.

Nov.	22	+ 2,88	accélération moyenne.
	25	1,91	+ 2″,3.
Déc.	2	2,1	+ 3,25 accélération diurne par un milieu des moyennes.
	3	2,3	

à Paris.

Déc.	11	+ 3″,2	variation moyenne.
	12	4,8	+ 4,2.
	13	4,0	
	14	4,7	

1787.

Le 4 Déc.	accélération du chronomètre au méridien de Greenwich	10′. 6″,4
Le 11 Déc.	*idem* - - de Paris	1. 9,5.
		8. 56,90.
Pour 7 jours,	ſomme de ſon accélération	+ 22,85.
	Différence en longitude -	9. 19,75.
	La même par moi - -	9. 19,40.
	La même par un milieu des deux	9. 19,575
	La même ſelon le Général Roy (*)	9. 18,803
	Différence de la ſienne en défaut -	0,772.

Si le réſultat moyen tiré de mes obſervations & de celles de M. Méchain eſt exact, celui de M. Roy eſt in-

(*) Transactions philoſophiques pour l'année 1790.

conteſtablement trop foible. M. Méchain penſa d'abord que cela venoit de l'hypothèſe pour l'applatiſſement de la terre, que le Général a employée dans la réduction de ſes triangles, & il les calcula ſur le rapport de 229 à 230, d'où il tira 9′. 20″ +. Cette explication ſeroit la véritable, ſi la longitude des lieux ſitués à l'Oueſt de Greenwich que M. Roy a déterminée par ſes opérations trigonomètriques, en y employant la même hypothèſe dont il s'étoit ſervi pour la longitude de Paris, étoit auſſi trop foible proportionnellement à leur diſtance. Mais comme on le verra bientôt par le tableau ſuivant, ſes concluſions pour ces lieux différent à très peu près autant en excès des miennes, que la ſienne pour Paris eſt en défaut de la nôtre; circonſtance qui vient encore à l'appuy de notre détermination.

Obſervations pour déterminer la longitude de l'obſervatoire du Roi de la Grande-Brétagne à Richmont, & de celuy de M. Aubert à Highboury.

Pour obtenir la premiere de ces déterminations, j'ai eu recours aux bontés de M. le Duc de Marlborough, qui ayant un obſervatoire à Sionhill à une petite diſtance de Richmond, s'y eſt ſouvent transporté avec un excellent chronomètre.

Année 1793.		
Mois Juin 10.	$8^h. 29'. 0''.$	Temps à la Pendule ſidérale du Duc.
	30,44	ſon retard.
	8. 29. 30,44	Temps ſidéral au méridien de de Sionhill.
(a)	8. 30. 12,44	*Idem* - - - de Doverſtreet
	42,0	différence des méridiens (b).
	+ 33,6	longitude de Doverſtreet.
	1. 15,6	longitude de Sionhill.
	— 1,5	Richmond à l'Eſt de Sionhill par les obſervations du Duc.
	1. 14,1	longitude de Richmond.
	1. 14,82	*Idem* par le Général Roy.
	0,72	Différence en excès.

Année

(a) La comparaiſon fut faite avec le premier des trois gardetemps de Mudge, (voyés les rapport du comité de la Chambre baſſe) environ 3 heures après l'obſervation du paſſage du ☉ qui m'avoit donné 3'. 6'',36. pour ſon avance & 1'',2. pour ſon accélération diurne.

(b) En 1789. le réſultat moyen de quatre procédés ſemblables avec des chronomètres avoit donné 41'',91, le plus fort étant 42'',1 & le plus foible 41'',76.

Année

Année 1793.

Mois. Juin 16.	$8^h.50'.\ 0'',0$	Temps que marquoit la Pendule de M. Aubert.
	— 2. 13, 1	ſon accélération.
	8. 47. 46, 9	Temps ſidéral au méridien de Highbury.
	8. 47. 35, 9	*Idem* - - - de Doverſtreet
	11, 0	différence des méridiens.
	33, 6	longitude de Doverſtreet.
	22, 6	longitude de Highbury.
	23,37	la même par le Général Roy.
	0,77	différence en excès.

Voilà donc des discordances des réſultats de ce ſavant avec les miens en ſens oppoſé, celles pour deux lieux à l'Oueſt étant en excès, à très peu près autant que celle, qui ſe rencontre entre ſa détermination & la mienne pour Paris à l'Eſt de Greenwich, eſt en défaut. Or s'il m'eſt permis de prétendre à quelque confiance dans mes concluſions, il s'enſuit que le Général a placé Greenwich trop à l'Eſt d'environ $0''$, 75 en temps ou $11''$, 25 en arc. Cette erreur eſt bien legère & ne mériteroit pas qu'on la relévat, ſi l'appareil diſpendieux, l'habileté reconnue des opérateurs, l'immenſe travail auquel ils ſe ſont livrés, la perfection d'un nouvel inſtrument que le célèbre Ramsden a conſtruit exprès pour leurs obſervations, & enfin le but de lier par là les obſervatoires de Greenwich & de Paris, n'y attachoient une importance particuliere.

Je

Je ſoupçonne que cette erreur provient des réfractions terreſtres, dont les effets très variables ont influé ſur la chaine des triangles, qui lient ſa baſe méſurée dans la plaine de la Bruyere de Hounslow à l'obſervatoire de Greenwich. Cet inconvenient inſéparable d'opérations géodéſiques, en excluera peut-être pour toujours cette préciſion à laquelle on aſpire. Les ſecours que fournit l'aſtronomie pour le perfectionnement de la géographie conduiſent (comme les exemples allegués le prouvent) avec plus de facilité & de promtitude à des réſultats beaucoup plus certains, & depuis que les inſtrumens pour la méſure du temps ont été portés par le célèbre Mudge à un degré de perfection dont on ne les croyoit pas ſusceptibles, un ſeul obſervateur pourra faire plus de bonne beſogne en un an, que pluſieurs n'en expédieroient en pluſieurs années par des opérations géodeſiques. Loin donc de borner l'uſage de ces excellentes machines à la navigation, où ſans contredit elles peuvent rendre de bons ſervices, mais pour laquelle elles ne ſont pas indiſpenſables, c'eſt au perfectionnement de la géographie qu'il importeroit ſurtout de les employer.

J'ai l'honneur de préſenter à l'Académie quelques obſervations de la Chèvre au deſſus & au deſſous du Pole, avec les déductions que j'en ai faites & pour la latitude de mon obſervatoire & pour la quantité de la réfraction à environ 7^{0}. $30'$ de hauteur.

1794. 27 Juin. Face du cercle à l'Eſt. Bar. 30, 9. Therm. 60°.

Hauteur obſervée au deſſous du Pole	7°	29′	30″, 25
Réfraction actuelle	— 7,	0,	90
	7.	22.	29. 35

28 Juin. Face du cercle à l'Oueſt. Bar. 29, 75. Therm. 60°, 5.

Hauteur obſervée au deſſous du Pole	7°	28′	29″, 25
Réfraction actuelle - - - -	— 6.	45,	90
	7.	21.	43, 35
leur ſomme -	14.	44.	12, 70
Hauteur vraie	7.	22.	6, 35

27 Juin. Face du cercle à l'Eſt. Barom. 31, 2. Therm. 69°, 5.

Hauteur obſervée au deſſus du Pole	84°	9′	29″, 0
Réfraction - - -	— 5,	85	
	84.	9.	23, 15

28 Juin. Face du cercle à l'Oueſt. Bar. 30, 7. Therm. 68°.

Hauteur obſervée au deſſus du Pole	84°	10′	17″, 0
Réfraction - - -	— 5,	79	
	84.	10.	11, 21
leur ſomme	168.	19.	34, 36
Moitié ou hauteur vraie (*a*)	84.	9.	47, 18
ſon ſupplement	95.	50.	12, 82
Hauteur vraie au deſſous du Pole	7.	22.	6, 35
Somme - - - - -	103.	12.	19, 17
Dont la moitié donne la latitude	51.	36.	9, 585

Qui n'eſt que de 0″, 06 plus forte que celle que j'ai concluë des obſervations de l'année paſſée, que j'employerai aux mêmes obſervations pour en déduire la réfraction actuelle dans les hauteurs obſervées de l'étoile au deſſous du Pole.

Com-

Complément de (*a*)	
5°.50′.12″,82	vraie diſtance au Zénit
38. 23. 50, 46	Colatitude
44. 14. 3, 38	Diſtance au Pole de l'étoile
51. 36. 9, 54	Latitude de l'obſervatoire
7. 22. 6, 26	vraie hauteur de l'étoile ſous le Pole 7°.22′.6″,26

(*) Le 27 Juin.

7°.29′. 6″,73	hauteur obſervée & le 28 Juin	7. 28. 52, 77	
7. 0, 47	réfractions actuelles	6. 46, 51	
7. 0, 90	réfractions de cy deſſus	6. 45, 90	
en excès 0, 43	différences	en défaut 0, 61	

Je me ſuis ſervi des réfractions moyennes de Bradley & de la XXIII. des tables de Maskelyne dans les corrections pour le Baromètre. D'auſſi légères différences en ſens oppoſé offrent une nouvelle confirmation de l'exactitude avec laquelle le premier de ces célèbres aſtronomes a conſtruit ſa table.

(*) Voicy comment j'ai obtenu ces deux quantités. J'ai ſouſtrait de 7°. 22′. 29″, 35 — 7°. 21′. 43″, 35, j'ai enſuite pris la moitié de leur différence, ce qui m'a donné 23″ pour l'erreur de la ligne de foy. Le même procédé pour les obſervations au deſſus du Pole dépouillées de l'effet de la réfraction m'a donné 24″, 03, & le moyen arithmetique des deux erreurs = 23″. 52; c'eſt celui que j'ai appliqué à chacune des deux obſervations ſous le Pole.

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À ST. PÉTERSBOURG
EN MDCCXCI.

D'après le nouveau Stile.

Présenté à Académie le 17 Mai 1792.

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrêmes, la variation, le milieu & la hauteur moyenne du Baromètre pour chaque mois de l'année 1791.

Mois.	Au plus haut		Au plus bas		Variation.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour & heure	P. cent.	jour & heure	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier	28.42	le 2 à 9h.m.	27.27	le 26 à 4h.m.	115	27.84	27.956
Février	28.90	le 28 à 3h.s.	27.28	le 1 à 0h.m.	162	28.09	28.172
Mars	28.77	le 26 à 12h.m.	27.22	le 5 à 3h.s.	155	27.99	28.131
Avril	28.63	le 3 à 9h.m.	27.77	le 11 à 3h.m.	86	28.20	28.157
Mai	28.52	le 1 à 6h.m.	27.52	le 3 à 4h.m.	100	28.02	28.077
Juin	28.56	le 5 à 10h.m.	27.46	le 10 à 4h.s.	110	28.01	28.014
Juillet	28.33	le 22 à 11h.m.	27.68	le 11 à 1h.s.	65	28.00	28.087
Août	28.57	le 12 à 11h.m.	27.57	le 30 à 8h.s.	100	28.07	28.251
Septembr.	28.74	le 25 à 12h.m.	27.38	le 18 à 7h.m.	136	28.06	28.053
Octobre	28.73	le 29 à 2h.s.	27.49	le 22 à 6h.m.	124	28.11	28.123
Novembr.	28.58	le 24 à 9h.s.	26.96	le 29 à 6h.m.	162	27.77	27.970
Décembr.	28.59	le 22 à 4h.s.	27.19	le 3 à 3h.s.	140	27.89	28.049

m. signifie *matin* ou *avant-midi* & s. *soir* ou *après-midi*.

2.)

a.) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a surpassé quelques divisions principales de l'échelle, avec la hauteur qui répond à la moitié du mois.

Mois.	Au dessus de 27. 80 jours.h.	27. 90 jours.h.	28. 00 jours.h.	28. 10 jours.h.	28. 20 jours.h.	un demi-mois au dessus de Pouces. mill.
Janvier	21. 18	19. 0	17. 3	13. 18	8. 0	28. 065
Février	20. 12	18. 6	16. 18	16. 0	14. 21	28. 255
Mars	24. 3	23. 9	21. 15	18. 9	12. 15	28. 140
Avril	29. 12	26. 12	22. 0	17. 9	12. 15	28. 136
Mai	28. 3	26. 0	20. 9	14. 18	9. 3	28. 091
Juin	23. 12	21. 3	15. 15	11. 18	5. 0	28. 029
Juillet	27. 18	24. 6	20. 6	19. 0	11. 9	28. 155
Août	30. 0	29. 9	25. 15	22. 12	18. 21	28. 280
Septbr.	21. 21	18. 9	15. 15	15. 0	12. 9	28. 100
Octobr.	24. 8	22. 18	19. 9	16. 15	13. 3	28. 124
Novbr.	21. 18	18. 3	12. 21	9. 3	8. 9	27. 967
Décbr.	22. 18	21. 21	19. 18	16. 21	11. 15	28. 050
Année 1791.	295, 18	269, 0	227, 0	191, 3	138, 0	182½ jours au dessus de 28,117
du 1 Nov. 1790. au 1 Mai 1791.	139, 21	126, 6	112, 3	95, 6	71, 18	90½ jours au dessus de 28, 121
du 1 Mai au 1 Nov. 1791.	155, 9	141, 21	116, 21	99, 15	69, 21	92 jours au dessus de 28, 123

La plus grande élévation du mercure dans le Baromètre = 28. 90 pouces de France, le 28 Février à 3 heures après-midi. Thermomètre de Délisle 156^{d}., ciel ſerein & vent du SE.

La plus petite élévation = 26, 96, le 29 Novembre à 6 heures du matin. Thermomètre 152^{d}., ciel couvert, neige, pluie & vent de l'Eſt.

La variation totale = 1, 94 & le milieu arithmetique = 27, 93.

La hauteur moyenne, c'eſt à dire la ſomme de toutes les hauteurs obſervées, diviſée par le nombre des obſervations.

I. pour toute l'année = 28, 086.

II. pour l'hyver de 1790, ou depuis le 1 Novembre 1790 jusqu'au 1 Mai 1791 = 28. 081.

III. pour l'été de 1791, ou pour l'eſpace de temps du 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1791 = 28. 101: un peu plus grande que celle de l'hyver, ce qui eſt contraire à ce qu'on obſerve ordinairement.

La hauteur moyenne du Baromètre a été la plus grande en Août, & la plus petite en Janvier: & la différence eſt = 0, 295 pouces, ou de 3 lignes & demi.

3.) Variations conſidérables & ſubites.

Mois.	Temps jour.	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
Janv.	25.	o. m.	27	28. 28	—101	156	SOu. ff.	c.couv.enſuite neige & pluie.
	26.	3. m.		27. 27		148	SOu.	beauc.de neige.c.en part. ſer.
Févr.	1.	o. m.	24	27. 27	+ 46	152	SE.	c. couvert, neige.
	5.	o. m.		28. 07		157	calme.	c. couvert, neige.
	6.	o. m.		28. 53		162	calme.	ciel couvert.
	6.	12. m.		28. 57		158	calme.	ciel couvert.
	15.	10. m.	21	27. 84	— 52	154	NOu.	c.couv. enſuite neige & vent.
	16.	7. m.	35	27. 32	+ 50	148	Ou. fort.	pluie, ciel couvert.
	17.	6. s.	40	27. 82	+ 59	160	Oueſt.	c. en partie ſerein.
	19.	10. m.		28. 41		162	calme.	brouillard, enſuite c. ſerein.
	3.	10. s.	29	28. 32	—105	152	SE. fort.	c. couvert, neige & pluie.
	5.	3. m.		27. 27		151	Ou. ff.	c. couvert, enſuite ſerein.
	7.	o. m.	48	27. 44	+ 85	153	Nord.	c. couv. un peu de neige.
	9.	o. m.		28. 29		165	Nord.	c. en partie ſerein.
Mars	9.	12. m.	21	28. 29	— 82	156	NOu.	c. couvert & neige.
	10.	9. m.	38	27. 47	+ 67	147	NOu. fort.	c. en partie couvert.
	11.	11. s.		27. 14		167	Nord.	c. ſerein.
	15.	9. s.	18	28. 14	— 61	150	calme.	ciel couvert.
	16.	3. s.		28. 53		145	Oueſt.	ciel en partie ſerein.
	17.	12. m.	36	27. 53	+ 56	148	N. fort.	c.couv.neige,enſuite c.ſerein.
	18.	12. s.		28. 09		160	Nord.	ciel en partie ſerein.
	24.	6. m.	42	28. 07	+ 67	152	Sud.	ciel couvert.
	25.	12. s.		28. 74		154	SE.	ciel ſerein.

3.) Va-

3.) Variations conſidérables & ſubites.

Mois.	Temps jour heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
Mai.	1. 12. m.	24	28. 51	−54	141	NOu. fort.	ciel ſerein.
	2. 12. m.	24	27. 97	−36	135	NOu. fort.	ciel en partie ſerein.
	3. 12. m		27. 61		147	NE. fort.	ciel couv. pluie, neige, grêle.
Sept.	14. 6. m.	18	28. 17	−50	136	Ou. fort.	ciel couv. & un peu de pluie.
	14. 12. s.		27. 67		134	Ou. fort.	ciel couvert.
	20. 6. m.	12	27. 45	+45	139	Ou fort.	c. couvert, pluie.
	20. 6. s.		27. 90		142	Oueſt.	c. en partie couvert.
	23. 0. m.	24	27. 62	+46	145	Oueſt.	beaucoup de pluie, c. couv.
	24. 0. m.	24	28. 08	+52	146	Oueſt.	c. en partie couvert, pluie.
	25. 0. m.	12	28. 60	+14	150	calme.	ciel ſerein.
	25. 12. m.		28. 74		141	SOu.	c. ſerein.
Oct.	19. 2. s.	48	28. 18	−64	150	NE.	c. ſerein, enſuite nuages.
	21. 2. s.		27. 54		145	Sud fort.	c. couvert, neige & pluie.
	25. 6. s.	30	27. 90	+64	149	SOu.	neige, grêle, c. en part. couv.
	26. 12. s.		28. 54		154	Nord.	ciel ſerein.
Nov.	2. 9. m.	32	28. 38	−55	155	NOu.	c. ſerein, enſuite couvert.
	3. 5. s.		27. 83		153	Ou. fort.	c. couvert, neige.
	11. 12. s.	24	28. 01	+53	149	NE.	c. couvert, pluie & neige.
	12. 12. s.	48	28. 54	−64	162	Eſt.	c. ſerein, enſuite couv. & neige
	14. 12. s.		28. 90		150	Oueſt.	c. couvert.
	25. 12. m.	24	28. 57	−64	153	Oueſt.	c. couvert.
	25. 12. s.		28. 37		156	SE. fort.	c. couvert, enſuite neige.
	26. 12. s.		27. 73		150	SE. ff.	pluie, ciel couvert.

3.) Va-

3.) Variations conſidérables & ſubites.

Mois.	Temps jour.	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Diff. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
	27.	12. m.		27. 82		150	Oueſt.	neige, c. en partie couvert.
	27.	12. s.	24	27. 70	— 65	153	Eſt.	c. couvert.
Jov.	28.	12. s.		27. 05		152	E.	ciel couvert.
	29.	6. m.	42	26. 96	+ 51	152	E.	c. couvert, neige.
	30.	12. s.		27. 47		152	Ou.	c. couvert.
	1.	12. s.	39	27. 70	— 50	154	Eſt.	c. couvert, enſuite neige.
	3.	3. s.	30	27. 20	+ 53	149	E. fort.	neige, c. couvert.
	4.	9. s.		27. 73		159	NOu.	c. en partie couvert.
	5.	3. s.	42	27. 51	+ 96	156	E. Ou.	c. couvert & neige.
	7.	9. m.		28. 47		170	E. fort.	c. en partie ſerein.
Déc.	7.	9. m.	56	28. 47	—105	170	E. fort.	c. en partie ſer. enſuite neige, grêle.
	9.	3. s.		27. 42		148	SE. ff.	pluie & ciel couvert.
	11.	8. m.	16	27. 41	+ 63	153	Oueſt.	beaucoup de neige, c. en partie couvert.
	11.	12. s.		28. 04		155	Sud.	c. couvert neige.
	12.	5. s.	21	27. 74	+ 48	153	Nord.	neige, c. couvert.
	13.	2. s.		28. 22		157	calme.	c. en partie couvert.
	22.	4. s.	48	28. 58	— 67	172	SE.	c. en partie couvert.
	24.	4. s.		27. 91		154	Eſt.	neige & ciel couvert.

Le ſigne — indique les deſcentes, & + les montées.
ff. marque un vent très fort.

Les déſcentes les plus conſidérables ont été ſuivant ce tableau de $1\frac{1}{20}$ pouces ou de $12\frac{1}{2}$ lignes en 29 heures, le 3 Février; encore de $1\frac{1}{20}$ pouces en 56 heures, le 7 Décembre; & de $1\frac{1}{100}$ pouce en 27 heures le 25 Janvier.

Les montées n'ont point été auſſi ſubites & conſidérables. La plus forte eſt de $\frac{96}{100}$ pouces, ou de $11\frac{1}{2}$ lignes en 42 heures, le 5 Décembre: enſuite de $\frac{85}{100}$ pouces, ou de $10\frac{1}{4}$ lignes en 48 heures, le 7 Février. En général les variations les plus conſidérables tombent en hyver dans les premiers & le dernier mois de l'année.

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrêmes, leur différence, & l'état moyen du froid & de la chaleur pour chaque mois de l'année 1791.

Mois.	Hauteurs extrêmes. Au plus bas: Degré.	jour & heure.	Au plus haut: Degré.	jour & heure.	Différence. Degré	Etat moyen. Froid moyen. Degré.	Chaleur moyen. Degré.
Janvier	162	le 21 à 6 h. m	147	le 26 à 2 h. s	15	155,6	152,3
Février	169	le 10 à 6 h. m	146	le 16 à 2 h. s	23	160,2	152,0
Mars	172	le 12 à 6 h. m	144	le 16 à 2 h. s le 29 à 2 h. s	28	160,1	150,3
Avril	160	le 4 à 6 h. m	122	le 25 à 2 h. s	38	150,2	139,6
Mai	156	le 4 á 6 h. m	125	le 18 à 2 h. s	31	144,5	136,5
Juin	142	le 1 & le 4 à 6 h. m.	108	le 15 à 2 h. s	34	131,1	121,9
Juillet	135	le 1 à 6 h. m le 25 à 10 h. s	112	le 17 à 2 h. s	23	129,2	120,7
Août	141	le 24 à 6 h. m	115	le 3 & le 19 à 2 h. s	26	132,5	123,3
Sept.	153	le 25 à 6 h. m	122	le 5 à 2 h. s	31	140,7	132,6
Octobr.	159	le 18 à 6 h. m	131	le 12 à 2 h. s	28	148,5	142,7
Novem.	167	le 7 à 9 h. s	142	le 19 à 2 h. s	25	154,8	150,8
Décem.	173	le 7 à 6 h. m le 22 à 9 h. m	148	le 8 à 9 h. s le 9 à 6 h. m	25	158,4	154,3

Dans les deux colonnes de l'état moyen, la quatrieme figure feparée du nombre des degrés par une virgule, marque des dixiemes parties d'un degré de Délisle.

h. m. indique que c'eſt l'heure du matin, ou avant midi &

h. s. ſignifie l'heure de l'après midi ou du ſoir.

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont surpassé quelques divisions principales du Thermomètre de Délisle.

Mois.	Le froid a été plus grand que					La chaleur a été plus grande que					
	170 jours.	160 jours.	150 jours.	140 jours.	130 jours.	110 jours.	120 jours.	130 jours.	140 jours.	150 jours.	160 jours.
Janv.		2	30	31	31					8	31
Févr.		16	26	28	28					10	27
Mars	2	14	31	31	31					17	31
Avril		1	18	29	30			6	11	30	30
Mai			10	20	31			5	23	30	31
Juin				2	19	3	11	28	30	30	30
Juillet					15		16	31	31	31	31
Août				2	20		7	30	31	31	31
Sept.			3	14	30			11	26	30	30
Octobr.			15	27	31				13	31	31
Nov.		8	24	30	30					12	29
Déc.	3	8	31	31	31					6	26
Année. 1791.	5	49	188	245	327	3	34	111	165	266	358
du 1 Nov. 1790. au 1 Mai 1791.	2	46	160	180	181			6	11	84	178
du 1 Mai au 1 Nov. 1791.			28	65	146	3	34	105	154	183	184

On

On voit par ces tableaux qu'il n'y a pas eu des grands froids dans toute l'année: cependant il a gélé en 188 jours, qui font plus que la moitié de l'année. L'hyver de 1790 à 1791 a été extraordinairement, & même beaucoup plus doux que celui de 1789 à 1790: mais l'été de 1791 a été plus chaud & plus agréable que celui qui lui a précédé.

Le plus grand froid n'a été que de 173^0, qui répondent à $12\frac{1}{3}$ degrés de froid d'après la diviſion de Réaumur, on l'a obſervé en deux jours: le 7 Décembre à 6 heures du matin: Baromètre 28, 45, ciel ſerein & vent de l'Eſt fort: enſuite le 22 Décembre à 9 heures avant-midi, Baromètre 28. 52. calme, brouillard, enſuite ciel ſerein orné d'un parhélie.

La plus grande chaleur de 108^0, ou de $22\frac{1}{2}$ degrés d'après Réaumur, a été obſervée le 15 Juin à 2 heures après midi. Baromètre 28. 14. calme parfait & ciel ſerein.

La différence entre ces deux extrêmes $= 65^0$ de Délisle qui font $34\frac{2}{3}$ degrés de Réaumur.

Le froid moyen, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermométriques obſervées à 6 heures du matin & à 10 heures du ſoir, diviſée par le nombre des obſervations, qu'on trouve dans la cinquieme colonne de la premiere table, a été le plus grand en Février & en Mars, & le plus petit en Juillet. Sa valeur eſt

1.) pour toute l'année $= 147^0, 1$ qui répond à $1\frac{1}{2}$ degré de chaleur d'après le thermomètre de Réaumur.

2.) pour l'hyver de 1790 à 1791, ce froid moyen a été depuis le 1 Novembre 1790 jusqu'au 1 Mai 1791 $= 156^0, 2$, & depuis le 1 Décembre 1790 jusqu'au 1 Avril 1791 $= 157^0, 9$.

3.) pour l'été de 1791, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre = 137°, 8 & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre = 133, 4, qui répondent à 6, 5 & 8, 2 degrés de chaleur de Réaumur.

De même la chaleur moyenne, par laquelle je comprend la somme de toutes les hauteurs thermométriques observées à 2 heures après midi, divisée par le nombre des observations, & qu'on trouve à la derniere colonne de la premiere table, est la plus grande en Juillet, & la plus petite en Décembre. On la trouve

1.) pour toute l'année = 139°, 7 ou de $5\frac{1}{2}$ degrés de Réaumur.

2.) pour l'été de 1791, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre = 129°, 6, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre = 124, 6, qui répondent à 10, 9 & 13, 6 degrés de Reaumur.

3.) pour l'hyver de 1790 à 1791, depuis le 1 Novembre 1790 jusqu'au 1 Mai 1791 = 149°, 7 ou de 0, 1 degré de chaleur de Réaumur, & depuis le 1 Décembre 1790 jusqu'au 1 Avril 1791 = 151, 6, ou de 0, 8 degré de froid de Réaumur.

Le nombre des jours, où il a gélé continuellement a été

1.) dans toute l'année = 99.

2.) pendant l'hyver de 1790 à 1791, depuis le 1 Novembre 1790 jusqu'au 1 Mai 1791 = 100.

3.) pendant l'été de 1791, il a gélé en 28 jours, mais parmi eux, il n'y a eu qu'un seul, savoir le 4 Mai, où la gelée a été continuelle.

Le

Le nombre des jours enfin, où il n'a gélé point du tout, a été

1.) dans toute l'année = 177.

2.) pendant l'hyver du 1 November 1790 au 1 Mai 1791 = 21 &

3.) pendant l'été du 1 Mai au 1 Nov. 1791 = 153.

L'intervalle entre la premiere gelée du 27 Septembre de l'année 1790 & la derniere gelée du 11 Mai 1791 eſt de 226 jours, cette derniere gelée fut à 6 heures du matin de 152 degrés de Délisle: Baromètre 28, 34, vent du NOu. ciel ſerein.

Il recommença à géler le 25 Septembre matin. Thermomètre 153, Baromètre 28, 68, ciel ſerein & calme. L'intervalle entre la derniere gelée du 11 Mai & cette premiere n'eſt donc que de 137 jours.

3.) Énumeration détaillée des froids, obſervés pendant l'hyver de 1790 à 1791, ou depuis le 1 Novembre 1790 jusqu'au 1 Mai 1791, ce qui fait un intervalle de 181 jours.

Le froid a ſurpaſſé 170 degrés de Délisle en 2 jours le 12 & 21 Mars.

	Le froid a été entre	jours.
160 & 170	Le 7. 8. 12. 13. 14. 29. 30 Novembre, le 1. 14. 20. 21. 28. 29. Décembre, le 20 21 Janvier, le 6. 7. 8. 10. 14. 17 — 26. 28 Février, le 1. 2. 8. 9. 11. 14. 19. 20. 22. 23. 26. 27 Mars & le 4 Avril - - - -	44
		150

		jours.
150 & 160	Le 1 — 6. 9. 10. 11. 15. 16. 17. 19. 20. 21. 23. 26. 27. 28 Novembre, le 2. 5 — 13. 15 — 19. 22 — 27. 30. 31 Déc. le 1 — 19. 22 — 25. 27 — 31 Janvier, le 1 — 5. 9. 11. 13. 15. 27 Févr, le 3 — 7. 10. 13. 15 — 18. 24. 25. 28 — 31 Mars, & le 1. 2. 3. 5. 6. 8. 9. 11 — 19. 30 Avril - - - - - - -	114

4.) Énumeration détaillée des chaleurs obſervées pendant l'été de 1791, c'eſt à dire depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1791, ce qui fait un intervalle de 184 jours.

La chaleur a ſurpaſſé 110 degrés de Délisle en 3 jours, le 15. 16. 17 Juin.

La chaleur a été entre		jours.
120 & 110	Le 8. 9. 13. 14. 18. 19. 21. 28 Juin, le 4. 5. 13 — 18. 22. 23. 24. 27 — 31 Juillet, & le 1. 2. 3. 8. 18. 19. 21 Août - - - - - -	31
130 & 120	Le 18. 19. 20. 24. 25 Mai, le 2. 4. — 7. 10. 11. 12. 20. 22 — 27. 29. 30 Juin, le 1. 2. 3. 6 — 12. 19. 20. 21. 25. 26 Juillet, le 4 — 7. 9 — 17. 20. 22. 24 — 31 Août & le 1 — 8. 12. 13. 14 Septembre - - - - -	71
140 & 130	Le 2. 7. 11 — 17. 21. 22. 23. 26 — 31 Mai, le 1. 3 Juin, le 23 Août, le 9. 10. 11. 15 — 22. 26 — 29 Septembre, & le 1. 4. 7 — 14. 22. 23. 24 Octobre - - - - - -	49
150 & 140	Le 1. 3. 5. 6. 8. 9. 10 Mai, le 23. 24. 25. 30 Sept. & le 2. 3. 5. 6. 15 — 21. 25 — 31 Octobre - - - - - - - - - - - - -	29

III. Vent.

1.) Tableau général de la force & de la direction des vents, pour chaque mois de l'année 1791.

Mois.	Calme	Vent doux	Vent fort	Vent très fort	Nord.	NE.	Eſt.	SE.	Sud.	SOu.	Oueſt.	NOu.
	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janv.	0	15	15	1	0	0	2	16	7	5	1	0
Févr.	10	16	2	0	0	0	3	10	4	4	5	2
Mars	11	9	10	1	6	0	4	6	3	1	5	6
Avril	7	18	5	0	5	1	2	3	3	3	7	6
Mai	5	14	11	1	1	6	2	2	3	4	9	4
Juin	10	9	10	1	0	1	3	4	3	9	10	0
Juillet	11	9	10	1	0	4	6	1	3	2	13	2
Août	9	12	10	0	1	2	4	1	1	7	13	2
Sept.	5	14	11	0	0	0	1	1	5	4	15	4
Octob.	8	18	5	0	3	4	3	0	3	8	8	2
Nov.	7	15	6	2	0	0	10	4	4	2	7	3
Déc.	5	21	3	2	1	1	9	9	2	1	7	1
Année 1791.	88	170	98	9	17	19	49	57	41	50	100	32
du 1 Nov. 1790. au 1 Mai. 1791.	46	84	46	5	12	3	18	48	25	27	29	19
du 1 Mai au 1 Nov. 1791.	48	76	57	3	5	17	19	9	18	34	68	14

2.) Rapport de la force des vents & des quatre plages: tiré du Tableau précédent, pour chaque mois de l'année 1791.

Mois.	Degré de Force.	Rapp. des quatre plages			
		Nord	Eſt	Sud	Oueſt.
Janvier	316	0	10	17	4
Février	178	1	8	11	8
Mars	248	9	7	6	9
Avril	210	9	4	6	11
Mai	274	6	6	6	13
Juin	253	1	5	10	14
Juillet	248	3	8	5	15
Août	236	3	6	5	17
Septembre	257	2	2	7	19
Octobre	207	6	5	7	13
Novembre	257	2	12	7	9
Décembre	242	2	14	7	8
Annee 1791.	244	44	87	94	140
du 1 Nov. 1790. au 1 Mai 1791.	241	23	43	63	52
du 1 Mai au 1 Nov. 1791.	246	20	32	40	92

Le

Le mois de Janvier ſe trouve être le plus venteux de l'année, & ceux de Février, d'Octobre & d'Avril les plus calmes. La force des vents a été presque égale en hyver & en été.

Le vent dominant eſt toujours celui de l'Oueſt pour toute l'année, ainſi que pour l'été de 1791: Mais pour l'hyver précédent du 1 Novembre 1790 jusqu'au 1 Mai 1791 ce fut celui du Sud qui a dominé le plus.

Énumeration détaillée des vents forts.

Direction.	Jours & Mois.	Nombre de jours.
Nord.	Le 11. 18 Mars, & le 4 Mai - - -	3.
NE.	Le 3. 13. 14 Mai, le 19. 25 Juillet, & le 28. 30 Août - - - - - -	7.
Eſt.	Le 17 Janvier, le 22 Mars, le 20. 21 Octobre, le 5. 6. 16 Novembre, & le 3. 7. 8. 14 Décembre - - - - - - - -	11.
SE.	Le 4. 5. 7. 8. 9. 16. 18. 31 Janvier, le 3. 30 Mars, le 13. 19 Juin, le 5 Juillet, & le 26 Novembre - - - - - -	14.
Sud.	Le 12. 14. 15. 24 Janvier, le 23 Mars, le 19 Mai, le 21 Juin, le 5. 17. 22 Septembre, le 7 Octobre, le 18 & 19 Novembre - - - - - - - - -	13.
SOu.	Le 25. 26 Janvier, le 12 Février, le 4 Mars, le 10. 11 Avril, le 8. 23 Mai, le 11. 12. 22. 23 Juin, le 23 Juillet, le 4. 5. 8 Août, le 18. 21 Septembre, le 25 Octobre, le 10 Novembre & le 15 Décembr.	21.
Oueſt.	Le 27 Janvier, le 16 Février, le 5. 16. 17 Mars, le 28 Avril, le 9. 25. 27 Mai, le 1. 2. 3. 30 Juin, le 6. 7. 8. 11. 12. 28. 31 Juillet, le 10. 17. 18. 21 Août, le 8. 10. 13. 14. 15. 20 Septembre, le 27 Octobre & le 3 Novembre - - -	32.
NOu.	Le 10 Mars, le 16. 30 Avril, le 1. 2 Mai, & le 31 Août - - - - - - -	6.
	Somme	107 jours

Parmi

Parmi ces 107 jours de vent fort, ont été les plus orageux, ceux

du 8 & 14 Décembre - - - -	Direction Eſt	nombre des jours 2.
du 5 Juilet & du 26 Novembre - - - -	SE. - - - -	2.
du 21 Juin & 18 Novembre - - - -	Sud. - - - -	2.
du 25 Janvier, 4 Mars & 23 Mai - - - -	SOu. - - - -	3.
	Somme des jours	9.

IV. Atmoſphère.

Mois.	Ciel. ſerein jours.	nuages. jours	couvert. jours.	Brouillard jours.	Pluie. forte jours.	petite jours.	Neige. forte jours.	petite jours.
Janvier.	1	5	25	0		3	3	11
Février.	6	9	13	10		3	1	10
Mars.	9	16	6	4		2		13
Avril.	7	20	3	4		7	1	8
Mai	3	17	11	0	6	12	1	6
Juin.	6	24	0	0	7	12		
Juillet	13	15	3	3	6	4		
Août	12	15	4	2	3	8		
Septembre	3	15	12	2	4	14		
Octobre	4	17	10	4	5	3		6
Novembre	0	11	19	5	3	8	1	15
Décembre	1	12	18	4		4	4	13
Année 1791.	65	176	124	38	34	80	11	82
					114		93	
du 1 Nov. 1790. au 1 Mai 1791.	27	66	88	29	0	27	8	64
					27		72	
du 1 Mai au 1 Novembr. 1791.	41	103	40	11	31	53	1	12
					84		13	

Le

Le nombre des jours entierement fereins a encore été très petit dans le cours de cette année, & le nombre des jours de ciel entierement couvert fort conſidérable. Ce pendant les ſix mois d'Eté depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, qui comprennent un intervalle de 184 jours, ont eu ſeuls 41 jours de ciel entierement ſerein, & 40 jours ſeulement de ciel entierement couvert. Auſſi le nombre des jours de pluie a été cette année-ci conſidérablement plus petit que l'année 1790. La derniere neige tomba le 10 de Mai, & il recommença à neiger le 16 Octobre, ainſi après un intervalle de 159 jours.

Il tomba de la grêle en 11 jours, le 11. 12 Avril, le 3. 4. 8. 31 Mai, le 17 Juin, le 5 Juillet, le 10 Septembre, le 16 Novembre & le 8 Décembre.

Le nombre des Orages monte à 14; le 26 Avril, le 9. 17. 18. 21. 30 Juin, le 5. 13. 18. 24 Juillet, le 3 Août, le 5. 8 Septembre & le 13 Octobre. La pluspart de ces orages ont été très foibles, le tonnere ne s'étant fait entendre que de très-loin. Ceux du 18 Juin & du 24 Juillet ont cependant été les plus forts.

La Néva débacla le 20 Avril au ſoir, après avoir été gelée pendant 146 jours. Cette débacle ſe fit dans une temperature de 141 à 145 degrés de Délisle. Barometre 27, 85 à 27, 94. Vent de l'Oueſt, ciel couvert. La riviere ne charia des glaces que jusqu'au 24 du même mois; de ſorte que les ponts de communication ont pu être remis de bonne heure.

Le 6 Novembre reparurent les prémiers glaçons, & la rivière en fut priſe en trois fois conſécutives, ce qui fut un phénomène, dont on n'a point eu d'exemple jusqu'ici.

I.) Le

I.) Le 8 matin, 202 jours après la débacle, la riviere fut prise pendant un froid de 165 degrés, Baromètre 28. 06, calme & ciel en partie serein: on la passa à pieds déja le 9 à son embouchure. Mais après un dégel de 148 degrés, les glaçons se remirent en mouvement & la riviere les charia en grande quantité, jusqu'à la nuit du 12 au 13, où

II.) la Neva fut reprise pour la seconde fois. Thermomètre 163°, Baromètre 28. 54. ciel en partie serein, vent de l'Est. On passa la riviere à pieds le 14 matin, mais cet état ne dura qu'une heure & les glaces repartirent encore le même 14 avant-midi, pendant un froid de 151 degrés, Baromètre 28. 03, vent du Sud, & ciel couvert. La Neva charia ensuite des glaces en très grande abondance le 15, 16, 22, 23 Novembre, jusqu'au 6 Décembre. Enfin

III.) 229 jours après la débacle du 20 Avril, la Neva fut & resta prise le 6 Décembre avant-midi, par un froid de 170 degrés de Délisle, Baromètre 28. 10. vent du NOu, ciel serein.

RÉSUMÉ
DES OBSERVATIONS
MÉTÉOROLOGIQUES
faites à St. Pétersbourg
depuis 1772 jusqu'à 1792.
comprennant un intervalle de vingt ans.

Par *J. Albert Euler.*

Préſenté à l'Académie le 16 Mai 1792.

Il y a ſix ans, que j'eus l'honneur de préſenter à l'Académie un eſſai ſur l'état météorologique moyen de St. Pétersbourg, tel que je l'avois déduit de mes propres obſervations faites pendant quatorze années conſécutives. (*) Mais comme cet intervalle de temps, qui ne comprend pas encore un cycle lunaire, me parut trop court pour donner des concluſions préciſes & ſatisfaiſantes, je promis de revenir ſur ce ſujet & de refaire mes calculs, dès que j'aurois amaſſé une ſuite plus grande & ſuffiſante d'années météorologiques. Je m'en acquitte aujourd'hui après avoir commencé la vingt-unieme année de mes obſervations, faites ſans interruption, d'après une même méthode, avec les mêmes inſtrumens & presque au même endroit. Car quoique

(*) Nova Acta Acad. Imp. Sc. Petrop. Tom. IV. ad annum 1786. pag. 322.

que j'aie pendant ce temps délogé deux fois, la ſituation de la demeure que j'ai occupée n'a jamais différée aſſés de celle que j'avois quittée, pour avoir pu occaſioner une différence ſenſible dans les obſervations: au reſte j'ai eu ſoin de choiſir dans chaque habitation que j'allois prendre le même emplacement pour mes inſtrumens.

La conſtruction de ces inſtrumens eſt très ſimple, & leur nombre n'eſt pas grand. Le Baromètre eſt un tuyau de verre, d'une ligne & demie de diamètre, fermé à l'un des bouts & rempli de mercure bien purifié, il eſt verticalement plongé par l'autre bout dans un vaſe ſuffiſamment ſpacieux, rempli du même fluide. L'Echelle depuis la ſurface inférieure du mercure dans le vaſe eſt diviſée en pouces de Paris, & chaque pouce eſt ſousdiviſé en vingt parties égales: de ſorte qu'on peut ſans difficulté eſtimer la hauteur du mercure dans le tuyeau à une centième partie de pouce près. Dans mes annotations ces centièmes parties ſont ſéparées par une virgule des pouces entieres, dont le nombre varie à St. Pétersbourg de 27 à 29. Ainſi dans mes tableaux barométriques 28, 37 marque une hauteur de 28 pouces & 37 centièmes, ou $28\frac{37}{100}$ pouces de Paris. Ce Baromètre ſe trouve placé à une hauteur de 30 à 40 pieds au deſſus du niveau de la Neva, à une diſtance de trois verſtes environ de ſon embouchure dans le golfe de Finlande.

Les Thérmomètres à mercure, dont je me ſers, ſont gradués d'après la méthode de Délisle adoptée de notre Académie depuis plus de ſoixante ans: 0 marque le degré de chaleur de l'eau bouillante, le Baromètre étant à 28 pouces de Paris, & 150 eſt le degré de la congélation naturelle

relle de l'eau diſtillée ou pure: l'échelle s'étend par conſéquent de haut en bas, les degrés de chaleur ſont exprimés par des nombres plus petits, & ceux de gelées par des nombres plus grands que 150. J'ai toujours eu ſoin de placer mes Thermomètres à l'air libre, vers le Nord, dans un lieu, où les rayons ſolaires ne peuvent les frapper ni directement ni par réflexion. Au reſte j'ai toujours eu des Baromètres & des Thermomètres en reſerve, parfaitement d'accord & correſpondans avec ceux dont je me ſers dans mes annotations, pour pouvoir, en cas d'accident, les remettre à leur place, ſans que par l'endommagement d'un inſtrument, mes obſervations fuſſent interrompues.

Quant à la direction & à la force des vents, je me ſuis contenté d'une eſtime: ayant toujours eu devant mes fenêtres tant en hyver, qu'en été, des girandoles fort élévées, qui marquent avec aſſés de préciſion la plage d'où venoit le vent & la force avec laquelle il ſouffloit: au reſte je n'ai diſtingué que les huit plages principales Nord, NE, Eſt, SE, Sud, SOu, Oueſt & NOu, & quatre degrés de force, le calme, un vent doux, un vent fort & un vent très-fort.

Ordinairement j'ai fait mes annotations trois fois par jour, à 6 ou 7 heures matin, à 2 heures après midi & à 10 ou 11 heures du ſoir.

À la fin de chaque mois, c'eſt à dire d'après le nouveau ſtile, j'ai tiré de mes obſervations les concluſions ſuivantes.

I. La plus grande hauteur du Baromètre, avec les circonſtances qui l'ont accompagné.

Sa plus petite hauteur.

La différence entre ces deux hauteurs extrêmes, que je nomme la variation barométrique totale.

Le milieu arithmétique entre ces mêmes hauteurs, qu'on trouve en ajoutant la demi-variation à la plus petite hauteur, ou ce qui revient au même, en l'ôtant de la plus grande hauteur.

La hauteur moyenne, que je trouve en ajoutant enſemble toutes les hauteurs obſervées & en diviſant cette ſomme par le nombre des obſervations; ce qui donne pour la plûpart un réſultat très différent du milieu arithmétique.

Enſuite je fais le dénombrement des jours où la hauteur du Baromètre a ſurpaſſé quelques diviſions principales de ſon échelle, & nommément 27,80. 27,90. 28,00. 28,10 & 28,20 pouces.

Enfin je tire de ces derniers nombres par une interpolation, la hauteur, que le Baromètre a ſurpaſſée pendant le demi-mois; qui diffère encore le plus ſouvent de la hauteur moyenne.

II. Quant au Thermomètre je diſtingue pour chaque jour le terme le plus bas, du terme le plus haut: je nomme celui-là qui ordinairement s'obſerve aux heures du matin & du ſoir, le degré du froid, & celui-ci le degré de la chaleur, qui eſt donc le point le plus haut où le Thermomètre parvient dans la journée, ce qui arrive pour la plus part à 2 heures après midi. À la fin de chaque mois, je tire de ces obſervations thermométriques.

Le

Le degré du plus grand froid, avec les circonſtances qui l'ont accompagné.

Le degré de la plus grande chaleur.

La différence entre ces deux temperatures extrêmes.

Le froid moyen, que je trouve en ajoutant enſemble les dégrés du Thermomètre obſervés aux heures du matin ou du ſoir, & en diviſant cette ſomme par le nombre des obſervations.

La chaleur moyenne, que j'obtiens de même en ajoutant enſemble les degrés du Thermomètre obſervés à 2 heures après midi, & en diviſant cette ſomme par le nombre des jours.

Enſuite je fais encore pour chaque mois le dénombrement des jours, où le froid & la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales de l'échelle du Thermomètre.

III. Ayant diſtribué la force des vents en quatre claſſes (*) & leur direction en huit plages, je ramaſſe en ſommes les nombres des jours, où la force des vents a été de chaque claſſe ſéparée, & où ſa direction s'eſt trouvée de telle ou telle plage, d'où je tire pour chaque mois la force moyenne des vents & le rapport de leur plages principales.

(*) En marquant le calme par 100, le vent médiocre par 200, le vent fort par 400 & le vent le plus violant par 800.

IV. Enfin quant à l'Atmoſphère, & à la conſtitution du ciel, j'ai additioné de même dans une ſomme le nombre des jours, où le ciel a été entièrement ſerein, le nombre de ceux, où le ciel s'eſt trouvé parſémé de nuages, de ceux, où le ciel a été entièrement couvert, de ceux où il-y-a eu de brouillards, de pluïes, de neiges, d'orages, &c. &c.

À la fin de chaque année j'ai tiré ces mêmes concluſions pour toute l'année: enfin en partageant les douze mois en ſix mois d'hyver depuis le 1 Novembre jusqu'au 1 Mai ſuivant, qui comprennent un intervalle de 181 ou 182 jours, ſelon que l'année eſt biſſextile ou commune; & en ſix mois d'été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, qui comprennent un intervalle de 184 jours, je tire encore pour chacun de ces deux ſemeſtres ſéparement les mêmes concluſions indiquées ci-deſſus.

Après ces préliminaires, qui ont été d'autant plus néceſſaires, que cet expoſé ne doit contenir que des ſimples réſultats tirés de mes obſervations météorologiques, je commence par ceux que m'ont fournis les obſervations faites en chaque mois.

Jan-

Janvier.

Barométre.

1.) La plus grande hauteur a été
29, 11 en 1775 le 25
28, 24 en 1774 le 30
La valeur moyenne 28, 700 (*).

2.) La plus petite hauteur
26, 98 en 1773 le 12 & en 1774 le 19
27, 58 en 1783 le 5
La valeur moyenne 27, 277.

3.) La variation moyenne 1, 432 & le milieu = 27, 988.

4.) La hauteur moyenne a été 28, 33 en 1777
& 27, 76 en 1782.
La hauteur moyenne de vingt ans 28, 067.

II. Thermomètre.

1.) Le plus grand froid, 203 en 1773 le 29 & en 1782 le 3.
162 en 1791 le 21.
la valeur moyenne 191°, 3 c'eſt à dire $191\frac{3}{10}$ degré.

2.) Le moindre froid a été
145° en 1790 le 13
155 en 1772 le 1 & 19, & en 1776 le 31.
la valeur moyenne 148°, 4.

Le

(*) Où ſe trouvent 3 figures après la virgule, elles ſignifient des parties milièmes.

3.) Le froid moyen aux heures du matin & du soir
182° en 1783
156 en 1791
la valeur moyenne 170°, 1.

4.) Le froid moyen à 2 heures après midi
152° en 1791
174 en 1783
la valeur moyenne 163°, 1.

5.) Le froid observé aux heures du matin & du soir a été dans ces vingt mois de Janvier
plus grand que 170° en 318 jours
150 en 618 jours

6.) La chaleur observée à 2 heures après midi a été dans ces vingt Janviers
plus grande que 150° en 44 jours.

Comme le mois de Janvier comprend dans vingt années, 620 jours, & que 150° est le terme de la congélation naturelle de l'eau, il suit de ces derniers résultats, que dans ces vingt années il n'y a eu au mois de Janvier que deux jours où il n'a gélé point du tout & 576 jours, où il a gélé continuellement

III. Vent.

1.) Il y a eu dans ces vingt années, au mois de Janvier 62 jours calmes

310 jours de vent médiocre.
182 jours de vent fort.
66 jours de vent très fort.

2.) Le rapport de la force des vents eſt, en prenant la valeur moyenne = 313.

3.) Le rapport des quatre plages principales Nord : Eſt : Sud : Oueſt eſt comme
172 : 138 : 140 : 170.

4.) Le vent à ſoufflé dans ces vingt années
du Nord en 96 jours
du NE en 64 —
de l'Eſt en 72 —
du SE en 66 —
du Sud en 68 —
du SOu en 80 —
de l'Oueſt en 86 —
du NOu en 88 —

IV. Atmosphère.

Il y a eu dans ces vingt années, au mois de Janvier
116 jours de ciel entièrement ſerein
206 jours de ciel parſémé de nuages, ou en partie ſerein
298 jours de ciel entièrement couvert
72 jours de brouïllard
26 jours de pluie
244 jours de neige
35 aurores boréales.

En divisant tous ces nombres par 20, on obtient les valeurs moyennes des dits jours au mois de Janvier, comme je les ai inférées dans les tables à la fin de ce mémoire.

Février.

I. Baromètre.

1.) La plus grande hauteur
28. 98 en 1780 le 9.
28. 28 en 1776 le 1.
La valeur moyenne 28. 671.

2.) La plus petite hauteur
26. 97 en 1779 le 19.
27. 77 en 1773 le 25.
La valeur moyenne 27. 230.

3.) La variation moyenne 1. 441.
& le milieu 27. 950.

4.) La hauteur moyenne 28. 34 en 1773.
27. 78 en 1776.
Sa valeur en vingt ans 28. 037.

II. Thermomètre.

1.) Le plus grand froid
208 en 1772 le 12
169 en 1791 le 10
La valeur moyenne $189^0, 7$.

2.) Le moindre froid
141 en 1779 le 26
151 en 1773 le 15, 20 & 21.
La valeur moyenne $146^0, 2$.

3.)

3.) Le froid moyen aux heures du matin & du soir
181 en 1772
156 en 1776
La valeur moyenne $167^0, 6$.

4.) Le froid moyen à 2 heures après midi
150 en 1776
168 en 1772 & 1782.
La valeur moyenne $159^0, 9$.

5.) Le froid observé aux heures du matin & du soir a été dans ces vingt mois de Février
plus grand que 170 en 222 jours
150 en 548 jours.

6.) La chaleur observée à 2 heures après midi a été dans ces vingt mêmes mois
plus grand que 150 en 134 jours.

Comme le mois de Février comprend dans ce vingt années, dont 6 ont été des bissextiles, 566 jours, il suit, que dans vingt années il y a eu 18 jours, qu'il n'a gelé point du tout, & 426 jours de gelée continuelle.

III. Vent.

1.) Il y a eu dans ces vingt années au mois de Février
76 jours de calme
270 jours de vent médiocre
175 jours de vent fort
45 jours de vent très fort.

2.) Le rapport de la force des vents est, en prenant la valeur moyenne = 294.

3.) Le vent a soufflé dans ces vingt mois de Février

du Nord	en	102	jours
du NE	—	56	—
de l'Eſt	—	53	—
du SE	—	76	—
du Sud	—	71	—
du SOu	—	64	—
de l'Oueſt	—	78	—
& du NOu	—	66	—

4.) Le rapport des quatre plages principales
Nord : Eſt : Sud : Oueſt. comme
164 : 118 : 141 : 143.

IV. Atmosphère.

Il y a eu dans ces vingt années, au mois de Février
112 jours de ciel entièrement ſerein.
197 jours de ciel en partie ſerein.
257 jours de ciel entièrement couvert.
111 jours de brouillard.
36 jours de pluie.
221 jours de neige.
38 aurores boréales.

Mars.

I. Baromètre.

1.) La plus grande hauteur
29. 09 en 1790 le 28.
28. 20 en 1784 le 29.
La valeur moyenne 28. 596.

2.)

2.) La plus petite hauteur
27. 07 en 1773 le 17.
27. 81 en 1789 le 19.
La valeur moyenne 27. 354.

3.) La variation moyenne 1. 242 & le milieu 27. 975.

4.) La hauteur moyenne en 1788 - - - 28. 38.
en 1780 - - - 27. 74.
en vingt ans - - - - 28. 034.

II. Thermomètre.

1.) Le plus grand froid 200 en 1785 le 3.
172 en 1791 le 12.
La valeur moyenne 181^{0}, 3.

2.) Le moindre froid 132 en 1772 le 25 & en 1786 le 29.
146 en 1785 le 8.
La valeur moyenne 140^{0}, 4.

3.) Le froid moyen aux heures du matin & du soir
173^{d} en 1785
156 en 1779.
La valeur moyenne 164^{d}. 0.

4.) Le froid moyen à 2 heures après midi
148^{d} en 1775, 1779 & 1787
159 en 1785 & 1789.
La valeur moyenne 152^{d} 5.

5.) Le froid obſervé aux heures du matin & du ſoir a été dans ces vingt années au mois de Mars

plus grand que -170^{d} en 159 jours
150 en 576 jours.

6.) La chaleur obſervée à 2 heures après-midi a été dans ces mêmes vingt mois

plus grande que $150^{d.}$ en 263 jours.

Comme le mois de Mars comprend en vingt années 620 jours, il ſuit qu'il y en eut 44, où il n'a gelé point du tout & 357 de gelée continuelle.

III. Vent.

1.) Il y a eu au mois de Mars pendant ces vingt ans.

101 jours de calme.
301 jours de vent médiocre.
178 jours de vent fort &
40 jours de vent très fort.

2.) La force des vents eſt, en prenant la valeur moyenne = 284.

3.) Le vent a ſouflé dans ces vingt années au mois de Mars

du Nord - - - en 102 jours.
du NE - - - - 61 ——
de l'Eſt - - - - 78 ——
du SE - - - - 51 ——
du Sud - - - - 58 ——
du SOu - - - - 78 ——
de l'Oueſt - - - 95 ——
& du NOu - - - 97 ——

4.)

4.) Le rapport des quatre plages principales:
Nord : Eſt : Sud : Oueſt comme.
181 : 134 : 123 : 182.

IV. Atmoſphère.

Il y a eu au mois de Mars dans ces vingt années:
193 jours de ciel entièrement ſerein.
233 jours de ciel en partie ſerein.
194 jours de ciel entièrement couvert.
81 jours de brouillard.
38 jour de pluie.
237 jours de neige.
4 jours où il a grélé.
76 Aurores boréales.
1 Orage.

Avril.

I. Baromètre.

1.) La plus grande hauteur
28.91 en 1790 le 1.
28.31 en 1772 le 14.
La valeur moyenne 28, 603.

2.) La plus petite hauteur
27.05 en 1779 le 16.
27.90 en 1773 le 30.
La valeur moyenne 27, 472.

3.) La variation moyenne 1, 128
& le milieu 28, 036.

4.) La hauteur moyenne 28.37 en 1773.
27.75 en 1779.
Sa valeur en vingt ans 28, 093.

II. Thermomètre.

1.) Le plus grand froid.

176$^{d.}$ en 1776 le 1, en 1777 le 2, en 1781 le 3 & en 1787 le 2.
153 en 1773 le 1.

La valeur moyenne 166^{d}, 2.

2.) Le moindre froid

121$^{d.}$ en 1778 le 25.
138 en 1790 le 30.

La valeur moyenne 128^{d}, 8.

3.) Le froid moyen aux heures du matin & du soir

162$^{d.}$ en 1790.
147 en 1773.

La valeur moyenne 152^{d}, 9.

4.) Le froid moyen à 2 heures après midi.

136$^{d.}$ en 1773, 1784 & 1786.
149 en 1790.

La valeur moyenne 141^{d}, 2.

5.) La froid observé aux heures du matin & du soir a été dans ces vingt années au mois d'Avril
plus grand que 170$^{d.}$ en 10 jours.
150 en 372 jours.

6.) La chaleur observée à 2 heures après midi dans ces vingt années a surpassé
130$^{d.}$ en 40 jours
150 en 528 jours.

Le

Le mois d'Avril comprenant en vingt années 600 jours, il y a eu 228 jours, où il n'a gelé point du tout & 72 jours de gelée continuelle.

III. Vent.

1.) Il y a eu au mois d'Avril pendant les vingt ans

142 jours de calme parfait.
288 jours de vent médiocre.
133 jours de vent fort.
37 jours de vent très fort.

2.) La valeur moyenne de la force des vents = 258

3.) Le vent a soufflé pendant ces vingt années

du Nord	en 104	jours.
du NE.	73	—
de l'Est	57	—
du SE	41	—
du Sud	63	—
du SOu.	63	—
de l'Ouest	71	—
du NOu.	128.	—

4.) Le rapport des quatre plages principales:

Nord : Est : Sud : Ouest. comme
204 : 114 : 115 : 167.

IV. Atmosphère.

Il y a eu au mois d'Avril dans ce vingt années

218 jours de ciel entièrement serein.
260 jours de ciel en partie serein.

122 jours de ciel couvert.
71 jours de brouillard.
140 jours de pluie.
119 jours de neige.
8 jours de grêle.
65 Aurores boréales.
5 Orages.

Mai.

I. Baromètre.

1.) La plus grande hauteur
28, 70 en 1774 le 11.
28, 23 en 1780 le 14.
la valeur moyenne 28. 479.

2.) La plus petite hauteur
27, 33 en 1775 le 17.
28, 03 en 1789 le 12 & 13.
la valeur moyenne 27. 621.

3.) La variation moyenne 0, 858.
& le milieu 28. 050.

4.) La hauteur moyenne
28, 32 en 1789.
27, 86 en 1785.
Sa valeur en vingt ans 28. 100.

II.

II. Thermomètre.

1.) Le plus grand froid
158$^{d.}$ en 1784 le 11
143 en 1779 le 2. 4. 5. 18.
la valeur moyenne 152$^{d.}$. 1.

2.) La plus grande chaleur
106$^{d.}$ en 1784 le 11.
126 en 1785 le 15.
La valeur moyenne 117$^{d.}$. 2.

3.) Le froid moyen aux heures du matin & du ſoir
148$^{d.}$ en 1788.
136 en 1774.
La valeur moyenne 141$^{d.}$. 7.

4.) La chaleur moyenne à 2 heures après midi
123$^{d.}$ en 1774 & 1787.
137 en 1784.
La valeur moyenne 130$^{d.}$. 9.

5.) Le froid obſervé aux heures du matin & du ſoir à été dans ces vingt années au mois de Mai plus grand que 150$^{d.}$ en 63 jours.

6.) La chaleur obſervée à 2 heures après midi a ſurpaſſé 130$^{d.}$ en 268 jours.
150 en 620 jours.

Le mois de Mai comprenant en vingt années 620 jours, il y a eu 357 jours où il n'y a eu point de gelées, & aucun jour de gelée continuelle.

III. Vent.

1.) Dans cet intervalle de vingt ans, il y a eu au mois de Mai.

130 jours de calme parfait.
242 jours de vent médiocre.
200 jours de vent fort &
48 jours de vent très fort.

2.) La valeur moyenne de la force des vents = 290.

3.) Le vent a soufflé pendant ces vingt années.

du Nord - - - -	en	63 jours.
du NE - - - -	en	91 ——
de l'Eſt - - - -	en	72 ——
du SE - - - -	en	42 ——
du Sud - - - -	en	55 ——
du SOu - - - -	en	55 ——
de l'Oueſt - - -	en	118 ——
du NOu - - - -	en	124 ——

4.) Le rapport des quatre plages principales:

Nord : Eſt : Sud : Oueſt. comme.
170 : 138 : 104 : 208.

IV. Atmoſphère.

Il y a eu au mois de Mai dans cet intervalle de vingt ans:

202 jours de ciel entièrement ferein.
307 jours de ciel parsémé de nuages.
111 jours de ciel couvert.
56 jours de brouillard.
262 jours de pluie.
37 jours de neige.
17 jours de grèle.
12 Aurores boréales &
28 Orages.

Juin.

I. Baromètre.

1.) La plus grande hauteur
28. 61 en 1777 le 11.
28. 17 en 1780 le 20.
La valeur moyenne 28. 394.

2.) La plus petite hauteur
27. 23 en 1780 le 5.
27. 87 en 1788 le 23.
La valeur moyenne 27. 601.

3.) La variation moyenne 0, 793
& le milieu 27. 997.

4.) La hauteur moyenne
28. 15 en 1789.
27. 83 en 1785.
Sa valeur en vingt ans 28. 017.

II. Thermomètre.

1.) La moindre chaleur

147$^{d.}$ en 1775 le 3 & en 1779 le 2.
137 en 1787 le 5 & 6.

La valeur moyenne 142^{d}, 3.

2.) La plus grande chaleur

103$^{d.}$ en 1787 le 13.
117 en 1780 le 17.

La valeur moyenne 111^{d}, 2.

3.) La chaleur moyenne aux heures du matin & du soir.

137$^{d.}$ en 1772.
128 en 1774.

La valeur moyenne 132^{d}, 5.

4.) La chaleur moyenne à 2 heures après midi

117$^{d.}$ en 1787.
127 en 1785.

La valeur moyenne 122^{d}, 5.

5.) Le mois de Juin a été entièrement exempt de gelée

6.) La chaleur obſervée à 2 heures après midi a ſurpaſſé

130$^{d.}$ en 524 jours.
150 en 600 jours.

Il y a donc eu pendant ces vingt ans 76 jours où la chaleur au mois de Juin a été moindre que 130$^{d.}$

III. Vent.

1.) Il y a eu au mois de Juin, dans l'intervalle de vingt ans.

137 jours de calme.
237 jours de vent médiocre.
178 jours de vent fort.
48 jours de vent très fort.

2.) La valeur moyenne de la force des vents = 284.

3.) Le vent a soufflé au mois de Juin, pendant l'intervalle de vingt ans.

du Nord - - - -	en	49 jours.
du NE - - - - -	en	82 ——
de l'Est - - - - -	en	104 ——
du SE. - - - - -	en	38 ——
du Sud - - - - -	en	47 ——
du SOu - - - - -	en	47 ——
de l'Ouest - - - -	en	134 ——
du NOu. - - - - -	en	99 ——

4.) Le rapport des quatre plages principales
Nord : Est : Sud : Ouest comme
139 : 164 : 89 : 208.

IV. Atmosphère.

Il y a eu au mois de Juin en vingt années

213 jours de ciel entièrement serein.
285 jours de ciel en partie serein.
102 jours de ciel entièrement couvert.
20 jours de brouillard.
252 jours de pluie.
4 jours où il a neigé.
5 jours où il est tombé de la grêle.
61 orages.

Juil-

Juillet.

I. Baromètre.

1.) La plus grande hauteur
28. 54 en 1774 le 27.
27. 89 en 1779 le 9.
La valeur moyenne 28, 305.

2.) La plus petite hauteur
27. 21 en 1785 le 12.
27. 97 en 1789 le 11.
La valeur moyenne 27, 585.

3.) La variation moyenne 0, 720.
& le milieu 27, 945.

4.) La hauteur moyenne
28. 21 en 1789.
27. 67 en 1779.
La valeur moyenne 27, 987.

II. Thermomètre.

1.) La moindre chaleur
138$^{d.}$ en 1780 le 3, en 1782 le 23. 24. 25.
& en 1790 le 6
126 en 1789 le 26 & 31.
La valeur moyenne 134^{d}, 4.

2.) La plus grande chaleur.
100$^{d.}$ en 1788 le 18.
115 en 1790 le 31.
La valeur moyenne 107^{d} 5.

3.)

3.) La chaleur moyenne aux heures du matin & du soir.

132$^{d.}$ en 1777.
123 en 1789.

La valeur moyenne 127^{d}, 9.

4.) La chaleur moyenne à 2 heures après midi

112 en 1772 & 1788.
124 en 1782 & 1790.

La valeur moyenne 117^{d}, 7

5.) - - - - - -

6.) La chaleur observée à 2 heures après midi a surpassé 130$^{d.}$ en 608 jours.

Pendant ces vingt ans, il n'y a donc eu que 12 jours, où la chaleur au mois de Juillet a été moindre que 130$^{d.}$

III. Vent.

1.) Au mois de Juillet, il y a eu pendant cet intervalle de vingt ans

167 jours de calme.
266 jours de vent médiocre.
153 jours de vent fort.
34 jours de vent très-fort.

2.) La valeur moyenne de la force des vents est pour ce mois-ci = 255.

3.) Le vent a soufflé pendant ces vingt ans au mois de Juillet

du Nord - - - - en 49 jours.
du NE - - - - - - 80 ——
de l'Eſt - - - - - 124 ——
du SE - - - - - - 51 ——
du Sud - - - - - - 43 ——
du SOu - - - - - - 59 ——
de l'Oueſt - - - - 154 ——
du NOu - - - - - - 60 ——

4.) Le rapport des quatre plages principales
Nord : Eſt : Sud : Oueſt. comme
119 : 189 : 98 : 214.

IV. Atmoſphère.

Il y a eu au mois de Juillet pendant ces vingt années

209 jours de ciel entièrement ſerein.
313 jours de ciel en partie ſerein.
98 jours de ciel entièrement couvert.
46 jours de brouillard.
311 jours de pluie.
— point de neige.
9 jours de grêle.
90 orages.

Août.

I. Baromètre.

1.) La plus grande hauteur
28. 62 en 1775 le 9.
28. 12 en 1779 le 17.
La valeur moyenne 28, 387.

2.)

2.) La plus petite hauteur
27. 28 en 1778 le 13.
27. 98 en 1789 le 7 & le 8.
La valeur moyenne 27, 625.

3.) La variation moyenne 0, 762
& le milieu 28, 006.

4.) La hauteur moyenne
28. 29 en 1775 & 1789.
27. 86 en 1785.
La valeur moyenne de vingt ans 28, 060.

II. Thermomètre.

1.) La moindre chaleur
145$^{d.}$ en 1778 le 29 & en 1790 le 23.
131 en 1789 le 16. 19. 20.
La valeur moyenne 139^{d}, 1.

2.) La plus grande chaleur
105$^{d.}$ en 1775 le 10.
118 en 1780 le 5.
La valeur moyenne 111^{d}, 0

3.) La chaleur moyenne aux heures du matin & du soir
135$^{d.}$ en 1777.
127 en 1775, 1784 & 1789.
La valeur moyenne en vingt ans 130$^{d.}$, 3.

4.) La chaleur moyenne à 2 heures aprés midi.

115$^{d.}$ en 1775.
126 en 1777 & 1790.
La valeur moyenne en vingt ans 120$^{d.}$, 5.

5.) - - - - - - - - - - - -

6.) La chaleur obſervée à 2 heures après midi a ſurpaſſé 130$^{d.}$ en 596 jours: & comme le mois d'Août comprend en vingt ans 620 jours, il y en eut 24, où la chaleur a été moindre que 130$^{d.}$.

III. Vent.

1.) Il y a eu au mois d'Août dans l'eſpace de vingt ans
159 jours de calme parfait.
271 jours de vent médiocre.
159 jours de vent fort.
31 jours de vent très-fort.

2.) La valeur moyenne de la force des vents 259.

3.) Le vent a ſoufflé pendant ces vingt années au mois d'Août

du Nord	en 32	jours.
du NE	76	—
de l'Eſt	103	—
du SE	57	—
du Sud	48	—
du SOu	81	—
de l'Oueſt	150	—
du NOu	73	—

4.)

4.) Le rapport des quatre plages principales
Nord : Eſt : Sud : Oueſt comme
107 : 170 : 116 : 227.

IV. Atmoſphère.

Au mois d'Août ont été annoté pendant vingt ans.
189 jours de ciel entièrement ſerein.
327 jours de ciel en partie ſerein.
104 jours de ciel entièrement couvert.
77 jours de brouillard.
299 jours de pluie.
- - point de neige.
7 jours de grèle.
24 Aurores boréales.
68 Orages.

Septembre.

I. Baromètre

1.) La plus grande hauteur
28. 74 en 1791 le 25.
28. 29 en 1776 le 25.
La valeur moyenne 28, 481.

2.) La plus petite hauteur
27. 22 en 1785 le 26.
27. 88 en 1775 le 21.
La valeur moyenne 27, 525.

3.) La variation moyenne 0, 956
& le milieu 28, 003.

4.) La hauteur moyenne

28. 28 en 1774 & 1788.
27. 76 en 1779.

La valeur moyenne de vingt ans 28, 055.

II. Thermomètre.

1.) La moindre chaleur

155$^{d.}$ en 1790 le 28.
142 en 1775 le 23.

La valeur moyenne 148^{d}, 3.

2.) La plus grande chaleur

108$^{d.}$ en 1788 le 1.
130 en 1790 le 16.

La valeur moyenne 120^{d}, 2.

3.) La chaleur moyenne aux heures du matin & du soir

143$^{d.}$ en 1777.
134 en 1775 & 1781.

La valeur moyenne en vingt ans 138^{d}, 7.

4.) La chaleur moyenne à 2 heures après midi

124$^{d.}$ en 1775 & 1788.
135 en 1790.

La valeur moyenne 129^{d}, 6.

5.) Le froid observé aux heures du matin & du soir a été plus grand que 150$^{d.}$ en 16 jours.

6.)

6.) La chaleur obſervée à 2 heures après midi a ſurpaſſé

130$^{d.}$ en 324 jours.
150 en 600 jours.

Comme donc le mois de Septembre comprend en vingt années 600 jours, il y en avoit 584, où il n'a gelé point du tout, & 276, où la chaleur a été moindre que 130$^{d.}$.

III. Vent.

1.) Dans cet intervalle de vingt ans, le mois de Septembre contenoit

120 jours de calme parfait.
258 jours de vent médiocre.
177 jours de vent fort.
45 jours de vent très-fort.

2.) La valeur moyenne de la force des vents = 284.

3.) Le vent a ſoufflé pendant ces vingt ans, au mois de Septembre

du Nord	en	56 jours.
du NE		54 ——
de l'Eſt		68 ——
du SE		47 ——
du Sud		75 ——
du SOu		86 ——
de l'Oueſt		130 ——
du NOu		84 ——

4.)

4.) Le rapport des quatre plages principales.

Nord : Eſt : Sud : Oueſt. comme

125 : 118 : 142 : 215.

IV. Atmoſphère.

Au mois de Septembre ont été annoté dans l'intervalle de ces vingt ans

137 jours de ciel entièrement ſerein.
309 jours de ciel en partie ſerein.
154 jours de ciel entièrement couvert.
79 jours de brouillard.
305 jours de pluie.
9 jours de neige.
13 jours de grêle.
77 aurores boréales.
13 orages.

Octobre.

I. Baromètre.

1.) La plus grande hauteur

28. 83 en 1773 le 9.
28. 32 en 1782 le 26.

La valeur moyenne 28, 587.

2.) La plus petite hauteur

26. 86 en 1778 le 26.
27. 97 en 1789 le 30.

La valeur moyenne 27, 350.

3.)

3.) La variation moyenne 1, 237.
& le milieu 27, 968.

4.) La hauteur moyenne
28. 48 en 1789.
27. 74 en 1778.
La valeur moyenne en vingt ans 28, 078.

II. Thermomètre.

1.) Le plus grand froid
$168^{d.}$ en 1788 le 23.
151 en 1772 le 21.
La valeur moyenne $156^{d.}$, 6.

2.) La plus grande chaleur
$116^{d.}$ en 1772 le 1.
138 en 1784 le 20, 29 & en 1785 le 25.
La valeur moyenne $128^{d.}$, 3.

3.) La chaleur moyenne aux heures du matin & du soir
$152^{d.}$ en 1778.
140 en 1775.
La valeur moyenne de vingt ans $146^{d.}$, 3.

4.) La chaleur moyenne à 2 heures après midi
$135^{d.}$ en 1772, 1775 & 1789.
147 en 1780.
La valeur moyenne $140^{d.}$, 5.

5.) Le froid observé aux heures du matin & du soir a été plus grand que $150^{d.}$ en 184 jours.

6.) La chaleur obſervée à 2 heures aprés midi a ſurpaſſé 130$^{d.}$ en 47 jours, & elle a été plus grande que 150$^{d.}$ en 596 jours. Donc le mois d'Octobre comprenant en vingt années 620 jours, il y en avoient 436, où il n'a gelé point du tout, & 24 jours de gelée continuelle.

III. Vent.

1.) Dans ces vingt ans le mois d'Octobre s'eſt trouvé contenir

89 jours de calme parfait.
298 jours de vent médiocre.
183 jours de vent fort.
50 joers de vent très fort.

2.) La valeur moyenne de la force des vents = 293.

3.) La direction du vent a été

du Nord - - - - -	en	62 jours.
du NE - - - - - -		47 ——
de l'Eſt - - - - - -		59 ——
du SE - - - - - -		43 ——
du Sud - - - - - -		119 ——
du SOu - - - - - -		106 ——
de l'Oueſt - - - - -		129 ——
du NOu - - - - - -		55 ——

4.) Le rapport des quatre plages principales

Nord : Eſt : Sud : Oueſt. comme
113 : 104 : 194 : 209.

IV. Atmoſphère.

Le mois d'Octobre s'eſt trouvé contenir dans l'eſpace de vingt ans

90 jours de ciel entièrement ſerein.
259 jours de ciel parſémé de nuages.
271 jours de ciel entièrement couvert.
75 jours de brouillard.
267 jours de pluie.
98 jours de neige.
11 jours de grêle.
46 Aurores boréales.
3 Orages.

Novembre.

I. Baromètre.

1.) La plus grande hauteur
28, 93 en 1786 le 26.
28, 41 en 1772 le 18.
La valeur moyenne 28. 671.

2.) La plus petite hauteur
26, 92 en 1778 le 24.
27, 97 en 1773 le 1 & 2.
La valeur moyenne 27. 374.

3.) La variation moyenne 1, 297.
& le milieu 28. 022.

4.) La hauteur moyenne
28, 43 en 1773.
27, 85 en 1779.
La valeur moyenne en vingt ans 28. 083.

II. Thermomètre.

1.) Le plus grand froid
185$^{d.}$ en 1774 le 19
155 en 1772 le 18 & en 1781 le 21 & 26.

La valeur moyenne $171^{d.}$ 5.

2.) La plus grande chaleur

$134^{d.}$ en 1772 le 9.
149 en 1786 le 3.

La valeur moyenne $140^{d.}$ 8.

3.) Le froid moyen aux heures du matin & du soir

$171^{d.}$ en 1774.
146 en 1772.

La valeur moyenne en vingt ens 152^{d}, 9.

4.) Le froid moyen à 2 heures après midi.

$142^{d.}$ en 1772.
164 en 1774.

La valeur moyenne en vingt ans 151^{d}, 6.

5.) Le froid obſervé aux heures du matin & du ſoir a ſurpaſſé $170^{d.}$ en 54 jours.
150 en 436 jours.

6.) La chaleur obſervée à 2 heures après midi a été plus grande que $150^{d.}$ en 306 jours.

Comme le mois de Novembre contient 600 jours en vingt ans, & que $150^{d.}$ eſt le terme de la congélation de l'eau, il ſuit, que dans ces dernieres vingt années il y a eu 294 jours, où il a gelé continuellement & 164 jours, où il n'a gelé point du tout.

III. Vent.

1.) Dans ces vingt ans, il y a eu au mois de Novembre

111 jours de calme parfait
290 jours de vent médiocre
155 jours de vent fort &
44 jours de vent très fort.

2.) La valeur moyenne de la force des vents = 274.

3.) Le vent a soufflé

du Nord - - - -	en	50 jours.
du NE. - - - -	en	42 ——
de l'Eſt - - - -	en	103 ——
du SE. - - - -	en	90 ——
du Sud - - - -	en	111 ——
du SOu - - - -	en	87 ——
de l'Oueſt - - -	en	60 ——
du NOu. - - - -	en	57 ——

4.) Le rapport des quatre plages principales Nord : Eſt : Sud : Oueſt, comme 99 : 169 : 199 : 133.

IV. Atmoſphère.

Dans ces vingt années il y a eu au mois de Novembre.

67 jours de ciel entièrement ſerein.
190 jours de ciel parſémé de nuages
343 jours de ciel entièrement couvert.
84 jours de brouillard.
136 jours de pluie.
231 jours de neige.
4 jours de grêle.
29 Aurores boréales &
2 Orages.

Décembre.

I. Baromètre.

1.) La plus grande hauteur

29. 21 en 1774 le 8.
28. 37 en 1778 le 18.

La valeur moyenne de vingt ans 28, 695.

2.) La plus petite hauteur

26. 78 en 1784 le 4.
27. 63 en 1787 le 15.

La valeur moyenne 27, 237.

3.) La variation moyenne 1, 458.
& le milieu 27, 966.

4.) La hauteur moyenne

28. 44 en 1785.
27. 65 en 1778.

La valeur moyenne 28, 063.

II. Thermomètre.

1.) Le plus grand froid

201 en 1781 le 31.
172 en 1776 le 8.

La valeur moyenne de vingt ans 182^d, 5.

2.) Le moindre froid

142 en 1789 le 25.
156 en 1788 le 8.

La valeur moyenne 147^d, 2.

3.) Le froid moyen aux heures du matin & du soir

181^d.

181$^{d.}$ en 1788.
156 en 1772, 1789, 1790.

La valeur moyenne en vingt ans 164$^{d.}$, 0.

4.) Le froid moyen à 2 heures après midi

151$^{d.}$ en 1789.
174 en 1788.

La valeur moyenne en vingt ans 158$^{d.}$. 5.

5.) Le froid obſervé aux heures du matin & du ſoir a ſurpaſſé

170$^{d.}$ en 166 jours.
150 en 616 jours.

6.) La chaleur obſervée à 2 heures après midi à ſurpaſſé 150$^{d.}$ en 124 jours. Par conſéquent comme le mois de Décembre contient 620 jours en vingt ans, il y en a eu 496 de gelée continuelle, & 4 où il n'a gelé point du tout.

III. Vent.

1.) Dans ces vingt ans, il y a eu au mois de Décembre

83 jours de calme parfait.
298 jours de vent médiocre.
187 jours de vent fort &
52 jours de vent très fort.

2.) La valeur moyenne de la force des vents = 297.

3.) Le vent a ſoufflé pendant vingt ans en Décembre

du Nord - - - - en 87 jours.
du NE - - - - en 46 ——

de

de l'Eſt - - - - - en 68 jours.
du SE - - - - - en 78 —
du Sud - - - - - en 77 —
du SOu - - - - - en 99 —
de l'Oueſt - - - - en 87 —
du NOu - - - - - en 78 —

4.) Le rapport des quatre plages principales:

Nord : Eſt : Sud : Oueſt. comme.
149 : 130 : 165 : 176.

IV. Atmoſphère.

Dans ces vingt années il y a eu au mois de Décembre

74 jours de ciel entièrement ſerein.
231 jours de ciel parſémé de nuages.
315 jours de ciel entièrement couvert.
93 jours de brouillard.
58 jours de pluie.
267 jours de neige.
2 jours de grêle.
23 Aurores boréales.

Pour repréſenter ces concluſions en raccourci, je joins ici les tables ſuivantes:

I. État moyen du Baromètre pour chaque mois de l'année.

Mois.	Au plus haut. P. millièmes	Au plus bas. P. millièmes	Variation. P. millièmes	Milieu. P. millièmes	Hauteur moyenne. P. millièmes
Janvier	28. 700	27. 277	1,423	27,988	28. 067
Février	28. 671	27. 230	1,441	27,950	28. 037
Mars	28. 596	27. 354	1,242	27,975	28. 034
Avril	28. 603	27. 472	1,131	28,036	28. 093
Mai	28. 479	27. 621	0,858	28,050	28. 100
Juin	28. 394	27. 601	0,793	27,997	28. 017
Juillet	28. 305	27. 585	0,720	27,945	27. 987
Août	28. 387	27. 625	0,762	28,006	28. 060
Septembre	28. 481	27. 525	0,956	28,003	28. 055
Octobre	28. 587	27. 350	1,237	27,968	28. 078
Novembre	28. 671	27. 374	1,297	28,022	28. 083
Décembre	28. 695	27. 237	1,458	27,966	28. 063

II. Etat moyen du Thermomètre pour chaque mois de l'année.

Mois.	Au plus bas ou le plus grand froid. degré.	Au plus haut ou la plus grande chaleur. degré.	Froid moyen aux heures du matin & du soir. degré.	Chaleur moyenne à 2 heures après midi. degré.	Le Froid observé aux heures du matin & du soir a été plus grand que 170d. jours.	150d. jours.	La Chaleur observée à 2 heures après midi a été plus grande que 130d. jours.	150d. jours.
Janvier	191, 3	148, 4	17c, 1	163, 1	16	31		2
Février	189, 7	146, 2	167, 6	159, 0	11	27		7
Mars	181, 3	14c, 4	164, 0	152, 5	8	29		13
Avril	166, 2	128, 8	152, 9	141, 2	0	19	2	26
Mai	152, 1	117, 2	141, 7	13c, 9		3	13	31
Juin	142, 3	111, 2	132, 5	122, 5			26	30
Juillet	134, 4	107, 5	127, 9	117, 7			30	31
Août	139, 1	111, 0	13c, 3	12c, 5			30	31
Septembre	148, 3	120, 2	138, 7	129, 6		1	16	30
Octobre	156, 6	128, 3	146, 3	14c, 5		9	2	30
Novembre	171, 5	140, 8	156, 1	151, 6	3	22		15
Décembre	182, 5	147, 2	164, 0	158, 5	8	31		6

III.

III. Force & direction des vents pour chaque mois de l'année moyenne.

Mois.	Nombre moyen des jours de				Rapport de la force des vents.	Rapport des quatre plages principales.			
	calme.	vent médiocre.	vent fort.	vent très-fort.		Nord.	Eſt.	Sud.	Oueſt.
Janvier	3	16	9	3	313	172	138	140	170
Février	4	13	9	2	294	164	118	141	143
Mars	5	15	9	2	284	181	134	123	182
Avril	7	14	7	2	258	204	114	115	167
Mai	7	12	10	2	290	170	138	104	208
Juin	7	11	9	3	284	139	164	89	208
Juillet	8	13	8	2	255	119	189	98	214
Août	8	14	8	1	259	107	170	116	227
Septembre	6	13	9	2	284	125	118	142	215
Octobre	4	15	9	3	293	113	104	194	209
Novembre	6	14	8	2	274	99	169	199	133
Décembre	4	15	9	3	297	149	130	165	176

IV. État moyen du ciel & de l'atmoſphère pour chaque mois.

Mois.	Nombre moyen des jours de ciel — entièrement ſerein	parſemé de nuages	entièrement couvert	Brouillard jours	Pluie. jours	Neige. jours
Janvier	6	10	15	4	1	12
Février	6	9	13	6	2	11
Mars	10	11	10	4	2	12
Avril	11	13	6	4	7	6
Mai	10	15	6	3	13	2
Juin	11	14	5	1	13	—
Juillet	10	16	5	2	15	0
Août	9	17	5	4	15	0
Septembre	7	15	8	4	15	—
Octobre	4	14	13	3	13	5
Novembre	3	10	17	4	6	11
Décembre.	3	12	16	4	3	13

État

État météorologique moyen pour toute l'Année.

I. Baromètre.

1.) La plus grande hauteur annuelle 29, 21 a été obſervée en 1774 le 8 Décembre, & elle n'a été que de 28, 68 en 1783 le 22 Janvier: elle tombe toujours dans un des mois d'hyver, & ſa valeur moyenne eſt 28, 921.

2.) La plus petite hauteur annuelle 26, 78 a été obſervée en 1784 le 4 Décembre: elle a été plus grande en toutes les autres années & même de 27. 22 en 1781 le 24 Juillet ainſi que le 23 Octobre, & en 1787 le 3 Mars. Sa valeur moyenne eſt 27, 019.

3.) La variation totale dans ces vingt années = 2, 43 & le milieu arithmétique 27, 995.

4.) La variation annuelle moyenne = 1, 902 & le milieu arithmétique entre les valeurs moyennes des deux hauteurs extrêmes 27, 970.

5.) La hauteur moyenne déduite de toutes les obſervations faites en ces vingt années 28, 052.

6.) La hauteur barométrique annuelle a été.

a) au deſſus de 27, 90 — 318 jours en 1789.
174 jours en 1779.

La valeur moyenne de ce nombre de jours eſt 257.

b) au deſſus de 28, 00 — 288 jours en 1789.
131 jours en 1779.

la valeur moyenne de ce nombre de jours eſt 212.

c.) au deſſus de 28, 10 246 jours en 1789.
88 jours en 1779.

La valeur moyenne de ce nombre de jours eſt 162.

7.) La hauteur du Baromètre s'eſt trouvée dans l'intervalle de ces vingt années, dix ans au deſſus de 28, 059, qui approche de très près de la hauteur moyenne (.).

II. Thermométre.

1.) Le plus grand froid dans ces vingt années a été obſervée en 1772 le 15 Février de 208 degrés de Délisle.

La valeur moyenne du plus grand froid annuel eſt de $195^{d.}, 6$, qui répondent à $24\frac{1}{3}$ degrés de Réaumur.

2.) La plus grande chaleur a été dans cet intervalle de vingt ans, de 100 degrés, en 1788 le 18 Juillet.

La valeur moyenne de la plus grande chaleur annuelle eſt de $106^{d.}, 6$, qui répondent à $25\frac{1}{4}$ degrés de Réaumur.

3.) Le froid moyen aux heures du matin & du ſoir a été en 1786 de $152^{d.}$ & en 1791 de $147^{d.}$. Sa valeur moyenne eſt de $149^{d.}, 7$.

4.) La chaleur moyenne à 2 heures après midi, a été en 1773 de $138^{d.}$ & en 1782 de $144^{d.}$. Sa valeur moyenne eſt de $141^{d.}, 0$.

5.) Le nombre de jours où le froid a ſurpaſſé $170^{d.}$ de Délisle a été en 1786 de 68 & en 1791 ſeulement de

de 5. Ce nombre a été dans l'intervalle de nos vingt années de 938, & par conſéquent ſa valeur moyenne pour une année de 46 jours.

Enſuite le nombre de jours où le froid a ſurpaſſé 150$^{d.}$, c'eſt à dire, le terme de la congélation naturelle de l'eau, a été en 1786 de 195 & en 1772 de 144. Dans l'intervalle de vingt ans, ce nombre eſt 3428 & par conſéquent ſa valeur moyenne pour une année 171.

6.) Le nombre de jours où la chaleur a ſurpaſſé 130$^{d.}$ de Délisle a été de 138 en 1773 & de 91 ſeulement en 1785. Dans l'intervalle de vingt ans, ce nombre eſt 2406, d'où l'on conclud ſa valeur moyenne pour une année 120 jours.

Enſuite le nombre de jours où la chaleur a ſurpaſſé le terme de la congélation naturelle de l'eau, a été en 1779 de 269 & en 1782 de 237. Dans notre intervalle de vingt ans, ce nombre a été trouvé 5054, d'où l'on tire ſa valeur moyenne pour une année 253.

7.) D'où l'on peut conclure que dans l'année moyenne il y a, 112 jours de gelée continuelle
59 jours où il géle ſeulement le matin ou le ſoir.
& 194 jours où il ne gèle point du tout; mais dont 120 ſeulement avancent & favoriſent la végétation.

III.

III. Vent.

1.) Le nombre des jours calmes a été pendant nos vingt années = 1377.

Ainſi ſa valeur moyenne pour une année = 69.

2.) Le nombre des jours de vent médiocre pendant ces vingt ans = 3329.

Ainſi ſa valeur moyenne pour une année = 166.

3.) Le nombre des jours de vent fort pendant ce même intervalle = 2060.

Ainſi ſa valeur moyenne pour une année = 103.

4.) Le nombre des jours de vent très-fort pendant ces vingt années = 540.

D'où la valeur moyenne pour une année = 27.

5.) La force des vents = 280. Le nombre 200 exprimant un vent médiocre & le nombre 800 un vent extraordinairement véhément.

6.) Le Rapport des quatre plages principales

Nord : Eſt : Sud : Oueſt. comme

145 : 140 : 136 : 187.

De ſorte que le vent dominant eſt pour St. Pétersbourg celui de *l'Oueſt*, & le vent de *Sud* celui qui ſouffle le moins.

IV. Atmoſphère.

1.) Le nombre des jours de ciel entièrement ſerein a été en ces vingt ans = 1820.

Ainſi

Ainſi ſa valeur moyenne pour une année = 91.

2.) Le nombre des jours où le ciel eſt en partie ſerein, a été dans cet intervalle de tems = 3117.

D'où l'on a ſa valeur moyenne pour une année = 156.

3.) Le nombre des jours de ciel entièrement couvert, dans ce même intervalle de vingt années = 2369.

Par conſéquent ſa valeur moyenne pour une année = 118.

4.) Le nombre des brouillards en vingt années = 865.

Ainſi ſa valeur moyenne en un an = 43.

5.) Le nombre des jours de pluie = 2130.

Sa valeur moyenne pour une année = 107.

6.) Le nombre des jours de neige = 1467.

Sa valeur moyenne en une année = 73.

7.) Il y a eu de la grêle tombée en vingt ans = 80.

Ainſi en un an = 2.

8.) Nombre des aurores boréales obſervées en vingt ans.

A. 1772 —— 1792 = 425.

Ce nombre pour un an = 21 à 22.

9.) Nombre des orages en ces vingt années = 271.

Ce qui fait en un an = 13 à 14.

10.) Le nombre des aurores boréales a été le plus grand en 1774 où on en a obſervé 48; elles ont encore été très fréquentes en 1786, où leur nombre monte à 43; elles ont été d'autant plus rares dans les cinq dernieres années. Leur nombre alloit

de 1772 à 1776 - - - à 133
de 1777 à 1781 - - - à 142
de 1782 à 1786 - - - à 110
de 1787 à 1791 - - - à 39

ainſi elles ont diminué conſidérablement les cinq dernieres années.

11.) Les orages ont été les plus fréquens en 1786, où on en a compté 18, enſuite en 1774 & 1787, où leur nombre montoit à 17 & en 1773, 1781 & 1789 où il y en avoit 16. On n'a compté que 6 orages en 1790, 7 orages en 1772 & 1775, & 8 orages en 1778.

Etât météorologique moyen pour les ſix mois d'été, Mai, Juin, Juillet, Août, Septembre & Octobre, comprenant un intervalle de 184 jours.

I. Baromètre.

La hauteur moyenne du Baromètre 28, 049.

II. Thermomètre.

La chaleur moyenne à 2 heures après midi = $126^{d},9$

La

La chaleur moyenne aux heures du matin & du ſoir = 136^{d}, 2.

III. Vent.

Nombre moyen des jours de

calme - - - - - -	40
vent médiocre - - -	78 à 79
vent fort - - - - -	52 à 53
vent très fort - - -	12 à 13

Rapport des quatre plages principales:

Nord : Eſt : Sud : Oueſt. comme
129 : 147 : 124 : 213.

IV. Atmoſphère.

Nombre moyen des jours de

ciel entièrement ſerein - - -	52.
ciel parſémé de nuages - - -	90.
ciel entièrement couvert - - -	42.
brouillard - - - - - - - - -	17 à 18.
pluie - - - - - - - - - - -	84 à 85.
neige - - - - - - - - - - -	7 à 8.
grêle - - - - - - - - - - -	3 à 4.
orages - - - - - - - - - - -	13 à 14.
aurores boréales - - - - - -	8.

État météorologique moyen pour les ſix mois d'hyver Novembre, Décembre, Janvier, Février, Mars & Avril, comprenant un intervalle de 181 jours.

I. Baromètre.

La hauteur moyenne du Baromètre = 28, 063.

II. Thermomètre.

Le froid moyen aux heures du matin & du ſoir = 162^{d}, 5.
Le froid moyen à 2 heures après midi = 154^{d}, 3.

III. Vent.

Nombre moyen des jours de

calme - - - - - - -	28 à 29.
vent médiocre - - -	87 à 88.
vent fort - - - - - -	50 à 51.
vent très-fort - - - -	14 à 15.

Rapport des quatre plages principales Nord : Eſt : Sud : Oueſt comme 161 : 134 : 147 : 162.

IV. Atmosphère.

Nombre moyen des jours de

ciel entièrement ſerein	39.
ciel parſémé de nuages	66.
ciel entièrement couvert	76 à 77.

brouil-

brouillard - - -	25 à 26.
pluie - - - -	21 à 22.
neige - - - -	66.
grêle - - - -	1.
aurores boréales - -	13 à 14.
orages en cinq ans -	2.

Obſervations ſur la premiere & derniere gelée.

1.) Epoques extrêmes de la derniere gelée au printemps.

au plustôt, le 12 Avril, en 1773.
au plus tard, le 23 Mai, en 1772.

2.) Epoques extrêmes de la premiere gelée en automne.

au plustôt, le 19 Septembre, en 1785.
au plus tard, le 30 Octobre, en 1775 & 1787.

3.) Epoque moyenne de la derniere gelée au printemps le 6 Mai.

4.) Epoque moyenne de la premiere gelée en automne le 8 Octobre.

5.) Intervalle moyen entre la premiere & la derniere gelée, qu'on peut appeller la durée moyenne de l'hyver, en y comprennant l'automne & le printemps = 210 jours.

6.) Intervalle moyen entre la derniere & la premiere gelée, ou durée moyenne de l'été décidé = 155 jours.

Obſervations ſur la premiere & derniere neige.

1.) Epoques extrêmes de la derniere neige au printemps

au plustôt, le 15 Mars, en 1774.
au plus tard, le 12 Juin, en 1790.

2.) Epoques extrêmes de la premiere neige en automne

au plustôt, le 4 Septembre, en 1782.
au plus tard, le 5 Novembre, en 1775.

3.) Epoque moyenne de la derniere neige en printemps, le 8 Mai.

4.) Epoque moyenne de la premiere neige en automne le 12 Octobre.

5.) Intervalle de l'hyver moyen entre la premiere & la derniere neige = 208 jours.

6.) Intervalle de l'été moyen entre la derniere & la premiere neige = 157 jours.

Obſervations ſur la priſe & la débacle de la Néva (*).

1.) Epoques extrêmes de la débacle au printemps

au plustôt, le 2 Avril, en 1723.
au plus tard, le 7 Mai, en 1739 & 1742.

2.)

(*) Les réſultats qui ſuivent ici, ſont tirés d'une ſuite non interrompue d'obſervations faites depuis l'an 1718, telle qu'on la trouve inſérée dans notre almanach, après l'avoir réduite au nouveau ſtile.

2.) Epoques extrêmes de la prise en automne
au plus tôt, le 31 Octobre, en 1769.
au plus tard, le 23 Décembre, en 1772.

3.) Epoque moyenne de la débacle au printemps
le 21 Avril.

4.) Epoque moyenne de la prise en automne
le 25 Novembre.

5.) L'Intervalle moyen entre la débacle & la prise, qu'on pourroit appeller la durée moyenne de l'été, en y comprennant le printemps & l'automne, est de 218 jours.

6.) L'Intervalle moyen entre la prise & la débacle, ou la durée moyenne de l'hyver décidé, est de 147 jours.

7.) On peut donc compter pour St. Pétersbourg 155 jours d'été, c'est à dire où il ne gele point du tout, & 147 jours d'hyver, où il gele continuellement, enfin 63 jours de printemps & d'automne, où il gele seulement pendant les nuits (*).

(*) Ces nombres paroissent donner des résultats différens de ceux qu'on trouve pour l'année entiere pag. 439, à l'article 7; mais il faut observer, qu'on n'a compté ici que les jours d'été qui se trouvent entre la débacle de la riviere & sa prise.

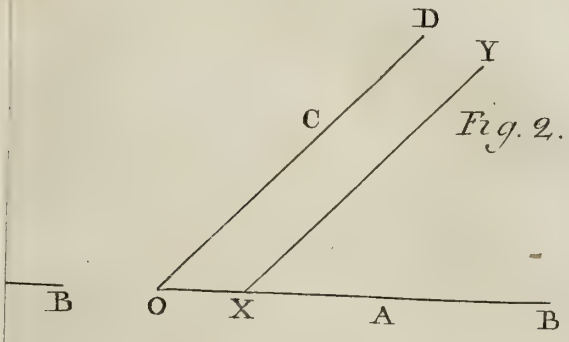


Fig. 2.

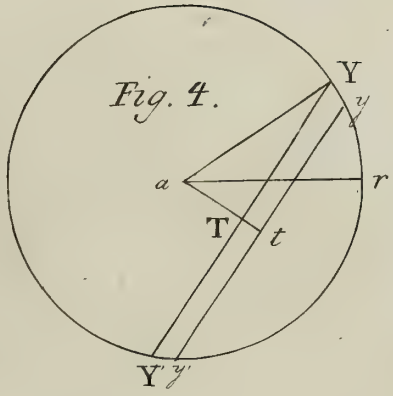
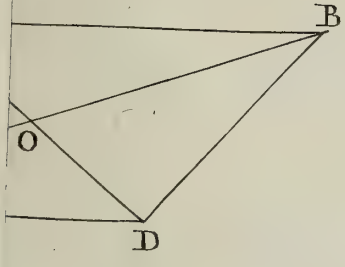


Fig. 4.

Fig. 5.



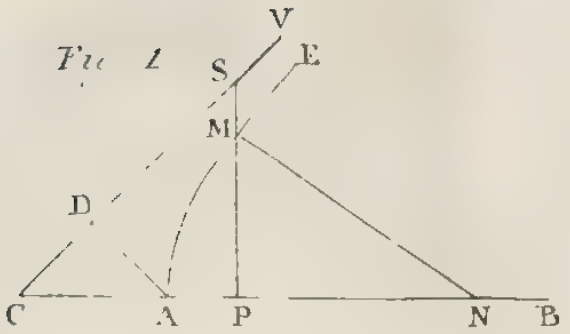


Fig. 1.

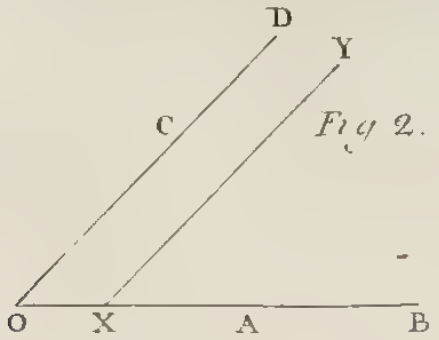


Fig. 2.

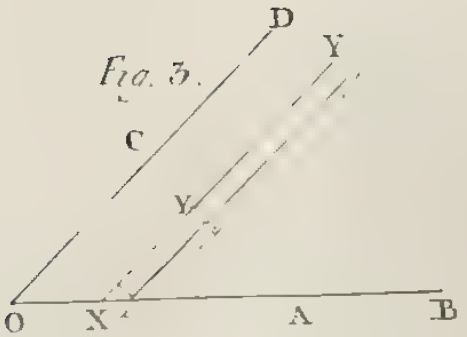


Fig. 3.

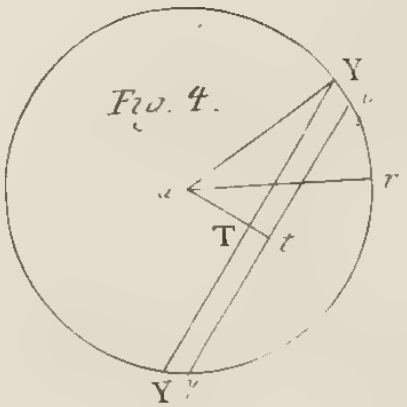
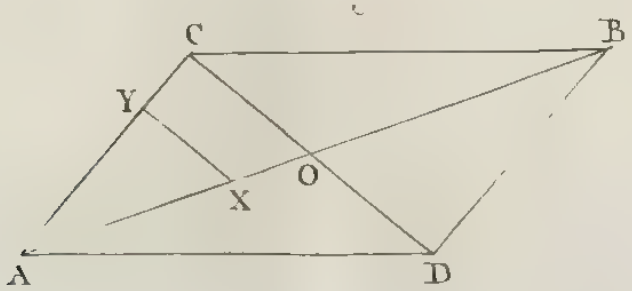


Fig. 4.

Fig. 5.



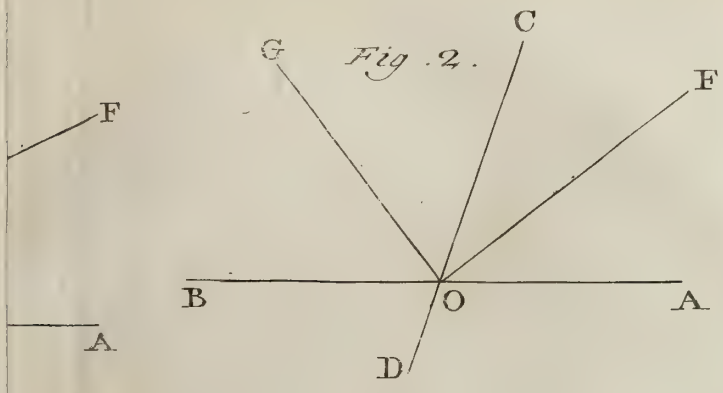
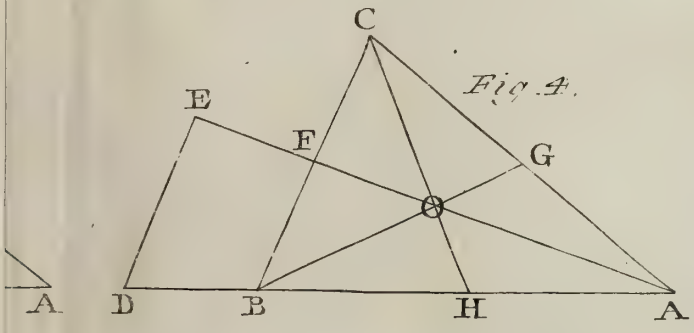
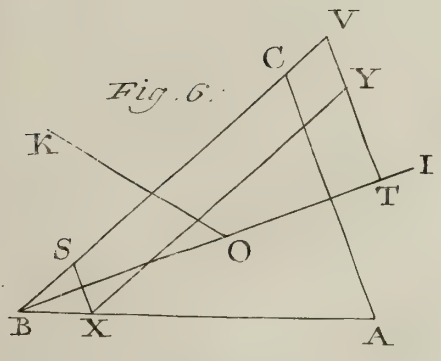


Fig. 2.
C
G
F
F
B
O
A
A
D


C
Fig. 4.
E
F
G
A
D
B
H
A


V
C
Fig. 6.
Y
K
I
T
S
O
B
X
A

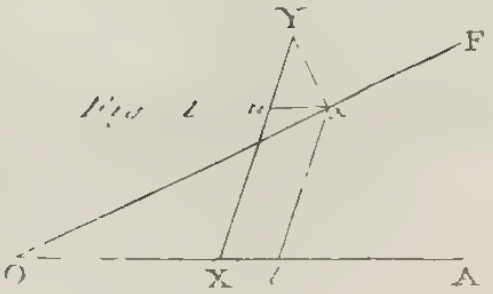


Fig. 1

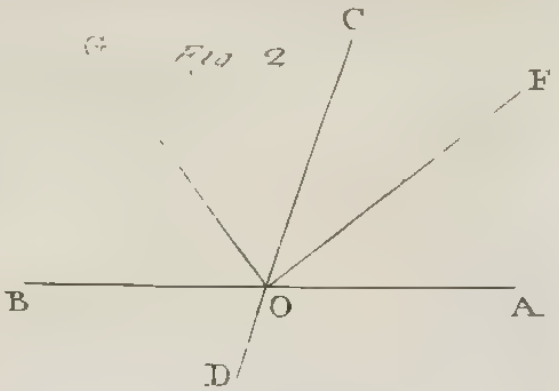


Fig. 2

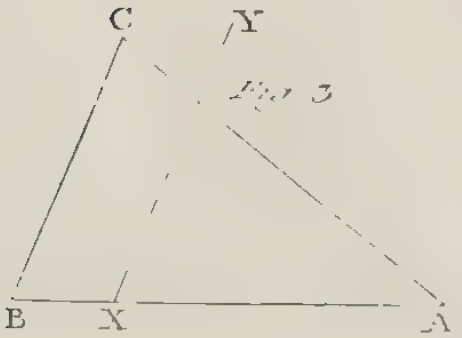


Fig. 3

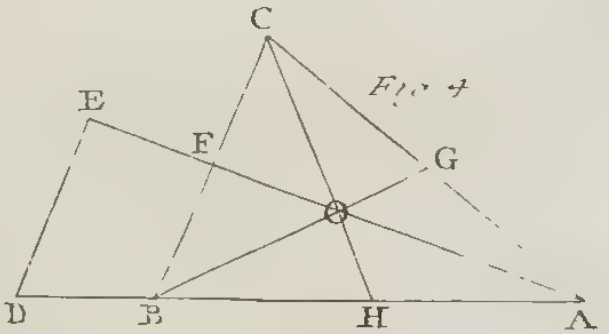


Fig. 4

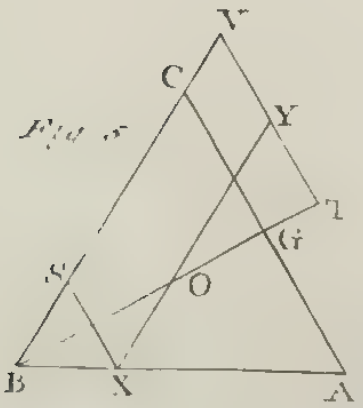


Fig. 5

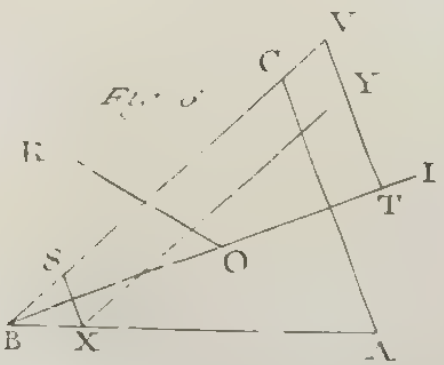


Fig. 6

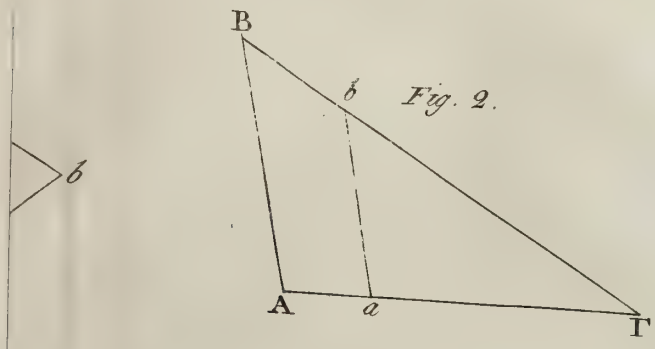
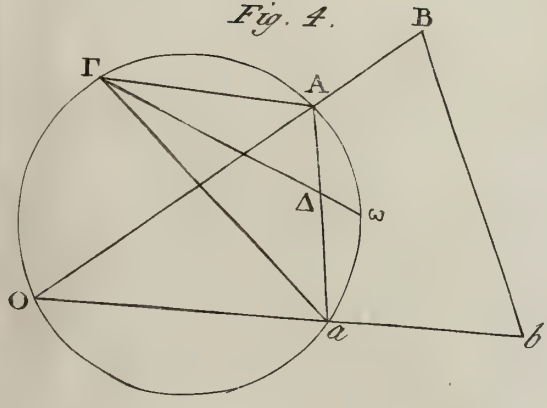


Fig. 2.

Fig. 4.



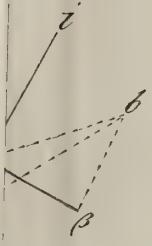


Fig. 6.

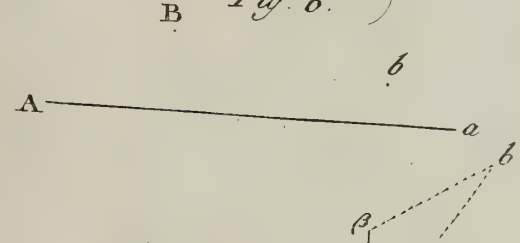


Fig. 7.

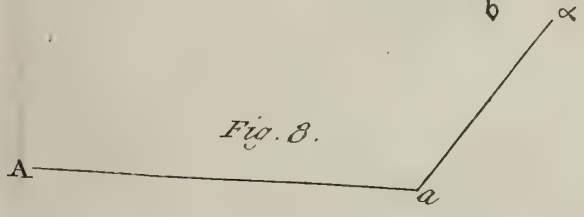


Fig. 8.

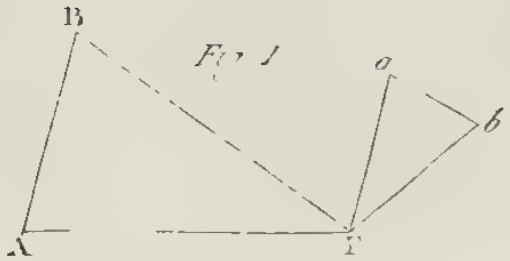


Fig. 1

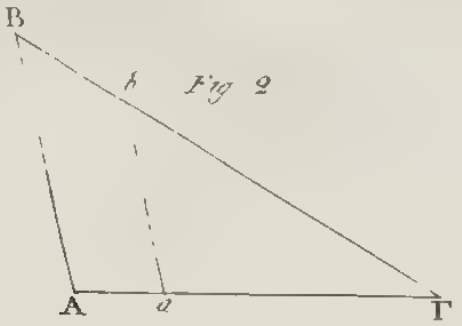


Fig. 2

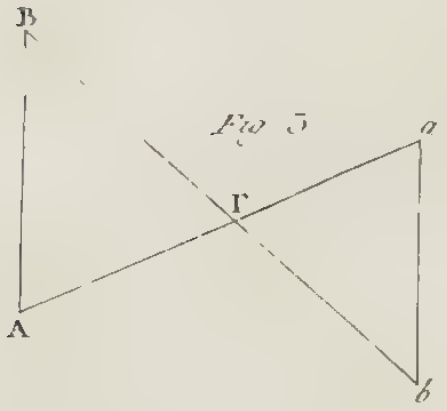


Fig. 3

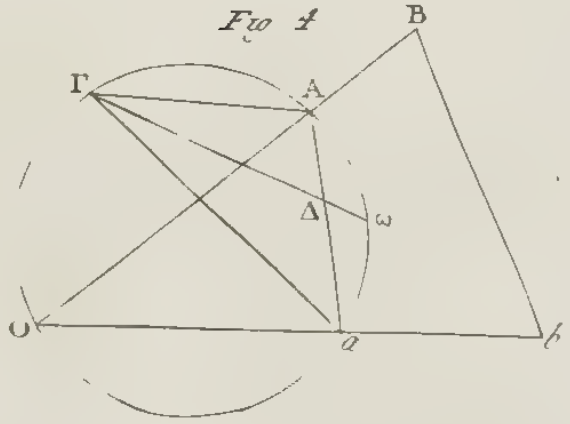


Fig. 4

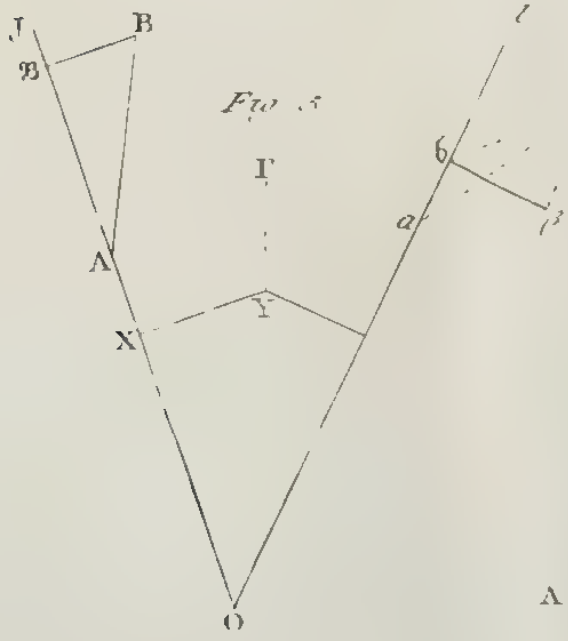


Fig. 5

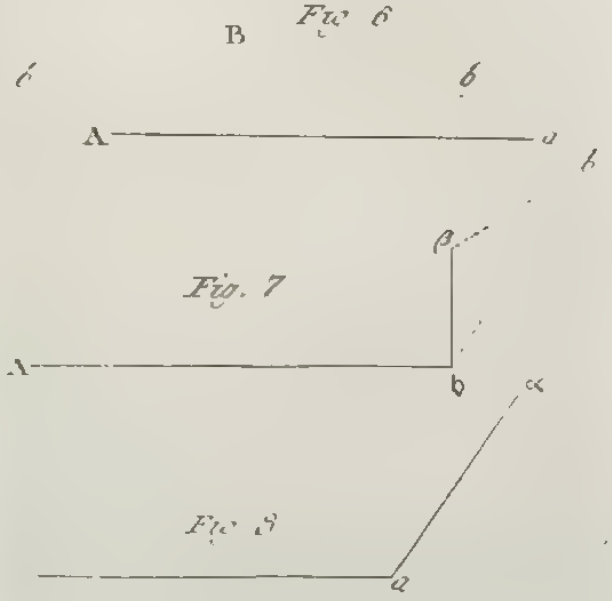
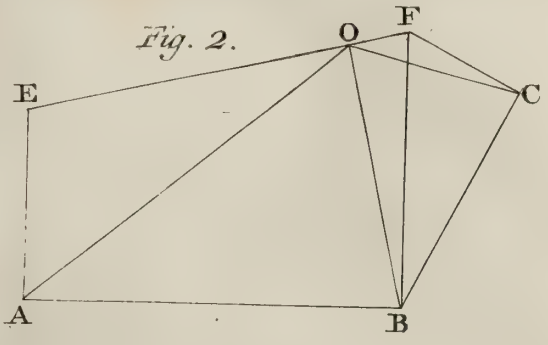


Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

Fig. 2.



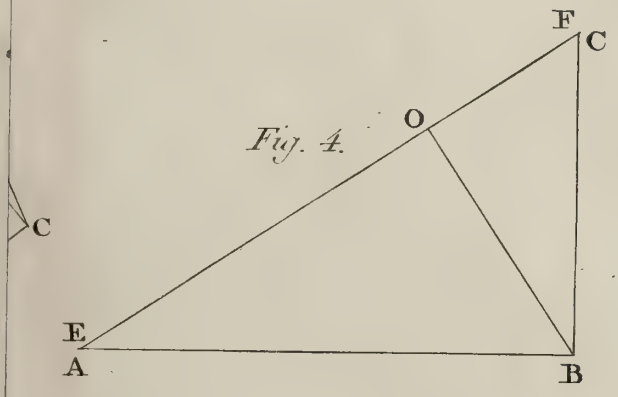


Fig. 4.

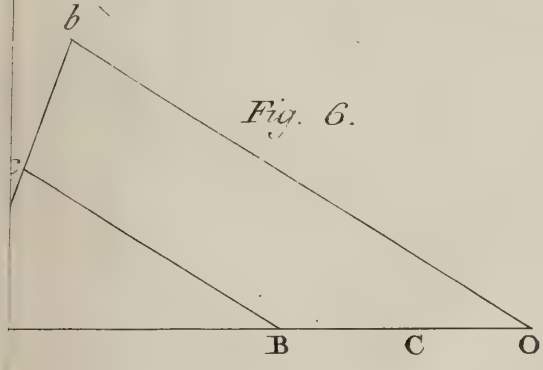
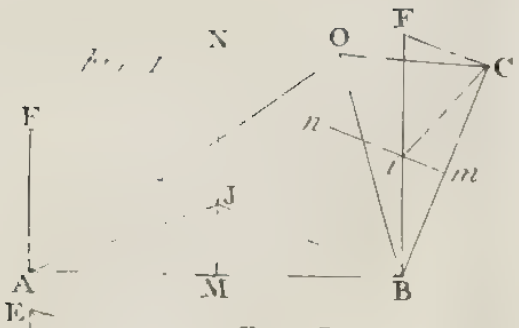


Fig. 6.


N
O
F
C
n
m
A
M
B

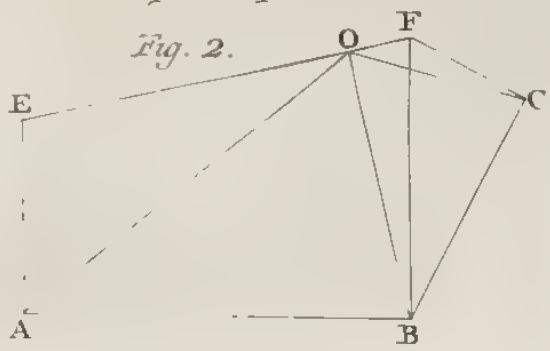


Fig. 2.
O
F
E
C
A
B

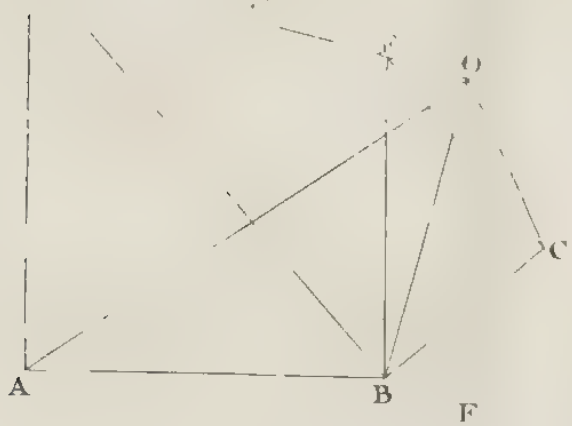
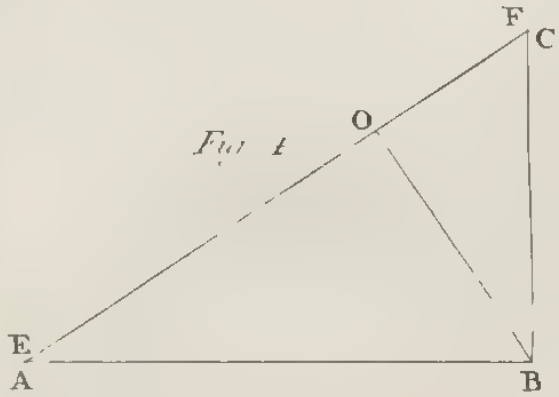
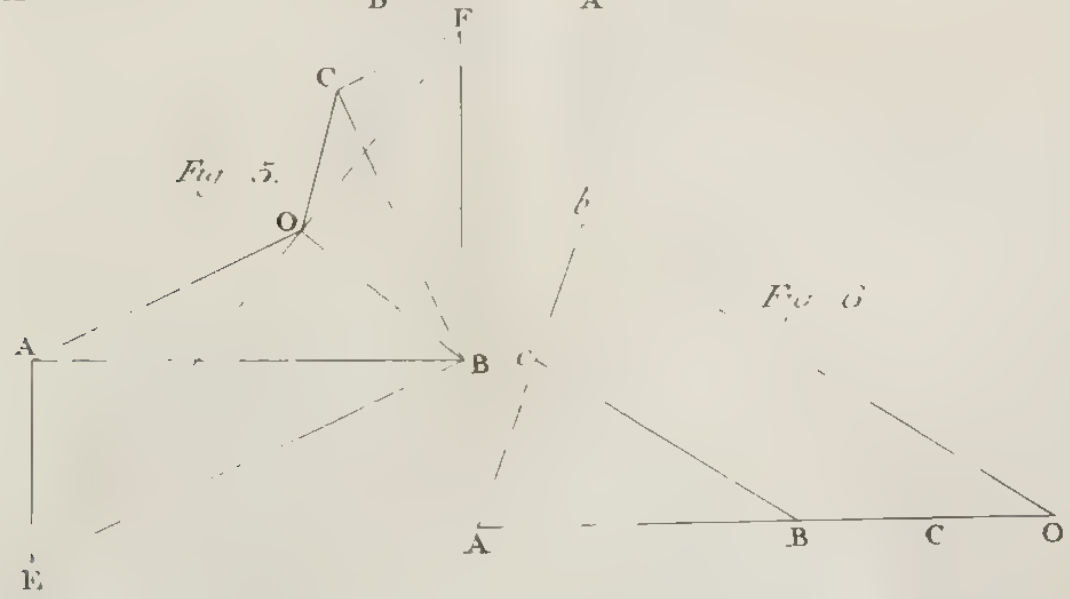


Fig. 3
O
C
A
B


F
C
O
Fig. 4
E
A
B


F
C
Fig. 5.
O
b
A
B
E
Fig. 6
A
B
C
O

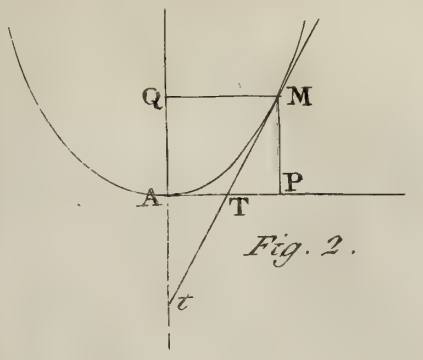


Fig. 2.

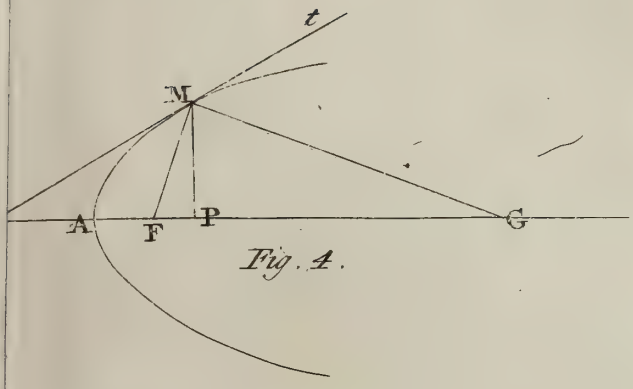
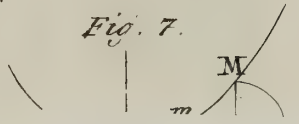
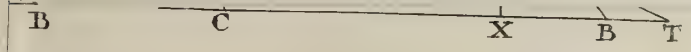


Fig. 4.

Fig. 7.





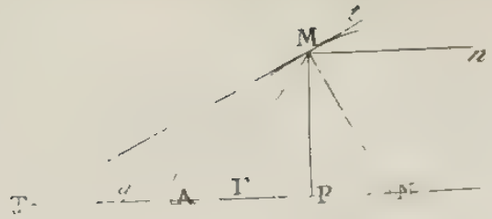


Fig. 1

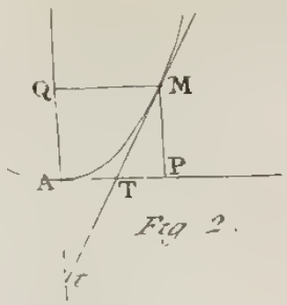


Fig. 2.

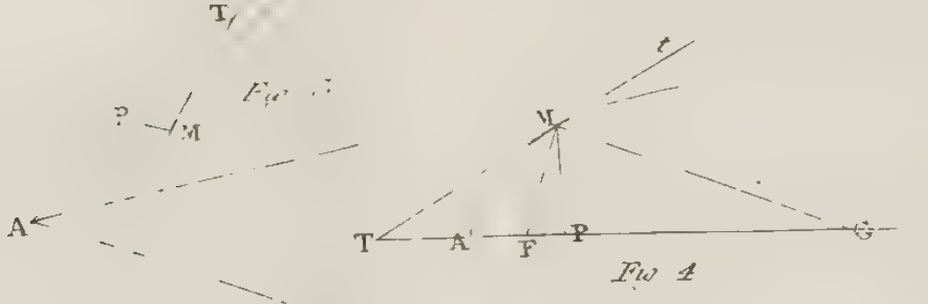
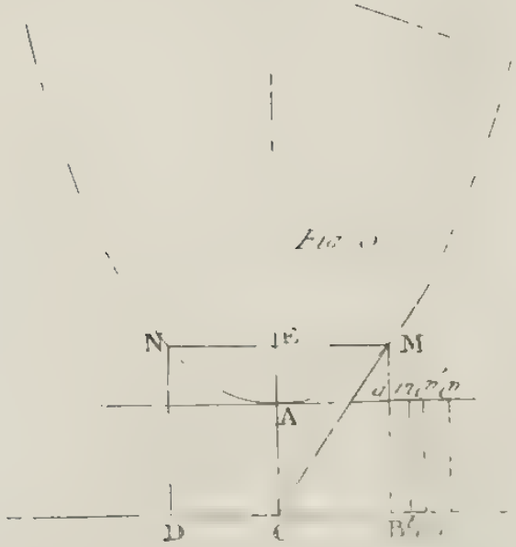


Fig. 4



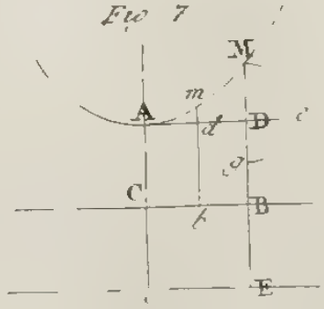


Fig. 7

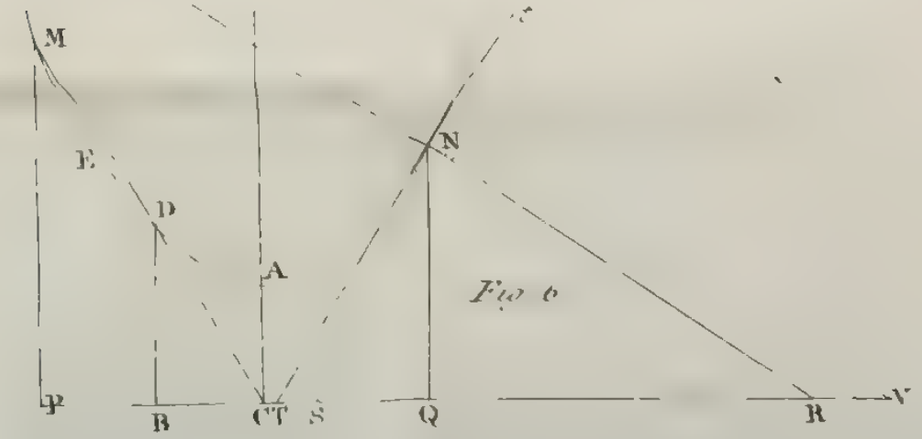


Fig. 6

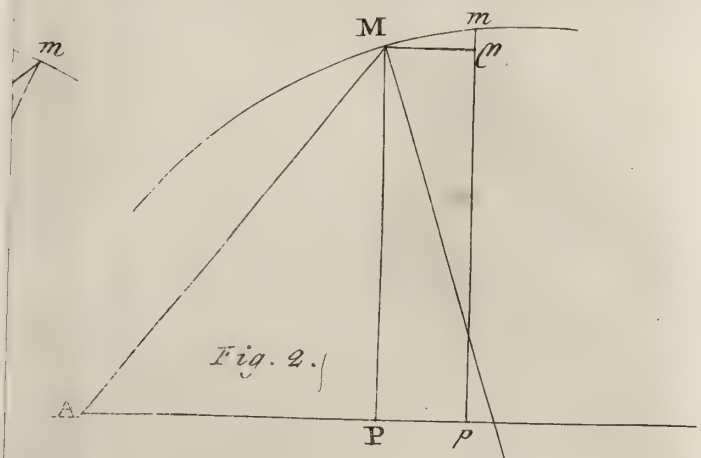


Fig. 2.

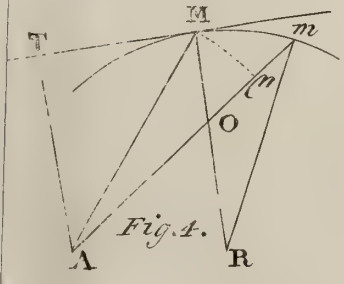


Fig. 4.

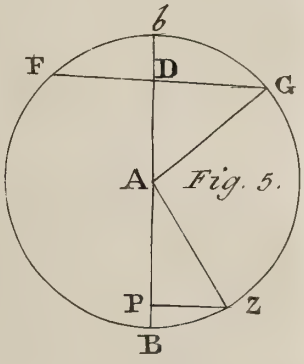


Fig. 5.

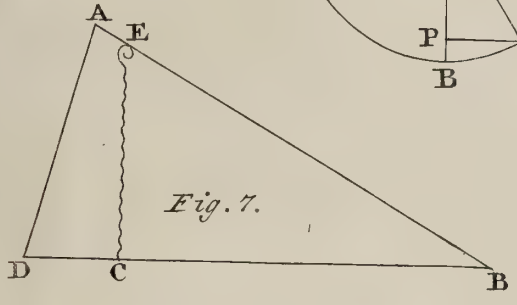


Fig. 7.

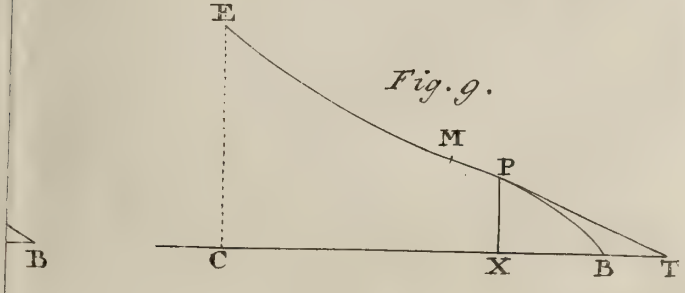


Fig. 9.

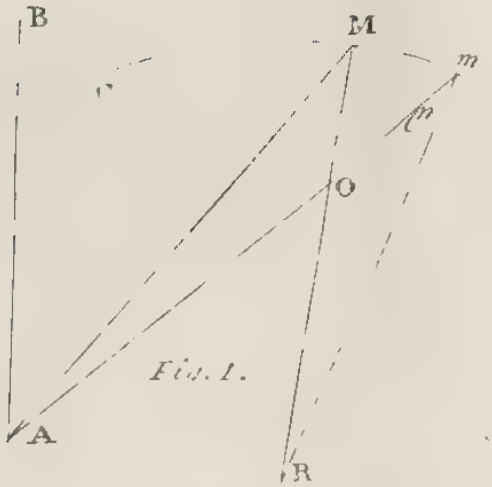


Fig. 1.

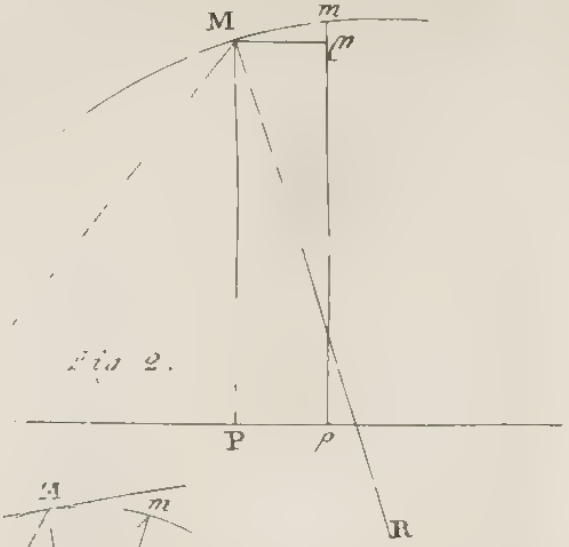


Fig. 2.

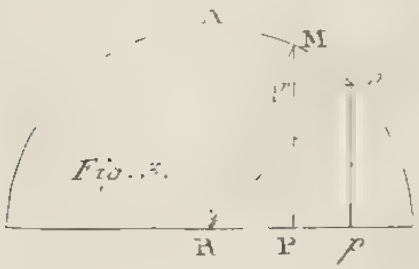


Fig. 3.

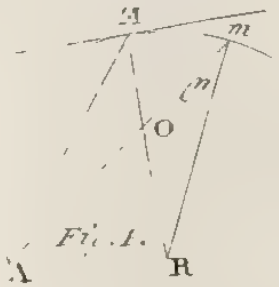


Fig. 4.

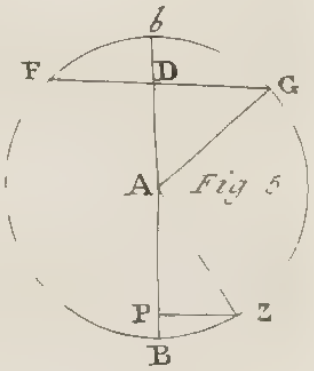


Fig. 5.

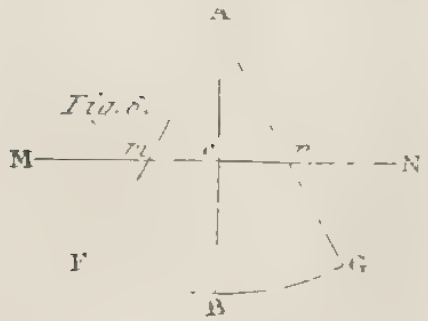


Fig. 6.

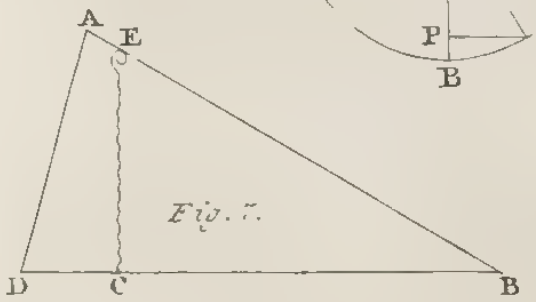


Fig. 7.

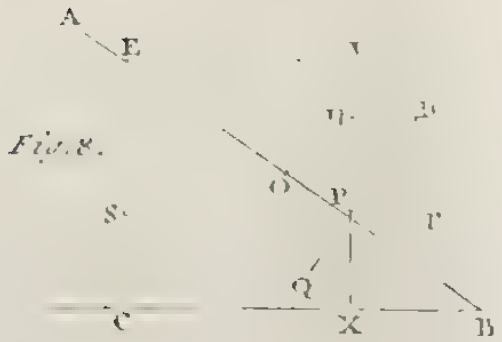


Fig. 8.

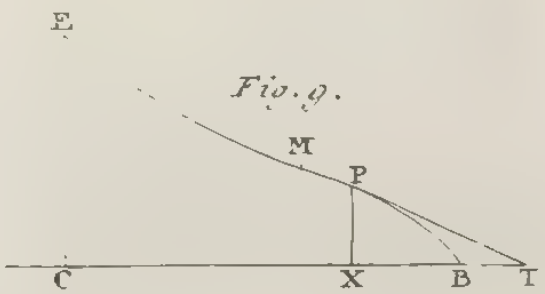
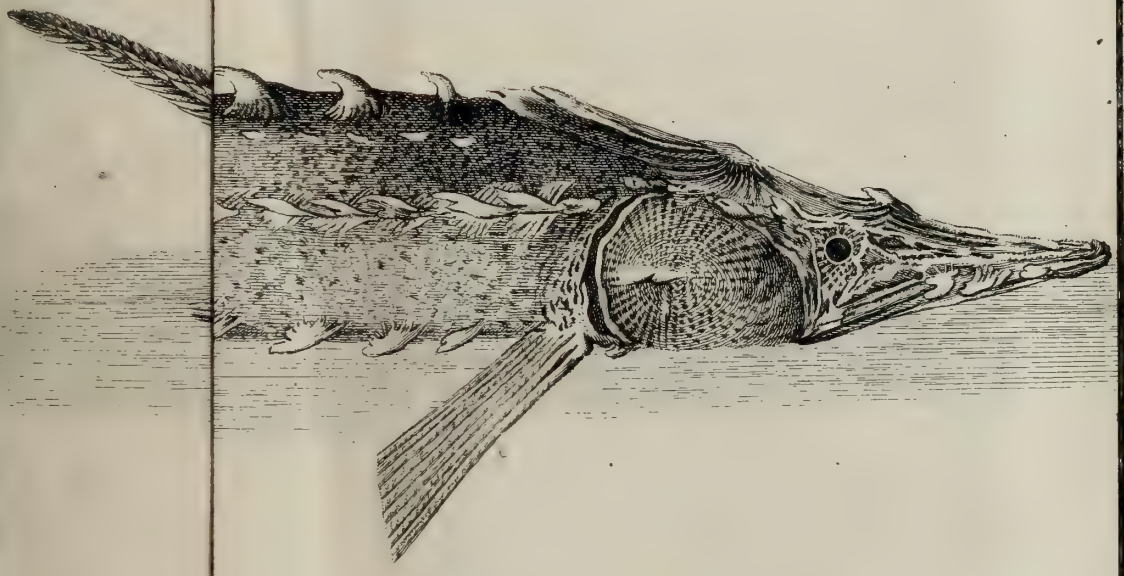
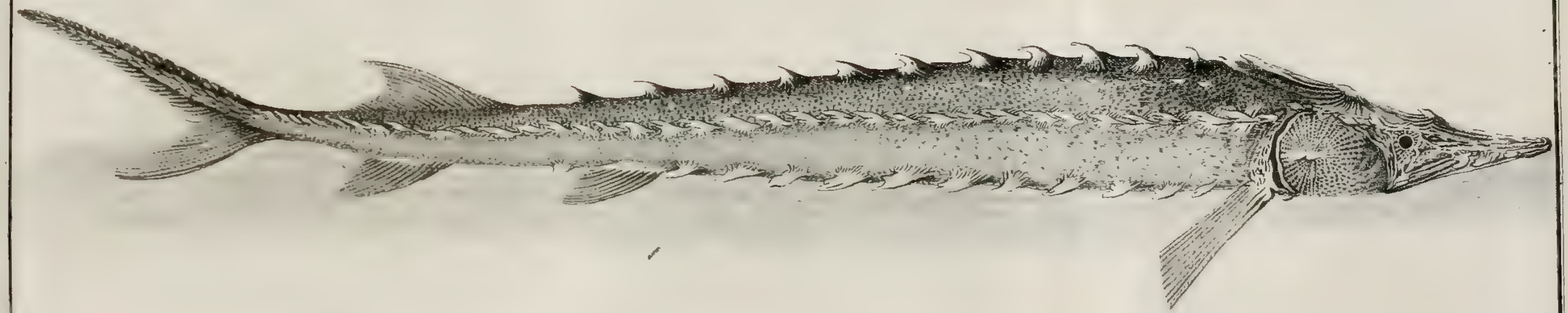
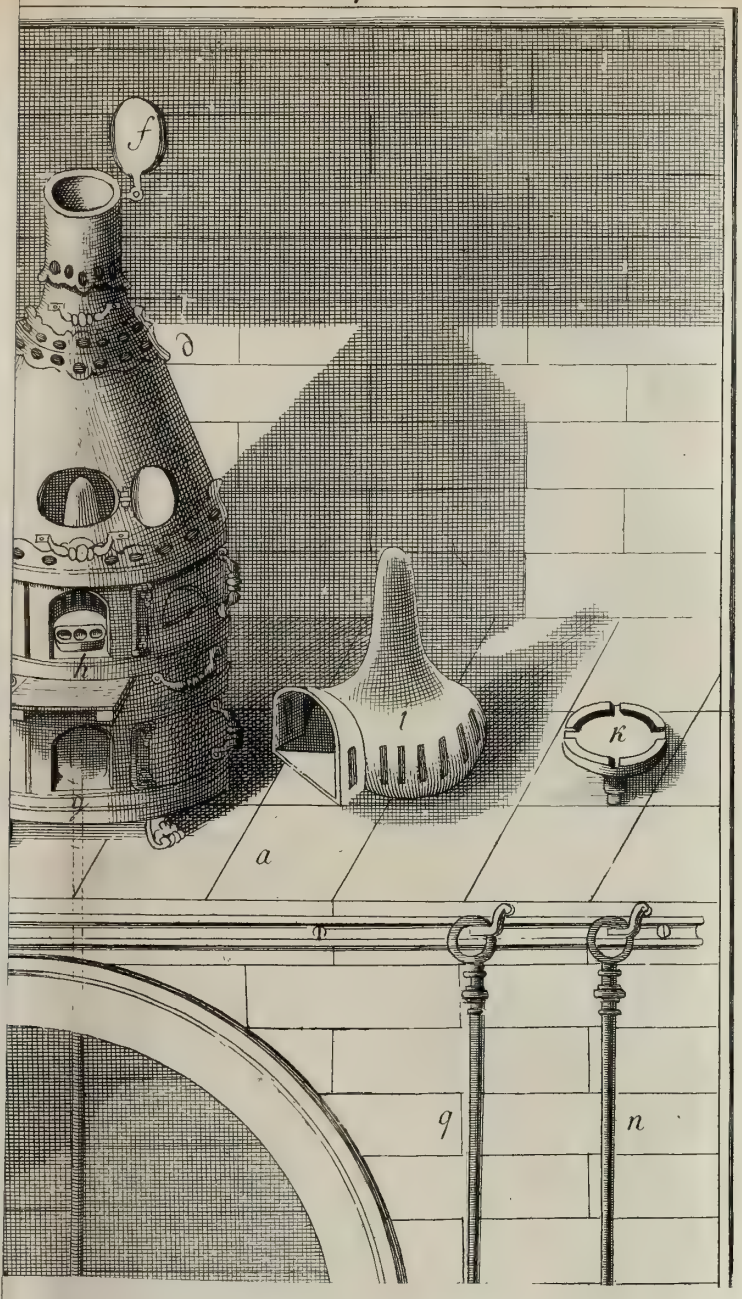


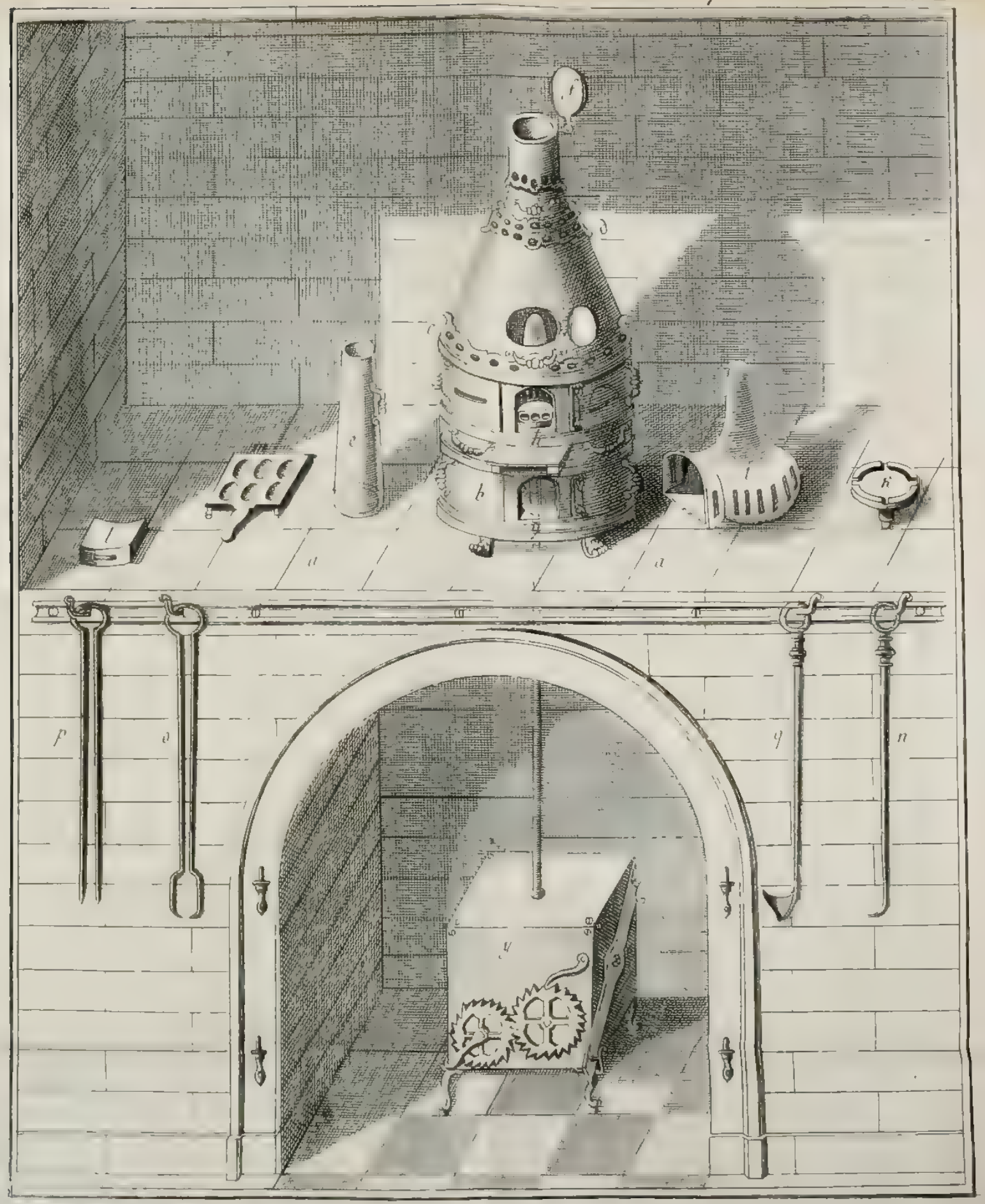
Fig. 9.

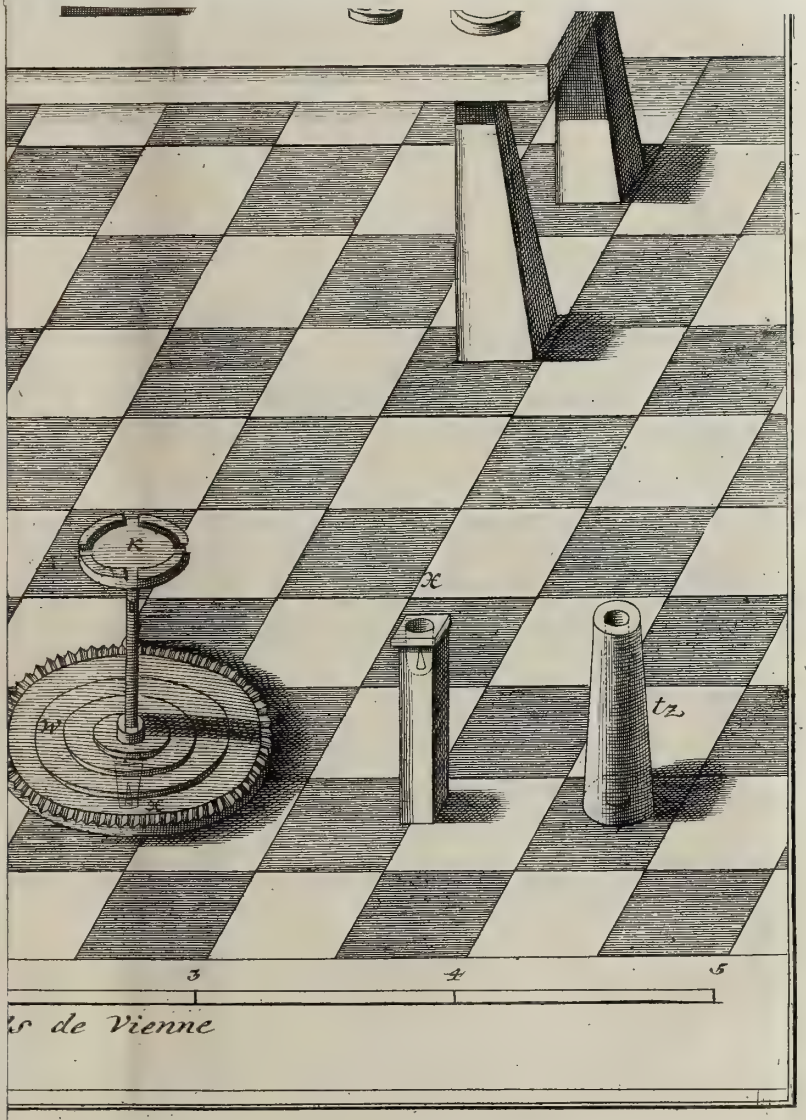
Histoire de l' Academie pour l'année 1791. Tab A.



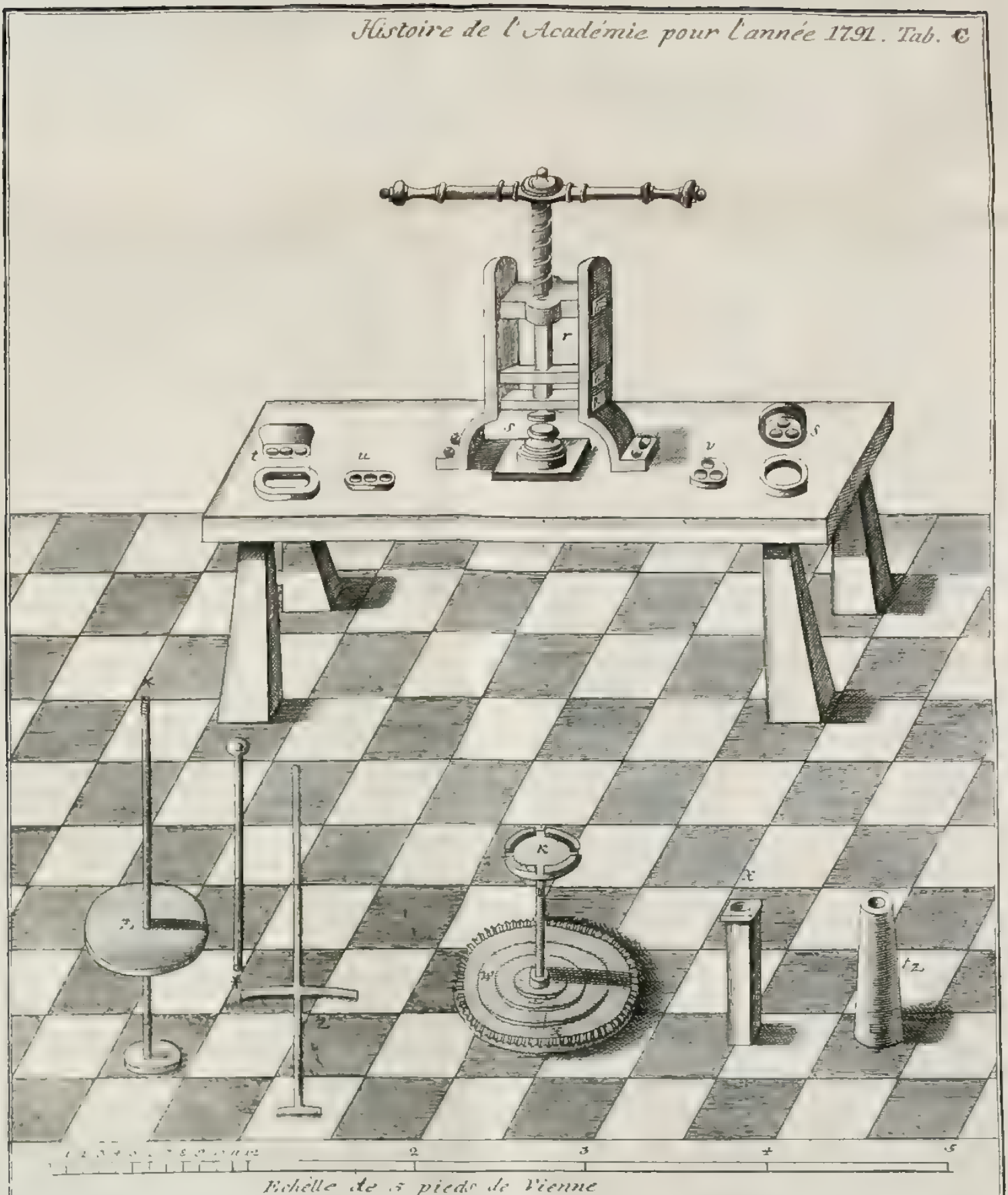



f
∂
h
l
κ
a
q
n


f
d
e
b
k
l
a
a
p
o
q
n
y
g



ls de Vienne



Echelle de 5 pieds de Vienne

Sterilis

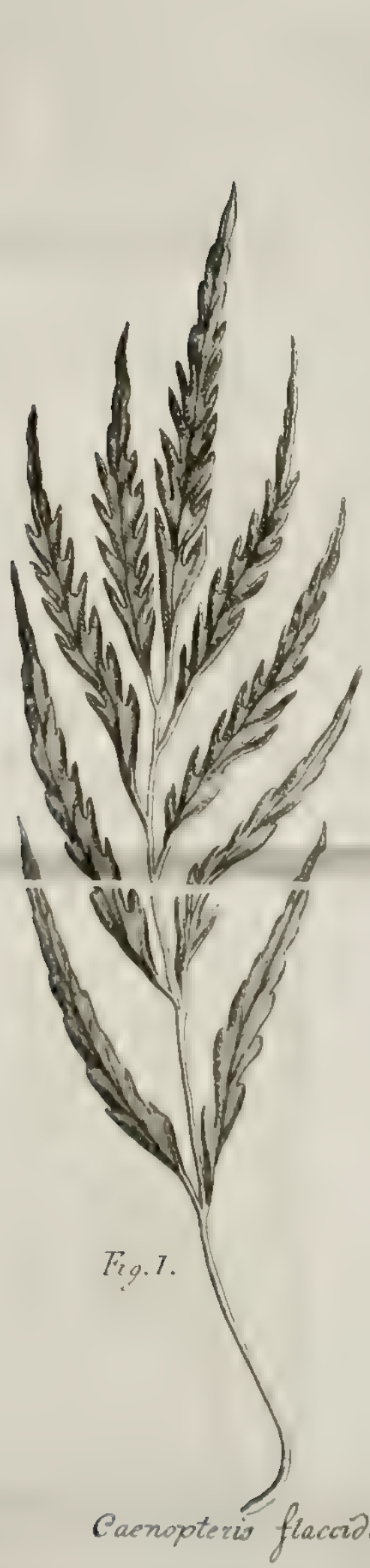


Fig. 1.

Caenopteris flaccida

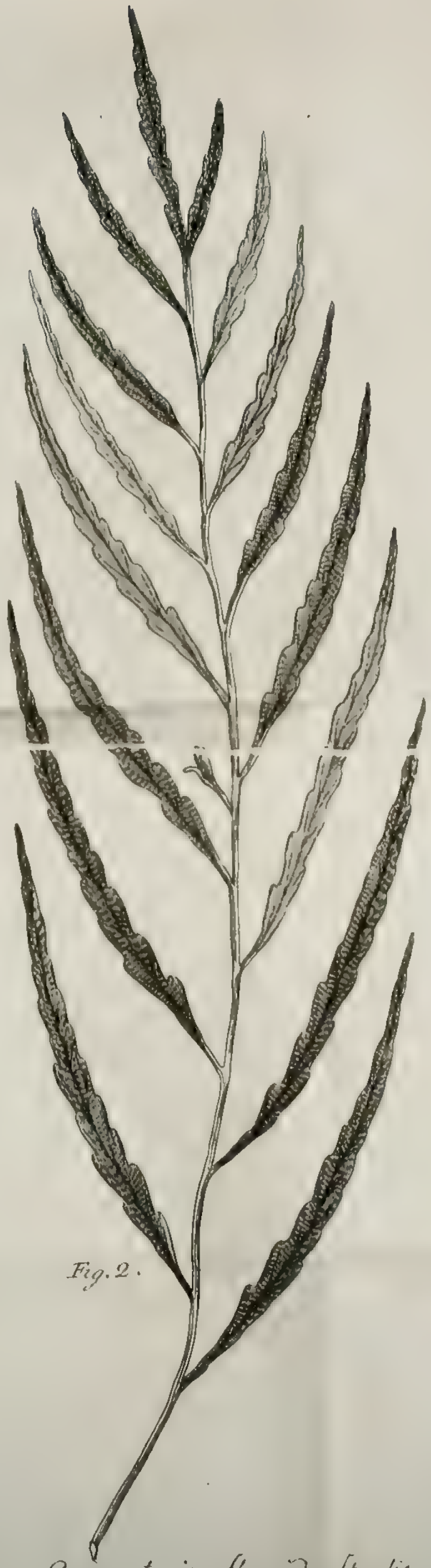


Fig. 2.

Caenopteris flaccida: sterilis

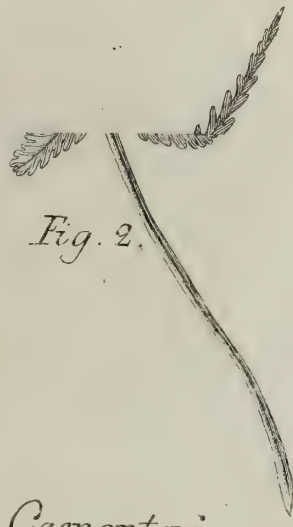


Fig. 2.

Caenopteris auriculata

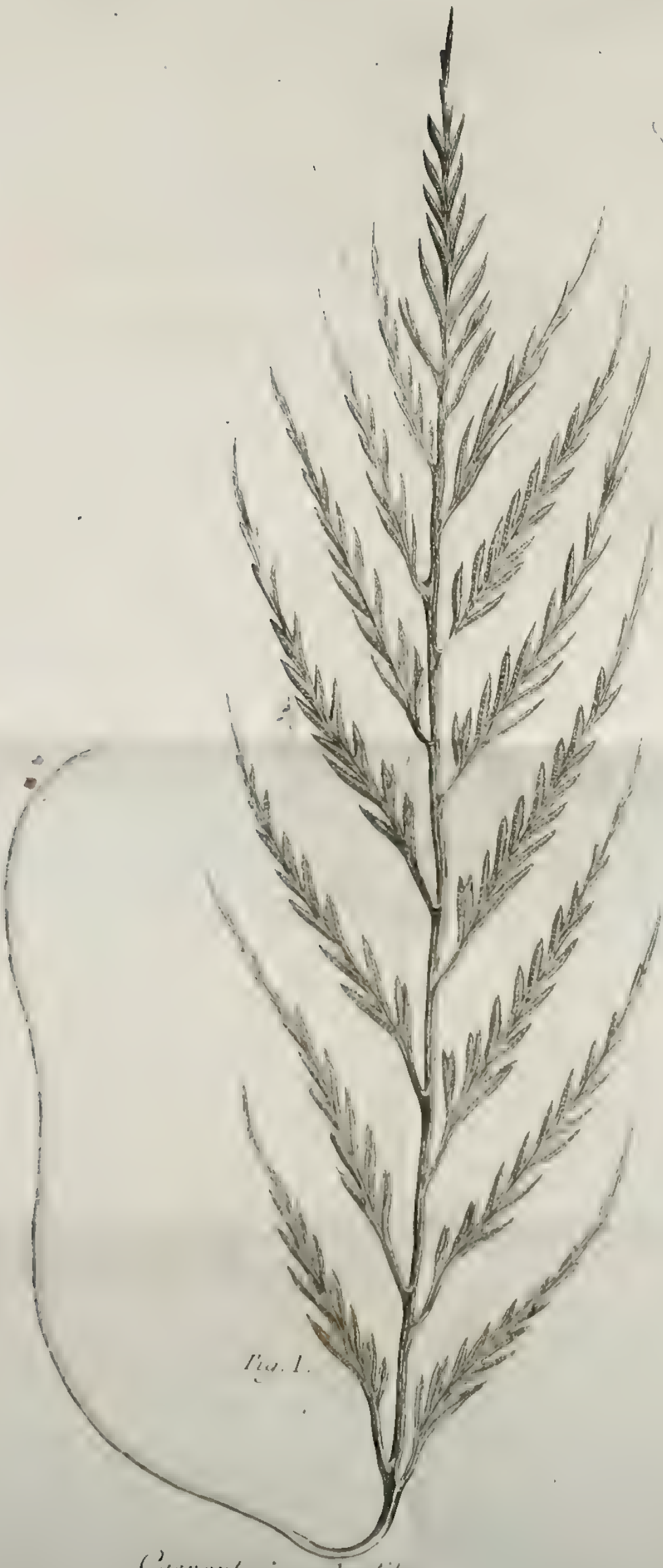


Fig. 1.

Caenopteris odontites

Fig. 2.

Caenopteris aurealata

Fig 1

Caenopteris furcata

B

Fig 2

A

Caenopteris furcata

onica

Fig 1

Caenopteris cicutaria

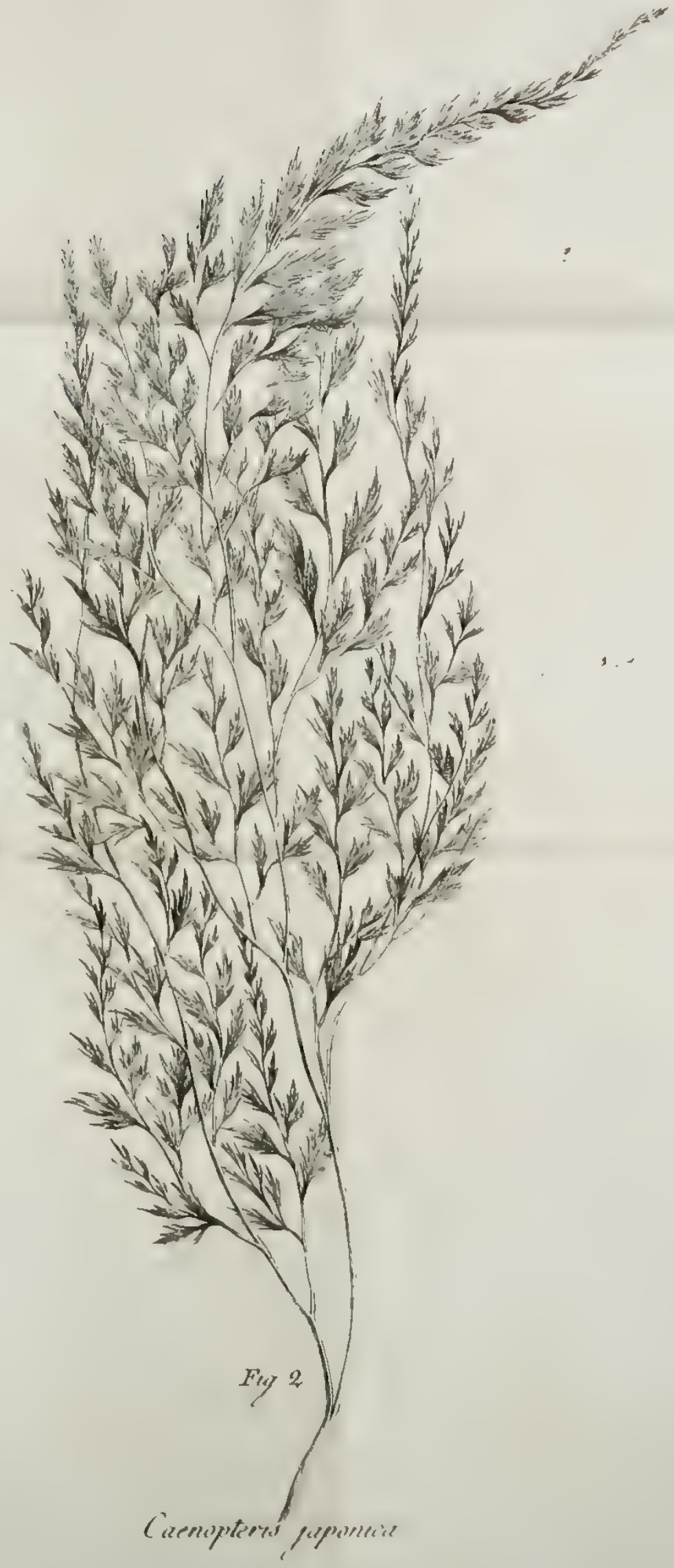


Fig 2

Caenopteris japonica